UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Informática

Un Nuevo Modelo para Procesos de Computación con Palabras en Toma de Decisión Lingüística

Diploma De Estudios Avanzados

Línea De Investigación:

Integración de Información,
Toma de Decisiones, DSS y Sistemas Multiagente

Rosa Mª Rodríguez Domínguez

Jaén, Junio de 2010

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Informática

Un Nuevo Modelo para Procesos de Computación con Palabras en Toma de Decisión Lingüística

Diploma De Estudios Avanzados

Director: Dr. Luis Martínez López

Rosa Mª Rodríguez Domínguez

Jaén, Junio de 2010

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La Toma de Decisiones es una de las actividades diarias de los seres humanos, ya que constantemente nos encontramos ante situaciones donde existen varias alternativas y debemos elegir la mejor de ellas o la que mejor se adapte a nuestras necesidades.

El proceso de Toma de Decisión es un proceso complejo debido a la necesidad de realizar previamente un análisis detallado de las ventajas e inconvenientes asociados a cada alternativa. En la *Teoría Clásica de la Decisión* [39] existen distintos tipos de problemas definidos, nosotros nos centraremos en problemas de toma de decisión definidos bajo incertidumbre, donde la información es vaga e imprecisa. En tal caso, no parece lógico modelar información vaga e imprecisa de una forma precisa, ya que puede producir pérdida de información o falta de representación del conocimiento. En estos casos, el uso del *Enfoque Lingüístico Difuso* [49] basado en la *Teoría de Conjuntos Difusos* [48] ayuda a modelar la información hablándose de *Modelado Lingüístico* [2, 5, 11, 12, 16, 37, 46].

En el modelado lingüístico se utilizan variables lingüísticas cuyos valores no son números, sino palabras o frases definidos en un lenguaje natural o artificial. Estos valores denominados *etiquetas lingüísticas* son valores que están en un universo de discurso discreto, y que permiten expresar información vaga e imprecisa con mayor flexibilidad que con los valores numéricos. En la Toma de Decisión bajo incertidumbre el uso del modelado lingüístico ha proporcionado buenos resultados [7, 47] para tratar tal incertidumbre. En la Figura 1.1 puede verse un esquema básico de resolución de un problema de Toma de Decisión [35]. Dicho esquema consta de dos fases:

1. *Fase de agregación*: en la que se transforman un conjunto de valores de preferencias de diferentes expertos en un conjunto de valores colectivos de cada alternativa.

2. *Fase de explotación*: una vez obtenidos los valores colectivos se aplica un proceso de selección para obtener un conjunto solución de alternativas al problema.

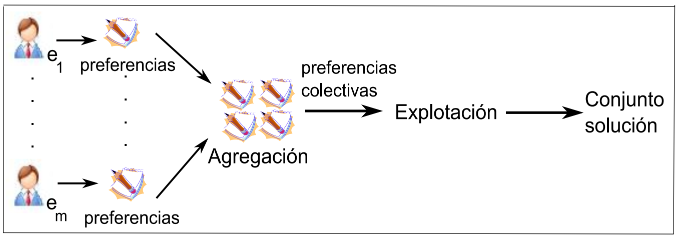

Figura 1.1: Esquema de resolución básico de un problema de Toma de Decisión

Es claro que el uso de información lingüística implica la necesidad de realizar procesos que operen con palabras, denominados *procesos de Computación con Palabras*. En la literatura existen distintos modelos para realizar estos procesos de Computación con Palabras necesarios en los modelos de resolución de problemas de Toma de Decisión. Los dos modelos clásicos inicialmente usados en el enfoque lingüístico difuso son:

- *Modelo basado en el principio de extensión* [11, 36]: Este modelo realiza operaciones con etiquetas lingüísticas mediante operaciones asociadas a sus funciones de pertenencia basadas en el principio de extensión. El uso de la aritmética extendida basada en el principio de extensión [13] incrementa la imprecisión de los resultados, ya que puede que los resultados no coincidan con ninguno de los números difusos que definen la semántica de las etiquetas lingüísticas iniciales. En este caso existen dos opciones: (i) realizar un proceso de aproximación [11] que identifica el número difuso obtenido con el número difuso más cercano a una etiqueta inicial o (ii) trabajar directamente con números difusos que no tengan una representación lingüística.

- *Modelo simbólico* [12]: Este modelo usa la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos para operar. Los resultados intermedios de estas operaciones son valores numéricos que pueden no coincidir con el orden que ocupa una etiqueta. En tal caso, hay que realizar un proceso de aproximación para que el resultado pueda ser representado mediante el índice de la etiqueta más cercana.

Estos modelos computacionales presentan una serie de limitaciones desde el punto de vista de la interpretabilidad y de la precisión, en el caso del modelo basado en el Principio de Extensión, y de la pérdida de información y falta de operaciones en el modelo simbólico. Esto es debido a los procesos de aproximación utilizados para obtener los resultados finales y a la representación de la información. Para mejorar la precisión, comprensión y operativa de los resultados en los procesos de Computación con Palabras se han propuesto distintos modelos simbólicos basados en el enfoque lingüístico difuso, tales como, el modelo lingüístico 2-Tupla [19], el modelo lingüístico Virtual [42] y el modelo lingüístico 2-Tupla proporcional [40]. A pesar de los avances de representación y computación de estos modelos, hemos detectado que aún presentan limitaciones que han de ser superadas para poder mejorar los procesos de Computación con Palabras. Estas mejoras consisten en ampliar las leyes operacionales, tal que mantengan la representación y precisión de los resultados mejorando así la resolución de procesos de decisión bajo incertidumbre.

1.2. Objetivos

Dadas las necesidades que nos encontramos en los procesos de computación con palabras en problemas de decisión, en esta memoria de investigación nos proponemos mejorar dichos procesos. Para ello nos planteamos los siguientes objetivos:

- Analizar y exponer las limitaciones de los modelos simbólicos más extendidos en la literatura, tales como, el modelo lingüístico 2-Tupla [19], el modelo lingüístico Virtual [42] y el modelo lingüístico 2-Tupla proporcional [40]. En este análisis revisaremos sus modelos de representación y computacionales, además de estudiar sus características y comprobar si siguen la base del enfoque lingüístico difuso para el tratamiento de la incertidumbre en problemas de decisión lingüística.

- A partir de los resultados obtenidos en el estudio anterior presentaremos una propuesta inicial de un nuevo modelo computacional simbólico, denominado *Modelo Lingüístico* $\delta - \alpha$, que permita aumentar el número de leyes operacionales sobre la información linguística, manteniendo la precisión e interpretabilidad de los resultados junto con una representación basada en el enfoque lingüístico difuso.

1.3. Estructura

Para alcanzar los objetivos mencionados previamente, esta memoria se estructura en los siguientes capítulos:

- Capítulo 2: presenta una revisión del Enfoque Lingüístico Difuso [49]. Para ello, en primer lugar se hace un breve repaso de la Teoría Clásica de Conjuntos Difusos y de sus conceptos básicos. A continuación hacemos una revisión más detallada del Enfoque Lingüístico Difuso y de conceptos como variables lingüísticas y el modelado lingüístico de preferencias. Finalmente presentamos una breve introducción a problemas de toma de decisión lingüísticos que se utilizarán a lo largo de esta memoria.

- Capítulo 3: en este capítulo de la memoria se realiza un estudio de los distintos modelos computacionales simbólicos más extendidos en la literatura, como son:

  - Modelos lingüísticos clásicos
  - Modelo lingüístico 2-Tupla
  - Modelo lingüístico Virtual
  - Modelo lingüístico 2-Tupla proporcional

  En este estudio revisaremos la representación de la información lingüística y el modelo computacional de cada uno de ellos.

- Capítulo 4: en él, se realiza un análisis comparativo de los modelos computacionales simbólicos presentados en el anterior capítulo aplicados a un problema de toma de decisión lingüístico. Se analiza el modelo de representación lingüística, el modelo computacional, la precisión y la interpretabilidad de los resultados de cada uno de ellos y se apunta las limitaciones todavía existentes en el tratamiento computacional con palabras.

- Capítulo 5: una vez analizadas las limitaciones de los modelos anteriores para realizar procesos de computación con palabras, en este capítulo presentaremos una propuesta inicial de un modelo computacional simbólico híbrido que permite mejorar las limitaciones de los modelos revisados en el capítulo 3.

- Capítulo 6: este capítulo concluye la memoria de investigación presentando las conclusiones más relevantes de la investigación realizada, y haciendo un apunte sobre la dirección que deben llevar los trabajos futuros en esta línea.

- Capítulo 7: enumera y describe los cursos de doctorado realizados en el programa de doctorado de Informática de la Universidad de Jaén durante el periodo de docencia.

Capítulo 2

Enfoque Lingüístico Difuso y Toma de Decisión

En este capítulo presentamos una breve revisión de conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos y del Enfoque Lingüístico Difuso que son utilizados a lo largo de esta memoria de investigación. Estudiaremos el concepto de Variable Lingüística y su aplicación al Modelado de Preferencias. Finalmente haremos una breve introducción a problemas de Toma de Decisión Lingüísticos.

2.1. Teoría de los Conjuntos Difusos. Conceptos Básicos

La Teoría de los Conjuntos Difusos tiene una breve existencia, ya que las primeras publicaciones datan de los años 60 [48]. Dicha Teoría se centra en modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Probabilidades resultan insuficientes o no operativos. Para ello, dicha teoría generaliza el concepto de *conjunto clásico* para introducir el concepto de *conjunto difuso*. Los conjuntos difusos surgen como una nueva forma de representar la incertidumbre e imprecisión [51]. A lo largo de las cuatro décadas de existencia de la Teoría de Conjuntos Difusos, un gran número de investigadores han prestado especial atención en sus investigaciones a dicha teoría. Esta teoría se ha desarrollado a lo largo de dos líneas principales [34]:

1. Como una teoría matemática formal [23], generalizando la Teoría de Conjuntos y la Lógica Multivaluada, que ha ampliado los conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como el Álgebra, la Teoría de Grafos, etc., aplicando conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos a dichas áreas.

2. Como un potente modelador del lenguaje [49], que puede utilizarse en muchas situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre.

Esta teoría se adapta fácilmente a diferentes contextos, tales como, Teoría de Sistemas [33], Teoría de la Decisión [14], etc. Sin embargo, esto significa que la especificación y desarrollos dependen del contexto de los conceptos originales de la Teoría de Conjuntos Difusos.

A continuación vamos a introducir una serie de conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos para poder entender fácilmente las definiciones y procesos presentados a lo largo de esta memoria.

2.1.1. Conjuntos Difusos y Función de Pertenencia

La noción de conjunto refleja la tendencia a organizar, resumir y generalizar el conocimiento sobre los objetos del mundo real. El encapsulamiento de los objetos es una colección cuyos miembros comparten una serie de características que implican la noción de conjunto. Los conjuntos introducen una noción fundamental de *dicotomía*. En esencia, cualquier proceso de dicotomización es una clasificación binaria: aceptar o rechazar que un objeto pertenezca a una categoría determinada. Normalmente la decisión de **aceptar** se nota por "1" y la de **rechazar** por "0". Por tanto, una decisión de clasificación puede expresarse a través de una función característica.

Definición 1 *Sea A un conjunto en el universo X, la función característica asociada a A, $A(x)$, $x \in X$, se define como:*

$$A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

La función $A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ tiene una restricción con un límite bien definido sobre los objetos del universo X que pueden ser asignados al conjunto A. El concepto de conjunto difuso lo que hace es *suavizar* este requerimiento y admitir valores intermedios en la función característica, que pasa a denominarse *función de pertenencia*.

Esto permite una interpretación más realista de las categorías que describen los objetos del mundo real que no tienen unos límites claros y bien definidos, como por ejemplo, el confort de un coche [25]. Si un objeto pertenece a una categoría con un grado que puede ser expresado mediante un número real en el intervalo $[0, 1]$. Cuanto más cercano a 1 sea el grado, mayor será el grado de pertenencia a la categoría determinada, y cuanto más cercano a 0, menor será la pertenencia a dicha categoría.

Por tanto, un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 y 1. Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir los conjuntos difusos como sigue:

Definición 2 *[48]. Un conjunto difuso, $\tilde{A}$ sobre X está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio o universo del discurso X en el intervalo* $[0, 1]$.

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1]$$

De esta forma, un conjunto difuso $\tilde{A}$ en X puede ser representado como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico x, $x \in X$, y su grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))/ \ x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}$. Por tanto, un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto clásico cuya función de pertenencia toma sólo dos valores $\{0, 1\}$.

Por ejemplo, consideremos el concepto *persona joven*, en un contexto donde la edad oscila en el intervalo [1,70]. Claramente una persona cuya edad sea menor o igual a 30 años se puede considerar una persona joven y se le asignará un valor de 1 a su grado de pertenencia al conjunto difuso de personas jóvenes. Una persona cuya edad sea igual o superior a 50 años no puede considerarse como una persona joven, y de ahí que se le asigne un valor 0 al grado de pertenencia al conjunto difuso de persona joven. La cuantificación del resto de valores puede realizarse mediante una función de pertenencia $\mu_{\bar{H}} : U \rightarrow [0,1]$ que caracteriza el conjunto difuso $\bar{H}$ de personas jóvenes en el universo U = [1,70].

$$\mu_{\tilde{H}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 30] \\ 1 - \frac{x-30}{20} & x \in (30, 50) \\ 0 & x \in [50, 70]. \end{cases}$$

Otras definiciones básicas que aparecen con frecuencia cuando hablamos de conjuntos difusos son el *soporte* y el *α-corte* de un conjunto. A continuación veremos ambas definiciones:

Definición 3 *El soporte de un conjunto difuso $\tilde{A}$, Support($\tilde{A}$), es el conjunto de todos los elementos de $x \in X$, tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero:*

$$Support(\tilde{A}) = \{x \in X, \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 4 *Sea $\tilde{A}$ un conjunto difuso sobre el universo X y dado un número $\alpha \in [0, 1]$, se define el α-corte sobre $\tilde{A}$, ${}^{\alpha}A$, como un conjunto clásico que contiene todos los valores del universo X cuya función de pertenencia en $\tilde{A}$ sea mayor o igual al valor α:*

$${}^{\alpha}A = \{x \in X/\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

2.1.2. Tipos de Funciones de Pertenencia

La función de pertenencia no es una función trivial como en los conjuntos clásicos, por lo que hay que definirla. En principio cualquier forma de la función $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$, describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso $\tilde{A}$ que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Estas funciones pueden tener diferentes representaciones gráficas (ver Figura 2.1), y pueden tener algunas propiedades específicas (ej., continuidad). A veces, la semántica de los conjuntos difusos no es muy sensible a variaciones en la forma, y es conveniente el uso de funciones simples.

Los conjuntos difusos pueden representarse con familias de funciones paramétricas, siendo las más comunes: la función triangular, la función trapezoidal y la gaussiana.

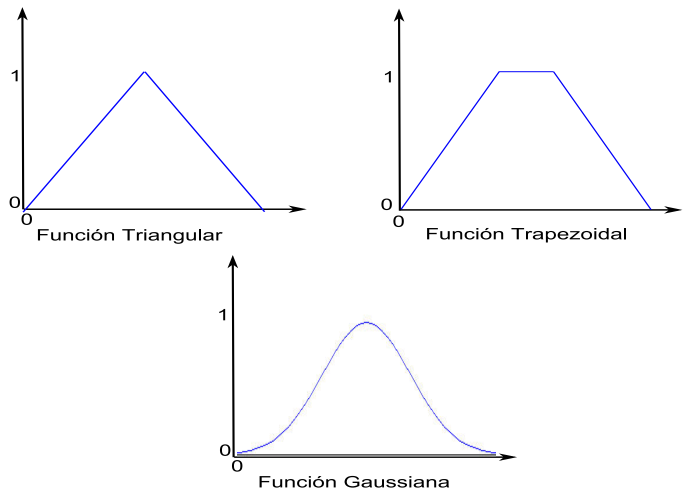

Figura 2.1: Representaciones gráficas de funciones de pertenencia

2.1.3. Principio de Extensión

El principio de Extensión es un concepto básico de la Teoría de Conjuntos Difusos utilizado para generalizar conceptos matemáticos no difusos a conjuntos difusos. A lo largo del tiempo han aparecido diferentes formulaciones de este concepto [13, 24] que se puede definir como:

Definición 5 *Sea X el producto cartesiano de los universos $X_1, \ldots, X_r$ y sean $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r$, r conjuntos difusos en $X_1, \ldots, X_r$ respectivamente. Sea f una función definida desde el universo X, $(X = X_1 \times \ldots \times X_r)$, al universo Y, $y = f(x_1, \ldots, x_r)$. El Principio de Extensión nos permite definir* *un conjunto difuso $\tilde{B}$ en Y, a partir de los conjuntos difusos $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r$ representando su imagen a partir de la función f, de acuerdo a la siguiente expresión,*

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(x_1, \ldots, x_r), (x_1, \ldots, x_r) \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1,\ldots,x_r) \in f^{-1}(y)} min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r), & si \quad f^{-1}(y) = \emptyset \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.4. Número Difuso

Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen una especial significación aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales, $\Re$:

$$\tilde{A} : \Re \rightarrow [0, 1]$$

Bajo ciertas condiciones estos conjuntos difusos pueden ser vistos como "números difusos" o "intervalos difusos", definiéndose el concepto de número difuso como [13, 24]:

Definición 6 *[24]. Un número difuso $\tilde{A}$ es un subconjunto de $\Re$ que verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, $^{\alpha}A$ debe ser un intervalo cerrado*

2. *El soporte de $\tilde{A}$ debe ser finito*

3. *$\tilde{A}$ está normalizado,*

$$sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

Existen distintas representaciones de números difusos [24], tales como (ver Figura 2.2):

- Los números reales
- Intervalos de números reales
- Valores aproximados
- Intervalos aproximados o difusos

También es importante señalar que las operaciones aritméticas habituales sobre números reales pueden extenderse a aritmética difusa mediante el Principio de Extensión. Sin pérdida de generalidad vamos a revisar las definiciones aritméticas difusas básicas utilizando como función de pertenencia

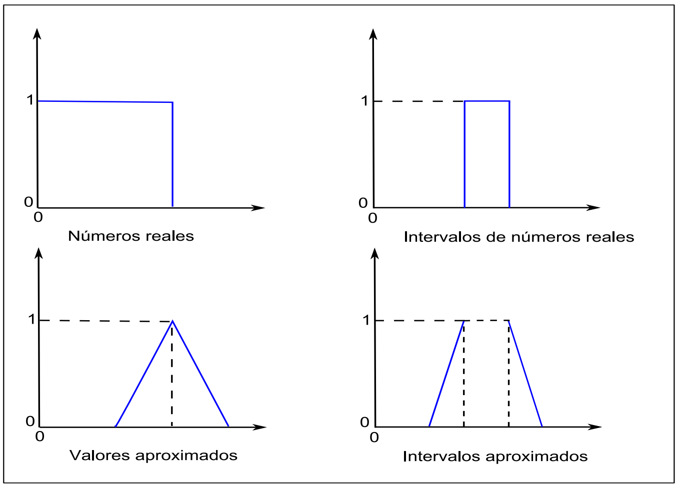

Figura 2.2: Ejemplos de números difusos

paramétrica la función triangular, aunque se podría aplicar a cualquier otro tipo de función de pertenencia.

Sea $\tilde{s}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\tilde{s}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dos números difusos y $\tilde{s}_r$ el número difuso resultado de la operación aritmética difusa.

Definición 7 *Suma:*
$\tilde{s}_r = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$

Definición 8 *Resta:*
$\tilde{s}_r = \tilde{s}_1 - \tilde{s}_2 = (a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2)$

Definición 9 *Multiplicación:*
En esta operación puede definirse (1) el producto de un número real positivo por una etiqueta lingüística y (2) el producto de dos etiquetas lingüísticas. Veamos cada una de las definiciones:

1. *Dado $\lambda \in [0, \infty)$ se define el producto de un número real positivo por un número difuso:*

   $\tilde{s}_r = \lambda * \tilde{s}_1 = \lambda * (a_1, b_1, c_1) = (\lambda * a_1, \lambda * b_1, \lambda * c_1)$

2. *El producto de dos números difusos se define de la siguiente forma:*

   $\tilde{s}_r = \tilde{s}_1 * \tilde{s}_2 = (a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) = (a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2)$

Definición 10 *División:*
$\tilde{s}_r = \tilde{s}_1 / \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1 * \frac{1}{\tilde{s}_2} = (a_1, b_1, c_1) * \frac{1}{(a_2,b_2,c_2)} = (a_1 * \frac{1}{c_2}, b_1 * \frac{1}{b_2}, c_1 * \frac{1}{a_2})$

Para entender las operaciones aritméticas difusas definidas previamente, vamos a presentar un ejemplo con cada una de ellas. Para ello utilizaremos los números difusos $\tilde{s_1} = (0.4, 0.6, 0.8)$, $\tilde{s_2} = (0.1, 0.3, 0.4)$ y $\tilde{s_r}$ que representa el número difuso resultado de la operación aritmética.

Ejemplo 1 *La suma de los números difusos $\tilde{s_1}$ y $\tilde{s_2}$ sería:*

$\tilde{s_r} = (0.4, 0.6, 0.8) + (0.1, 0.3, 0.4) = (0.4 + 0.1, 0.6 + 0.3, 0.8 + 0.4) =$
$= (0.5, 0.9, 1.2)$

Ejemplo 2 *El resultado de restar $\tilde{s_1}$ y $\tilde{s_2}$ es:*

$\tilde{s_r} = (0.4, 0.6, 0.8) - (0.1, 0.3, 0.4) = (0.4 - 0.4, 0.6 - 0.3, 0.8 - 0.1) =$
$= (0, 0.3, 0.7)$

Ejemplo 3 *Multiplicación:*

1. *Sea $\lambda = 3$, el producto de $\lambda * \tilde{s_1}$ es:*

   $\tilde{s_r} = 3 * (0.4, 0.6, 0.8) = (3 * 0.4, 3 * 0.6, 3 * 0.8) = (1.2, 1.8, 2.4)$

2. *El producto de $\tilde{s_1}$ y $\tilde{s_2}$ es:*

   $\tilde{s_r} = (0.4, 0.6, 0.8) * (0.1, 0.3, 0.4) = (0.4 * 0.1, 0.6 * 0.3, 0.8 * 0.4) =$
   $= (0.04, 0.18, 0.32)$

Ejemplo 4 *Por último la división entre los números difusos $\tilde{s_1}$ y $\tilde{s_2}$ sería:*

$\tilde{s_r} = (0.4, 0.6, 0.8)/(0.1, 0.3, 0.4) = (0.4, 0.6, 0.8) * \frac{1}{(0.1,0.3,0.4)} =$
$= (0.4 * \frac{1}{0.4}, 0.6 * \frac{1}{0.3}, 0.8 * \frac{1}{0.1}) = (1, 2, 8)$

Una vez revisados los conceptos básicos sobre la lógica difusa, vamos a revisar el enfoque lingüístico difuso que es la base de esta memoria de investigación, y que se definió por [49] a partir de la lógica difusa para cubrir una serie de necesidades en el tratamiento de la incertidumbre en problemas reales.

2.2. El Enfoque Lingüístico Difuso

En el mundo real existen problemas en los que la información puede ser cuantitativa. Estos problemas pueden ser valorados de forma precisa mediante valores numéricos. Sin embargo, hay problemas en los que la información es de naturaleza cualitativa y por tanto, es vaga e imprecisa. En este caso, no parece adecuado modelar información cualitativa de forma precisa. El uso del modelado lingüístico ha obtenido buenos resultados en este tipo de problemas. Este modelado de la información implica procesos de computación con palabras en los problemas en los que se utiliza. En [50] se indica que el uso del modelado lingüístico y por tanto de procesos de computación con palabras es adecuado fundamentalmente en las siguientes situaciones:

- Cuando la información disponible es demasiado imprecisa para justificar el uso de valores numéricos.
- O bien cuando la imprecisión de la información puede ser aprovechada para alcanzar robustez, solución a bajo coste y una buena interpretación de la realidad.

El Enfoque Lingüístico Difuso es un enfoque aproximado que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Conjuntos Difusos. Este enfoque proporciona una representación directa de los aspectos de naturaleza cualitativa mediante *variables lingüísticas* [49].

Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o etiqueta y por un *valor semántico* o significado. La etiqueta es una palabra que pertenece a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo del discurso. Dado que las palabras son menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística parece ser adecuado para caracterizar objetos que son demasiados complejos o están mal definidos para poder ser evaluados mediante valores numéricos precisos. Una variable lingüística en el enfoque lingüístico difuso es definida como sigue:

Definición 11 *[49]. Una variable lingüística se caracteriza por una quíntupla (H,T(H),U,G,M), donde H es el nombre de la variable; T(H) (o sólo T) simboliza el conjunto de términos de H, es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de H, donde cada valor es una variable difusa notada genéricamente como X y que varía a lo largo del universo del discurso U, el cuál está asociado con una variable base llamada u; G es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los nombres de los valores de H; y M es una regla semántica para asociar significado M(X), a cada elemento de H, el cual es un conjunto difuso de U.*

Existen dos posibilidades para elegir los descriptores lingüísticos apropiados del conjunto de términos y su semántica:

- La primera posibilidad consiste en definir el conjunto de términos lingüísticos mediante una *gramática libre de contexto*, y su semántica mediante números difusos descritos por una función de pertenencia parametrizada y por reglas semánticas [15, 26, 49].
- La segunda posibilidad define el conjunto de términos lingüísticos usando una estructura ordenada de etiquetas. Y la semántica de los términos lingüísticos se deriva de la propia estructura ordenada, la cual puede o no estar uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$ [4, 17, 18, 38, 45]. Esta será la forma de elegir los descriptores lingüísticos que utilizaremos a lo largo de esta memoria. En la Figura 2.3

se puede apreciar la semántica asociada a un conjunto de términos lingüísticos.

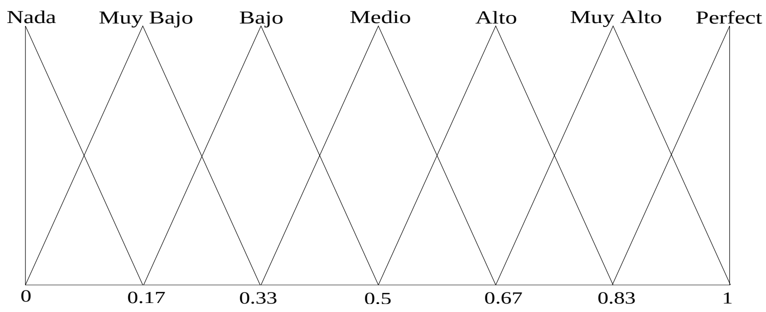

Figura 2.3: Conjunto de 7 etiquetas con su semántica asociada

El modelado lingüístico de preferencias consiste en representar las preferencias de un problema mediante etiquetas lingüísticas, para a partir de ellas resolver el problema. Este modelado se ha utilizado con éxito sobre un gran número de problemas, tales como, Toma de Decisión [9, 21, 31, 41], Evaluación [6, 28, 29], etc.

Existen distintas estructuras de representación que se utilizan en el modelado lingüístico de preferencias como, vectores de valoraciones lingüísticos y relaciones de preferencia lingüísticas [9].

2.3. Toma de Decisiones Lingüística

La Toma de Decisiones es sin duda una de las actividades fundamentales de los seres humanos, ya que frecuentemente nos estamos enfrentando a situaciones en las que existen varias alternativas y tenemos que decidir cuál es la mejor, o cuál llevar a cabo.

La Toma de Decisiones es un área que se aplica en distintos campos, tales como, militar, inversión, sistemas de recomendación, etc [8, 10, 27]. Debido a esta gran variedad de campos existen diferentes modelos de Toma de Decisión que han dado lugar a la Teoría de Decisión.

Un problema clásico de decisión tiene los siguientes elementos básicos:

1. Un conjunto de alternativas o decisiones posibles.

2. Un conjunto de estados de la naturaleza que definen el contexto en el que se plantea el problema.

3. Un conjunto de valores de utilidad en el que cada uno de ellos está asociado a un par de valores formado por una alternativa y un estado de la naturaleza.

4. Una función que establece las preferencias del experto sobre los posibles resultados.

En la Toma de Decisiones podemos encontrar distintos tipos de situaciones de decisión dependiendo del contexto en el que se vaya a desarrollar el problema de decisión:

- Ambiente de certidumbre. En esta situación se conoce con exactitud y precisión el valor de utilidad de cada alternativa.
- Ambiente de riesgo. Esta situación se produce cuando el conocimiento del que se dispone sobre las alternativas consiste en sus distribuciones de probabilidad.
- Ambiente de incertidumbre. Es la situación en la que no conocemos la probabilidad de las alternativas y la utilidad de cada una de ellas se caracteriza de forma aproximada.

La Teoría Clásica de Decisión proporciona una gran cantidad de modelos sobre las distintas situaciones de decisión, aunque no es capaz de solucionar todos los problemas de decisión como los problemas de decisión definidos bajo incertidumbre, que son en los que nosotros nos centramos en esta memoria de investigación. Los métodos clásicos se adecúan fácilmente a problemas desarrollados en ambiente de certidumbre y de riesgo. Sin embargo, en situaciones de incertidumbre donde ésta no puede modelarse de forma probabilista, los modelos de la Teoría Clásica de Decisión no son adecuados. En esta situación existen diferentes herramientas para manejar dicha incertidumbre, entre ellas el Enfoque Lingüístico Difuso, que es el que utilizaremos en esta memoria, dando lugar a problemas de Toma de Decisión Lingüística [30].

Es también importante indicar que en la Teoría de Decisión se clasifican los problemas de decisión en distintos modelos atendiendo a diferentes criterios, como pueden ser: *número de expertos* y *número de criterios*.

A pesar de los distintos problemas de decisión a los que nos podemos enfrentar, un esquema básico de resolución de este tipo de problemas fue presentado en [35], en el que dicho esquema se compone de dos fases (ver Figura 2.4):

- Fase de Agregación. Su objetivo es obtener un valor colectivo de preferencias para cada alternativa y/o criterio de representación, a partir de los valores individuales de preferencias proporcionados por los expertos que participan en el problema, utilizando un operador de agregación adecuado a las necesidades del problema.
- Fase de Explotación. La información de entrada de esta fase son los valores colectivos obtenidos en la fase anterior. Su objetivo es seleccionar la/s mejor/es alternativa/s a partir de los valores colectivos. Para

ello, se utilizan funciones de selección [32] que permiten seleccionar y ordenar las mejores alternativas a partir de vectores de utilidad o relaciones de preferencia.

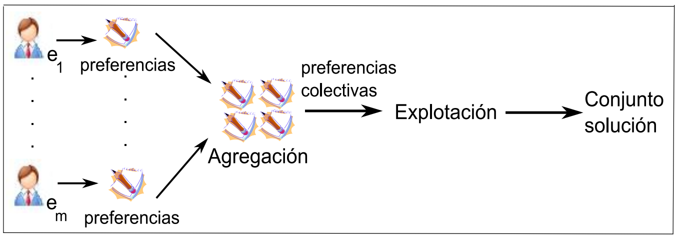

Figura 2.4: Esquema de resolución básico de un problema de Toma de Decisión

Es claro por tanto, que en los problemas de toma de decisión lingüística aparecerán procesos de computación con palabras que son en los que se centra la investigación de esta memoria.

Para clarificar las propuestas realizadas en computación con palabras de esta memoria utilizaremos ejemplos de problemas de toma de decisión multi-experto en contextos lingüísticos. A continuación presentamos un esquema formal de este tipo de problema, para entender posteriormente la notación explicada en los ejemplos de esta memoria.

Definición 12 *Un problema básico de toma de decisión multi-experto lingüístico consiste en elegir entre un conjunto de alternativas,* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *sobre el que un conjunto de expertos* $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ *expresa sus preferencias,* $\{x_i^j \in S \; i = 1, \ldots, n \text{ y } j = 1, \ldots, m\}$ *en un conjunto de términos lingüísticos,* $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$*, para seleccionar la mejor alternativa al problema. Los valores* $x_i^j \in S$*, son etiquetas lingüísticas cuya semántica serán conjuntos difusos definidos en [0,1].*

Capítulo 3

Modelos Lingüísticos Computacionales

Tal y como hemos visto en el capítulo 2, el modelado lingüístico en problemas de decisión implica la necesidad de realizar procesos de computación con palabras, es decir, el uso de técnicas computacionales que tienen definidas diferentes operaciones tales como, agregación, negación, comparación, etc., sobre información lingüística. En la literatura relacionada con el enfoque lingüístico difuso existen distintos modelos para realizar procesos de computación con palabras. Inicialmente en el enfoque lingüístico difuso se utilizaban:

- El modelo basado en el principio de extensión [3, 11]
- El modelo simbólico [12]

Estos dos modelos, denominados habitualmente *modelos clásicos*, presentan diversas limitaciones debido a su forma de operar. El modelo basado en el principio de extensión es preciso, pero difícil de interpretar, aunque puede hacerse interpretable a costa de su precisión. Sin embargo, el modelo simbólico es fácilmente interpretable, pero presenta pérdida de información en sus procesos computacionales. Estas limitaciones y la necesidad de realizar procesos de computación con palabras han provocado un interés investigador en los últimos años para superar dichas limitaciones [19, 40, 42].

En esta memoria nosotros nos centramos en las propuestas realizadas para mejorar los procesos de computación con palabras desde un punto de vista simbólico. Para ello en este capítulo hacemos una revisión de los modelos lingüísticos computacionales clásicos, para entender su funcionamiento y ver sus limitaciones operacionales. Posteriormente, y con la intención de alcanzar el primer objetivo de nuestra memoria, revisamos los modelos computacionales simbólicos más extendidos en la literatura y que fueron propuestos para mejorar la precisión de los modelos computacionales clásicos del enfoque lingüístico difuso, tales como:

- Modelo lingüístico 2-Tupla [19]
- Modelo lingüistico Virtual [42]
- Modelo lingüístico 2-Tupla proporcional [40]

Para cada uno de ellos estudiaremos su modelo de representación lingüístico y su modelo computacional.

3.1. Modelos Computacionales Clásicos

Hemos visto en el capítulo 2, que el uso del enfoque lingüístico difuso y de la información lingüística implica la realización de procesos de computación con palabras. Anteriormente hemos indicado que los dos modelos computacionales inicialmente utilizados en el enfoque lingüístico difuso para realizar dichas operaciones eran el modelo basado en el principio de extensión y el modelo simbólico.

En las siguientes subsecciones haremos una revisión del funcionamiento de ambos modelos a la hora de llevar acabo los procesos computacionales.

3.1.1. Modelo Computacional Lingüístico Basado en el Principio de Extensión

Este modelo computacional también denominado *modelo semántico*, utiliza las funciones de pertenencia asociadas a la semántica de los términos lingüísticos, para realizar las operaciones con palabras valiéndose de la aritmética difusa basada en el principio de extensión.

En el capítulo 2 hemos visto como el principio de extensión es una herramienta básica en la Teoría de Conjuntos Difusos [13, 24], que se utiliza para extender y generalizar la aritmética clásica a aritmética difusa. El uso de la aritmética difusa produce un incremento de la vaguedad en los resultados de computación con palabras, ya que los números difusos obtenidos de operar con etiquetas lingüísticas no suelen coincidir con los números difusos que representan la semántica de los términos lingüísticos iniciales.

Para entender el funcionamiento del modelo computacional lingüístico basado en el principio de extensión, mostramos un ejemplo de agregación de etiquetas en un problema de toma de decisicón lingüístico. Para ello definimos en primer lugar un operador de agregación basado en el principio de extensión.

Definición 13 *Sea μ_{y_i} una función de pertenencia triangular de la forma, $\mu_{y_i} = (a_i, b_i, c_i)$ y m el número de valores a agregar, la Media basada en el Principio de Extensión se define como:*

$$\mu_{y_i} = (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}) \tag{3.1}$$

Ejemplo 5 *Sea* $S = \{Nada(N), Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$ *el conjunto de 7 términos lingüísticos de la Figura 2.3 y sea* $y_j = (MB, M, M, B)$ *un vector de utilidad cuyos valores queremos agregar. Si utilizamos la función definida en la Eq. 3.1 obtenemos los siguientes valores:*

$\mu_{y_j} = ((.25 * (0 + .33 + .33 + .17)), (.25 * (.17 + .5 + .5 + .33)),$
$(.25 * (.33 + .67 + .67 + .5))) = (.25 * (.83, 1.5, 2.17)) = (.207, .375, .542)$

Como podemos observar, el conjunto difuso que hemos obtenido no coincide exactamente con ningún término lingüístico del conjunto de términos inicial, $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$

$N = (0, 0, .17)$	$MB = (0, .17, .33)$	$B = (.17, .33, .5)$
$M = (.33, .5, .67)$	$A = (.5, .67, .83)$	$MA = (.67, .83, 1)$
$P = (.83, 1, 1)$.		

La forma de tratar estos resultados ha sido diferente [3, 11]. En algunos casos se ha utilizado directamente los números difusos obtenidos perdiendo la representación lingüística para mantener una mayor precisión. Sin embargo, en muchas situaciones estos resultados no son aceptados por ser difíciles de entender por los expertos involucrados en el problema, por lo que se hace necesario realizar un proceso de aproximación lingüístico. Este proceso de aproximación puede realizarse de distintas formas. En el caso de un problema de toma de decisión lingüístico donde se quieren obtener los resultados expresados lingüísticamente, un esquema de aproximación basado en el Principio de Extensión es como sigue:

$$S^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathcal{R}) \xrightarrow{app_1(\cdot)} S \tag{3.2}$$

donde S^n representa el dominio de definición, $F(R)$ es el conjunto de números difusos sobre R, $\tilde{F}$ es un operador de agregación basado en el Principio de Extensión, $app_1(\cdot)$ es una función de aproximación lingüística y S es el conjunto de términos lingüísticos inicial.

Siguiendo con el ejemplo anterior, utilizaremos como función de aproximación $app_1(\cdot)$ la distancia euclídea sobre los valores de representación de los números difusos triangulares, ponderando éstos:

$$d(\mu_{s_l}, \mu_{y_j}) = \sqrt{P_1(a_l - a_j)^2 + P_2(b_l - b_j)^2 + P_3(c_l - c_j)^2} \tag{3.3}$$

representando (a_l, b_l, c_l) y (a_j, b_j, c_j) las funciones de pertenencia de "s_l" y de "y_j" respectivamente y P_1, P_2, P_3 los pesos que representan la importancia de los parámetros a, b y c. Entonces $app_1(\cdot)$ selecciona s_l^*, como etiqueta representativa del resultado obtenido, $(app_1(y_j) = s_l^*)$, tal que,

$$d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_j}) \leq d(\mu_{s_l}, \mu_{y_j}) \ \ \forall s_l \in S$$

Este proceso de aproximación lingüística lo aplicamos a los conjuntos difusos obtenidos con la media aritmética, con $P_1 = 0.2,\ P_2 = 0.6,\ P_3 = 0.2$:
$app_1(y_j) = B$,
$d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_1}) = \sqrt{.2 \cdot (.17 - .207)^2 + .6 \cdot (.33 - .375)^2 + .2 \cdot (.5 - .542)^2} = .043$

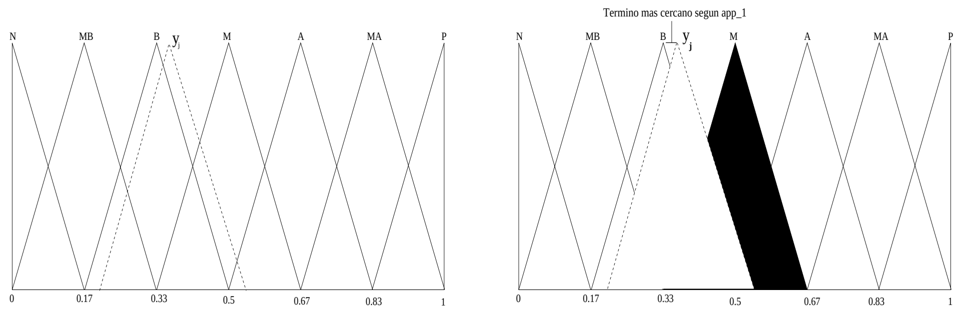

Figura 3.1: Proceso de aproximación lingüística

La Figura 3.1 muestra el proceso de aproximación lingüística para y_j. Vemos que y_j no coincide con ningún término en S, entonces el término más cercano a y_j según $app_1(\cdot)$ es obtenido de acuerdo a la siguiente expresión:
$\min\{d(\mu_{y_j}, \mu_N), d(\mu_{y_j}, \mu_{MB}), d(\mu_{y_j}, \mu_B), d(\mu_{y_j}, \mu_M), d(\mu_{y_j}, \mu_A), d(\mu_{y_j}, \mu_{MA}), d(\mu_{y_j}, \mu_P)\}$
siendo,

$$\begin{aligned} d(\mu_{y_j}, \mu_N) &= .347 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_{MB}) &= .207 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_B) &= .043 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_M) &= .125 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_A) &= .293 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_{MA}) &= .457 \\ d(\mu_{y_j}, \mu_P) &= .595 \end{aligned}$$

por tanto,

$$app_1(y_j) = B$$

ya que es la etiqueta más cercana a y_j.

En la Figura 3.1 se observa que existe una cantidad de información que se pierde durante el proceso de aproximación lingüístico. Esto se debe a que el resultado original (superficie blanca) puede tener una forma y superficie distinta al resultado final (superficie negra) y por tanto, hay que realizar una aproximación desde el resultado original al resultado final.

3.1.2. Modelo Computacional Lingüístico Simbólico

Un segundo modelo clásico del enfoque lingüístico difuso para operar con palabras es el modelo simbólico, el cual utiliza la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ donde $s_i < s_j$ si $i < j$, para llevar a cabo los procesos de computación. Con este modelo computacional los resultados intermedios de las operaciones son valores numéricos $\gamma \in [0, g]$, que no tienen ninguna interpretación semántica ni sintáctica, por lo que deben ser aproximados en cada paso del proceso computacional mediante una función de aproximación $app_2 : [0, g] \rightarrow \{0, \ldots, g\}$, que obtiene un valor numérico, el cual indica el índice del término lingüístico asociado a dicho resultado en el conjunto de términos lingüístico inicial $s_{app_2(\gamma)} \in S$.

Inicialmente Yager definió en [44] una serie de operadores para operar de forma simbólica, como, máximo, mínimo y negación que a continuación definimos.

Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y sea $s_i, s_j \in S$ dos términos lingüísticos.

Definición 14 *Máximo*
$max\ (s_i, s_j) = s_i\ si\ s_i \geq s_j$

Definición 15 *Mínimo*
$min\ (s_i, s_j) = s_j\ si\ s_j \leq s_i$

Definición 16 *Negación*
$neg\ (s_i) = s_{g-i+1}$

Además, el orden obtenido sobre las etiquetas en este modelo nos permite definir un operador de comparación de la siguiente forma:

Definición 17 *Orden*
$Si\ i < j,\ entonces\ s_i < s_j$

$Si\ j > i,\ entonces\ s_j > s_i$

$Si\ i = j,\ entonces\ s_i = s_j$

Posteriormente fueron definidos diferentes operadores de agregación como la Combinación convexa [12] y el operador LOWA [17].

A continuación vamos a realizar un ejemplo aplicando el enfoque simbólico presentado en [12]. El operador simbólico que utilizaremos para agregar variables lingüísticas es la Combinación Convexa [12] que considera un vector de pesos con suma igual a ‘ 1 ’, y actúa sobre los índices de las etiquetas, aplicando una función de redondeo al resultado final, para así obtener un valor entero siendo éste el índice de la etiqueta solución.

Definición 18 *Sea $A = \{a_1, ..., a_m\}$ un conjunto de términos lingüísticos a ser agregados, la Combinación Convexa C^m se define como:*

$$C^m\{w_k, b_k, k = 1, \ldots, m\} = w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot C^{m-1}\{\eta_h, b_h, h = 2, \ldots, m\} \tag{3.4}$$

donde $W = (w_1, \ldots, w_m)$ es un vector de pesos asociado a A, tal que, (i) $w_i \in [0, 1]$, y (ii) $\sum_i w_i = 1$; y $B = (b_1, \ldots, b_m)$ es un vector, tal que, $B = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$, con $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}\ \forall\ i \leq j$, y σ es una permutación sobre los valores a_i. $\eta_h = w_h / \Sigma_2^m w_k, h = 2, \ldots, m$.

Si m=2, entonces se define la Combinación Convexa como

$$C^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k, \quad s_j,\ s_i,\ \in\ S,\ (j \geq i)$$

con,

$$k \ = \ \text{mín}\{g, i \ + \ round(w_1 \cdot (j - i))\},$$

siendo $g + 1$ la cardinalidad de S, "*round*" el operador usual de redondeo y $b_1 = s_j,\ b_2 = s_i$.

Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j\ \forall i$, definimos la Combinación Convexa como:

$$C^m\{w_i, b_i, i = 1, \ldots, m\} = b_j.$$

Ejemplo 6 *Supongamos un ejemplo en el que se quiere agregar el vector lingüístico (A, A, M, MB), donde todos los valores tienen el mismo grado de importancia, por lo que en este caso el vector de pesos es $(.25, .25, .25, .25)$, entonces los valores agregados obtenidos serán:*

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = M$$

El proceso de cálculo con el operador Combinación Convexa es el siguiente:

$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33),$
$(A, M, MB)\}$

$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (M, MB)\}$

$C^2\{(.5, .5), (M, MB)\} = s_{k_2} = s_2 = B$

$k_2 = \text{mín}\{6, 1 + round(0.5(2))\} = 2$

$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_3 = M$

$k_3 = \text{mín}\{6, 2 + round(0.33(2))\} = 3$

$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot M = s_{k_4} = s_3 = \mathbf{M}$

$k_4 = \text{mín}\{6, 3 + round(0.25(1))\} = 3$

De forma similar al modelo semántico, el esquema de un proceso de agregación de información lingüística puede expresarse con el siguiente esquema

$$S^n \xrightarrow{C} [0,g] \xrightarrow{app_2(\cdot)} \{0,\ldots,g\} \longrightarrow S \tag{3.5}$$

donde C es un operador simbólico de agregación, $app_2(\cdot)$ es una función de aproximación utilizada para obtener un índice $\{0,\ldots,g\}$ asociado a una etiqueta en $S = \{s_0,\ldots,s_g\}$ desde un valor en $[0,g]$.

3.1.3. Limitaciones de los Modelos Clásicos

Haciendo un análisis de los modelos lingüísticos computacionales clásicos observamos:

- Si queremos obtener un resultado expresado en el dominio lingüístico de expresión inicial, hay que realizar procesos de aproximación que implican pérdida de información y precisión en los resultados. Esta pérdida de información es producida porque el modelo de representación de la información del enfoque lingüístico difuso es discreto en un dominio continuo.

- El modelo semántico puede obtener resultados precisos, pero expresados en un dominio de expresión distinto al conjunto de términos inicial y difíciles de entender.

3.2. Nuevos Modelos Computacionales Simbólicos

La necesidad de realizar procesos de computación con palabras en los problemas de Toma de Decisión Lingüística, y las limitaciones de los modelos clásicos indicados con anterioridad, han provocado en los últimos años un importante interés en el desarrollo de modelos lingüísticos computacionales que mejoran los resultados de dichos procesos [19, 40, 42]. Nosotros nos vamos a centrar en modelos computacionales simbólicos que intentan mejorar el modelo simbólico clásico del enfoque lingüístico difuso. Para ello revisaremos tres modelos computacionales lingüísticos ampliamente utilizados en la literatura, como son:

- El modelo lingüístico 2-Tupla [19]

- El modelo lingüístico Virtual [42]

- El modelo lingüístico 2-Tupla proporcional [40]

Estos modelos intentan mejorar el modelo simbólico clásico [12], fundamentalmente desde el punto de vista de incrementar la precisión de sus resultados, para lo que necesitan modificar el modelo de representación de la información lingüística. Es importante indicar que estos modelos computacionales han sido ampliamente usados en problemas que tratan con información lingüística, tales como, Toma de Decisión [22, 41], Evaluación [26], Sistemas de Recomendación [27], etc.

Dado que estos modelos simbólicos basados en el enfoque lingüístico difuso han modificado la representación lingüística para mejorar los procesos de computación con palabras, revisaremos sus modelos de representación y computación.

3.2.1. Modelo Lingüístico de 2-Tupla

Este modelo computacional fue presentado por Herrera y Martínez en [19] con el objetivo de mejorar la precisión de los procesos de computación con palabras, además de expresar de forma simbólica cualquier resultado en el universo del discurso. Este modelo se ha utilizado posteriormente de forma satisfactoria para el tratamiento de la información lingüística multigranular [20], lingüística no balanceada [16] e información heterogénea (numérica, intervalar y lingüística) [21].

Para revisar este modelo, primero estudiaremos su modelo de representación de la información lingüística y posteriormente su modelo computacional.

1. **Modelo de representación**

   El modelo de representación lingüístico de 2-Tupla se basa en el concepto de traslación simbólica.

   Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y $\beta \in [0, g]$ un valor obtenido por una operación simbólica.

   Definición 19 *La traslación simbólica de un término lingüístico* $s_i \in S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ *es un valor numérico definido en* $[-0.5, 0.5)$ *que representa la "diferencia de información" entre una cantidad de información* $\beta \in [0, g]$ *obtenida de una operación simbólica y el índice del término linguístico más cercano.*

   A partir de este concepto Herrera y Martínez desarrollaron un nuevo modelo de representación para la información lingüística, el cuál usa como base de representación una 2-tupla, (s_i, α), donde $s_i \in S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ representa la etiqueta lingüística y α es un valor numérico que representa la traslación simbólica.

   Este modelo lingüístico define un conjunto de funciones para realizar transformaciones entre valores numéricos y 2-tupla con objeto de facilitar los procesos de computación con palabras.

Definición 20 *Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. La 2-tupla asociada a S es definida como $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5)$. La función $\Delta : [0, g] \longrightarrow \langle S \rangle$ es definida mediante*

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \quad con \quad \begin{cases} i = & round\,(\beta), \\ \alpha = \beta - i, & \end{cases} \tag{3.6}$$

donde *round* es el operador de redondeo, s_i es la etiqueta con índice más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

Ejemplo 7

El funcionamiento de la función Δ que acabamos de definir puede observarse a continuación. Supongamos una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos $S = \{Nada(N), Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$ que obtiene como resultado de dicha operación un valor $\beta = 2.8$, entonces la representación de esta información mediante una 2-tupla lingüística es mostrada en la Figura 3.2.

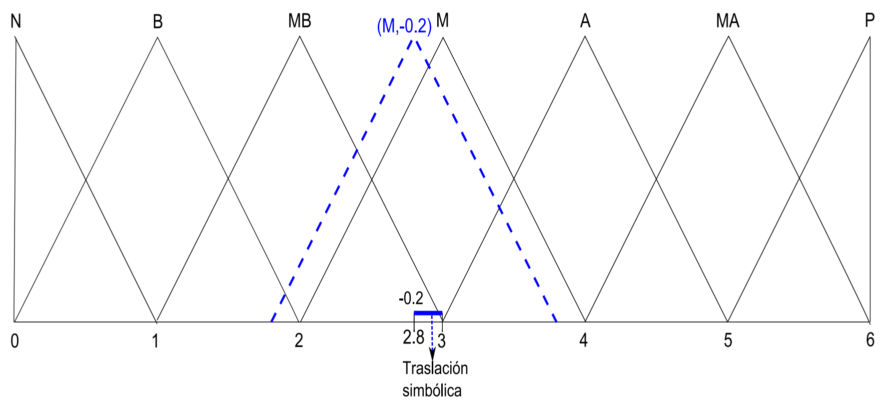

Figura 3.2: Ejemplo de una operación de Traslación Simbólica

Debemos tener en cuenta que Δ es biyectiva y $\Delta^{-1} : \langle S \rangle \longrightarrow [0, g]$ es definida mediante $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$. De esta forma la 2-tupla de $\langle S \rangle$ es identificada con el valor numérico en el intervalo [0,g].

2. **Modelo de computación**

   Junto a este modelo de representación de información lingüística, Herrera y Martínez definieron un modelo computacional lingüístico basado en las funciones de transformación Δ y Δ^{-1}. En [19] se definieron los operadores de comparación, negación y varios operadores de agregación para 2-tuplas que revisamos a continución.

Comparación de 2-Tuplas

La comparación de información lingüística representada mediante 2-tuplas se realiza según un orden lexicográfico. Sea (s_k, α_1) y (s_l, α_2) dos 2-tuplas, cada una representando una cantidad de información, entonces:

- Si $k < l$ entonces $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
- Si $k = l$ entonces
  - *a*) Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces (s_k, α_1), (s_l, α_2) representa la misma información
  - *b*) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
  - *c*) Si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces $(s_k, \alpha_1) > (s_l, \alpha_2)$

Operador de negación de una 2-Tupla

Este operador fue definido como:

$$Neg((s_i, \alpha)) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha))) \tag{3.7}$$

donde $g + 1$ es la cardinalidad de S, $S = \{s_0, ..., s_g\}$.

Agregación de 2-Tuplas

La agregación consiste en obtener un valor colectivo que exprese la información de un conjunto de valores marginales. El resultado de una operación de agregación debe ser consistente con la representación de los valores de entrada, por tanto, el resultado de la agregación de 2-tuplas debe ser una 2-tupla.

A continuación revisaremos algunos operadores de agregación sobre 2-tuplas que fueron definidos en [19], aunque posteriormente se han definido otros.

a) Media Aritmética [1]

Definición 21 *Sea $x = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numéricos para una variable x. La media aritmética $\overline{x}$ se obtiene dividiendo la suma de todos los valores por su cardinalidad, i.e.,*

$$\overline{x}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.8}$$

Este operador simboliza el concepto intuitivo de punto de equilibrio o centro del conjunto de valores. Extender este operador para tener un operador equivalente para información lingüística representada mediante 2-tuplas, se puede hacer como muestra la siguiente definición:

Definición 22 *Sea* $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas, su media aritmética se calcularía con el operador media aritmética extendida,* $\overline{x}^e$*, que es definido como,*

$$\overline{x}^e((r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i) \tag{3.9}$$

b) Media ponderada [1]
La media ponderada permite que diferentes valores x_i tengan diferente importancia. Esto se realiza asignando a cada valor x_i un peso asociado w_i, que indica cuál es la importancia de ese valor.

Definición 23 *Sea* $x = \{x_1, ..., x_n\}$ *un conjunto de valores numéricos y* $W = (w_1, ..., w_n)$ *un vector numérico con los pesos asociados a cada* x_i*, tal que,* w_1 *corresponde a* x_1 *y así sucesivamente. La media ponderada se obtiene como sigue:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{3.10}$$

Este operador fue adaptado para operar con 2-tuplas [19] de la siguiente forma:
Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas y $W = (w_1, ..., w_m)$ un vector numérico con los pesos asociados a cada 2-tupla. La media ponderada extendida $\overline{x}^e$ se define como:

$$\overline{x}^e = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}) = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}) \tag{3.11}$$

Una modificación interesante sobre este operador, $\overline{x}^e$, sería que los pesos w_i fuesen también valores lingüísticos (2-tuplas). Dicho operador fue notado como $\overline{x}_l^e$ y definido como sigue:

Definición 24 *Sea* $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas y* $W = ((w_1, \alpha_1), ..., (w_m, \alpha_m))$ *el vector de pesos lingüísticos asociado. La media ponderada extendida* $\overline{x}_l^e$ *sería:*

$$\overline{x}_l^e = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{m} \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}) = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{w_i}}), \tag{3.12}$$

donde $\beta_{w_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)$*.*

c) OWA (Ordered Weighted Aggregation)

Este operador introducido por Yager en [43] es un operador de agregación ponderado, en el cuál, los pesos no están asociados a un valor predeterminado sino que están asociados a una posición determinada.

Definición 25 *Sea $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un vector de valores numéricos y $W = (w_1, ..., w_n)$ un vector de pesos asociado, tal que, (i) $w_i \in [0, 1]$ y (ii) $\sum w_i = 1$.*
El operador OWA, F, se obtiene como:

$$F(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j, \tag{3.13}$$

donde b_j es el j-esimo mayor valor del conjunto A.

Para trabajar con 2-tuplas el operador OWA fue extendido, F^e, tal y como sigue:

Definición 26 *Sea $A = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas y $W = (w_1, ..., w_m)$ un vector de pesos asociado que satisface que (i) $w_i \in [0, 1]$ and (ii) $\sum w_i = 1$. El operador OWA extendido F^e para combinar 2-tuplas actúa como:*

$$F^e((r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \beta_j^*), \tag{3.14}$$

siendo β_j^* el j-esimo mayor valor de los $\Delta^{-1}((r_i, \alpha_i))$.

Cabe señalar que este modelo computacional es preciso cuando la representación de la semántica de las etiquetas lingüísticas se realiza con funciones triangulares [19].

3.2.2. Modelo Lingüístico Virtual

A pesar de la mejora que suponía la introducción del modelo lingüístico de 2-Tupla en la operativa con palabras, Xu presentó en [42] un nuevo modelo computacional para trabajar con el enfoque lingüístico difuso que mejoraba la precisión con respecto al modelo simbólico clásico, además de incrementar el número de leyes operacionales que se pueden aplicar a la información lingüística.

1. **Modelo de representación**

   Dado que uno de los objetivos de Xu al presentar el modelo lingüístico Virtual era aumentar las leyes operacionales que se podían aplicar a los procesos de computación con palabras, este autor definió la representación de la información lingüística de forma que extendió los valores de un conjunto de términos lingüístico discreto $S = \{s_0, ..., s_g\}$ a un conjunto de términos continuo $\bar{S} = \{s_\alpha | s_0 < s_\alpha \leq s_q, \alpha \in [-q, q]\}$, donde q es un número entero lo suficientemente grande, tal que si $s_\alpha \in S$, s_α es llamado término lingüístico *original*, y en caso contrario, $s_\alpha \in \bar{S}$ y $s_\alpha \notin S$ se denomina término lingüístico *virtual*.

Es importante señalar que aunque Xu introduce su modelo basándose en el enfoque lingüístico difuso, los términos lingüísticos virtuales no tienen ni semántica ni sintaxis alguna asignada.

Ejemplo 8 *Un ejemplo de los distintos tipos de términos de esta representación puede verse en la Figura 3.3.*

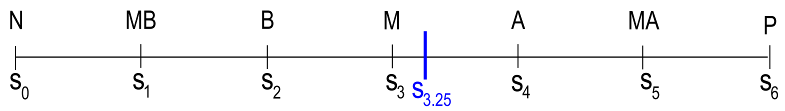

Figura 3.3: Ejemplo de representación del modelo virtual

Xu indica que normalmente los expertos utilizarán términos lingüísticos originales para dar su información, mientras que los términos virtuales aparecerán como resultados de las operaciones sobre los primeros.

2. **Modelo de computación**

Con la representación anterior y con la idea de ampliar el número de leyes operacionales en los procesos de computación con palabras y obtener resultados precisos, Xu definió el siguiente conjunto de operaciones [52, 53]:

Sea $s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$, dos términos lingüísticos y $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$.

a) $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$

b) $(s_\alpha)^{\mu_1} \otimes (s_\alpha)^{\mu_2} = (s_\alpha)^{\mu_1 + \mu_2}$

c) $(s_\alpha \otimes s_\beta)^\mu = (s_\alpha)^\mu \otimes (s_\beta)^\mu$

d) $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$

e) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$

f) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha$

g) $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$

h) $(\mu_1 + \mu_2)s_\alpha = \mu_1 s_\alpha \oplus \mu_2 s_\alpha$

i) $\mu(s_\alpha \oplus s_\beta) = \mu s_\alpha \oplus \mu s_\beta$

Ejemplo 9 *Si aplicamos dichas operaciones a un conjunto de términos,* $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ *y sea* $\mu = 0.25$ $\mu_1 = 0.3$ $\mu_2 = 0.4$*, los resultados obtenidos son los siguientes:*

a*)* $(B)^{0.25} = (s_2)^{0.25} = s_{1.19}$

b*)* $(B)^{0.3} \otimes (B)^{0.4} = (s_2)^{0.3+0.4} = (s_2)^{0.7} = s_{1.62}$

c*)* $(B \otimes MA)^{0.25} = (s_2)^{0.25} \otimes (s_5)^{0.25} = s_{1.19} \otimes s_{1.49} = s_{2.68}$

d*)* $B \otimes MA = s_2 \otimes s_5 = s_{5 \cdot 2} = s_{10}$

e*)* $B \oplus MA = s_{2+5} = s_7$

f*)* $0.25 \cdot B = s_{0.25 \cdot 2} = s_{0.5}$

g*)* $(0.3 + 0.4)B = 0.3 \cdot s_2 \oplus 0.4 \cdot s_2 = s_{0.6} \oplus s_{0.8} = s_{0.6+0.8} = s_{1.4}$

h*)* $0.25(B \oplus MA) = 0.25 \cdot s_2 \oplus 0.25 \cdot s_5 = s_{0.25 \cdot 2} \oplus s_{0.25 \cdot 5} = s_{0.5} \oplus s_{1.25} = s_{0.5+1.25} = s_{1.75}$

Como podemos observar todos los resultados obtenidos no coinciden con alguna etiqueta lingüística del conjunto de términos inicial, S, por lo que dichos resultados no tienen asignada ninguna sintaxis ni semántica.

3.2.3. Modelo Lingüístico 2-Tupla Proporcional

Este modelo fue presentado por Wang y Hao en [40] con el objetivo de extender y generalizar el modelo lingüístico 2-Tupla revisado en la Sección 3.2.1.

Al igual que hemos realizado con el modelo 2-Tupla y el modelo Virtual, primero estudiaremos su modelo de representación y a continuación su modelo computacional.

1. **Modelo de representación**

   Este modelo computacional representa la información lingüística mediante una 2-Tupla proporcional. Supongamos dos etiquetas lingüísticas A y B que representan dos posibles calificaciones de un curso académico. Si un estudiante obtiene $(0.2A, 0.8B)$, su calificación sería $20\%A$ y $80\%B$. Wang y Hao remarcan que si B fuese usada como la calificación aproximada, entonces se perdería información. Este enfoque de 2-Tupla proporcional, está basado en el concepto de *proporción simbólica* [40].

Definición 27 *Sea* $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ *un conjunto de términos ordinales,* $I = [0, 1]$ *y*

$$IS \equiv I \times S = \{(\alpha, s_i) : \alpha \in [0,1] \text{ y } i = 0, 1, \ldots, g\} \quad (3.15)$$

donde S es el conjunto ordenado de $g+1$ términos ordinales $\{s_0, ..., s_g\}$. Dado un par (s_i, s_{i+1}) de dos términos ordinales sucesivos de S, cualquiera dos elementos de (α, s_i), (β, s_{i+1}) de IS es denominado par de proporción simbólica y α, β son denominados pares de proporción simbólicos del par (s_i, s_{i+1}) siendo $\alpha + \beta = 1$. Un par de proporción simbólica (α, s_i), $(1-\alpha, s_{i+1})$ es representado por $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})$ y el conjunto de todos los pares de proporciones simbólicas es representado mediante $\overline{S}$, tal que, $\overline{S} = \{(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) : \alpha \in [0,1],\ i = 0, 1, \ldots, g-1\}$.

$\overline{S}$ es denominado el *conjunto ordinal 2-Tupla proporcional* generado por S y los miembros de $\overline{S}$, *2-Tupla proporcional ordinal*, el cual es usado para representar la información ordinal en computación con palabras.

De forma similar a las funciones que Herrera y Martínez definieron en [19], Wang y Hao definieron funciones para facilitar las operaciones con este tipo de representación.

Definición 28 *Sea $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos ordinales y $\overline{S}$ el conjunto 2-Tupla proporcional ordinal generado por S. La función $\pi : \overline{S} \to [0, g]$ fue definida como sigue:*

$$\pi((\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})) = i + (1-\alpha), \quad (3.16)$$

donde $i = \{0, 1, \ldots, g-1\}, \alpha \in [0,1]$ y π es la posición de la función índice de la 2-tupla ordinal.

Cabe destacar que la función π es biyectiva, $\overline{S} \to [0, g]$ y su inversa $\pi^{-1} : [0, g] \to \overline{S}$ es definida como sigue:

$$\pi^{-1}(x) = ((1-\beta)s_i, \beta s_{i+1}) \quad (3.17)$$

donde $i = E(x)$, E es la parte entera de la función y $\beta = x - i$.

Debemos destacar que la 2-Tupla proporcinal no puede se representada gráficamente ya que sus autores no dejan claro si la proporción simbólica se refiere al soporte, superficie o α-corte de las etiquetas lingüísticas.

2. **Modelo de computación**

Junto a este modelo de representación de información lingüística, Wang y Hao presentaron un modelo computacional lingüístico que al igual que el modelo computacional del modelo 2-Tupla [19] tiene definidos los siguientes operadores:

Comparación de 2-Tupla proporcional

Para cualquier $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1}) \in \overline{S}$, se define $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1}) \Leftrightarrow \alpha i + (1-\alpha)(i+1) < \beta j + (1-\beta)(j+1) \Leftrightarrow i + (1-\alpha) < j + (1-\beta)$.
De esta forma, para cualquier dos 2-tupla proporcionales $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})$ y $(\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$:

- Si $i < j$, entonces
  - *a*) $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$ son iguales cuando $i = j-1$ y $\alpha = 0, \beta = 1$
  - *b*) $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$ en otro caso,
- Si $i = j$, entonces
  - *a*) Si $\alpha = \beta$ entonces $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$ representan la misma información
  - *b*) Si $\alpha < \beta$ entonces $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$
  - *c*) Si $\alpha > \beta$ entonces $(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1}) > (\beta s_j, (1-\beta)s_{j+1})$

Operador de negación de una 2-Tupla proporcional

Este operador fue definido de la siguiente forma:

$$Neg((\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})) = ((1-\alpha)s_{g-i-1}, \alpha s_{g-i}) \tag{3.18}$$

siendo $g+1$ la cardinalidad de S.

Agregación de 2-Tupla proporcional

De forma análoga a Herrera y Martínez, Wang y Hao definieron varios operadores de agregación para realizar procesos de computación con palabras. Las definiciones de estos operadores están basados en valores característicos de las etiquetas lingüísticas [40].

Capítulo 4

Estudio Comparativo entre Modelos Computacionales Simbólicos

Para completar el primer objetivo que nos planteamos en esta memoria de investigación, en este capítulo vamos a realizar un análisis comparativo de los distintos modelos computacionales simbólicos revisados en el capítulo anterior, con la intención de analizar las características de cada una de ellos:

- Tipo de representación de la información
- Tipo de modelo computacional (numérico o difuso)
- Precisión
- Interpretabilidad

Para llevar a cabo este análisis comparativo, en primer lugar definimos un problema de Toma de Decisión Lingüístico que resolveremos de forma similar utilizando cada uno de los modelos simbólicos indicados, y a partir de los resultados obtenidos haremos un análisis comparativo.

4.1. Problema de Toma de Decisión Lingüístico

Supongamos que una pequeña empresa quiere renovar los ordenadores de sus empleados de ventas, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, que no son expertos en informática. Para ello se les solicita su opinión sobre cuál de las distintas alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ se adapta mejor a sus necesidades. El conjunto de alternativas X es el siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4
PC	$Portatil$	$Netbook$	$Imac$

Dado que los empleados no son expertos en informática, sus preferencias tienen cierta incertidumbre debido a su falta de conocimiento. Por lo que expresan sus preferencias mediante valoraciones lingüísticas definidas en el siguiente conjunto de términos lingüísticos: $S = \{Nada(N), Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$, y cuya semántica es mostrada en la Figura 2.3.

Cada empleado proporciona un vector de preferencias lingüísticas que se recoge en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Vectores de preferencia de los expertos

		alternativas			
	μ_{ij}	x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	e_1	B	M	M	B
	e_2	M	B	MB	A
	e_3	A	MB	M	M
	e_4	A	A	B	B

Para resolver este problema utilizaremos el esquema de resolución de la Figura 2.4 que consta de dos fases, la fase de agregación y la fase de explotación. En sendos modelos computacionales utilizaremos en el proceso de agregación el operador de la media aritmética, y en el proceso de explotación seleccionaremos la alternativa con mayor valoración global.

4.1.1. Solución basada en el Modelo 2-Tupla

Para resolver el problema de toma de decisión con este enfoque, primero pasamos las valoraciones lingüísticas proporcionadas por los expertos a 2-tupla (ver Tabla 4.2).

Tabla 4.2: Vectores de preferencia transformados a 2-tupla

		alternativas			
	μ_{ij}	x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	e_1	$(B,0)$	$(M,0)$	$(M,0)$	$(B,0)$
	e_2	$(M,0)$	$(B,0)$	$(MB,0)$	$(A,0)$
	e_3	$(A,0)$	$(MB,0)$	$(M,0)$	$(M,0)$
	e_4	$(A,0)$	$(A,0)$	$(B,0)$	$(B,0)$

Una vez que tenemos las valoraciones transformadas a 2-tupla, utilizamos el operador de agregación de la media aritmética definida en el capítulo 3, definición 22, y obtenemos los siguientes resultados:

$\bar{x}_e^1 = \Delta(\frac{1}{4}(2+3+4+4)) = \Delta(\frac{13}{4}) = \Delta(3.25) = (Medio, .25)$

$\bar{x}_e^2 = \Delta(\frac{1}{4}(3+2+1+4)) = \Delta(\frac{10}{4}) = \Delta(2.5) = (Medio, -.5)$

$\bar{x}_e^3 = \Delta(\frac{1}{4}(3+1+3+2)) = \Delta(\frac{9}{4}) = \Delta(2.25) = (Bajo, .25)$

$\bar{x}_e^4 = \Delta(\frac{1}{4}(2+4+3+2)) = \Delta(\frac{11}{4}) = \Delta(2.75) = (Medio, -.25)$

En la Figura 4.1 se muestra la semántica de los resultados del modelo 2-Tupla.

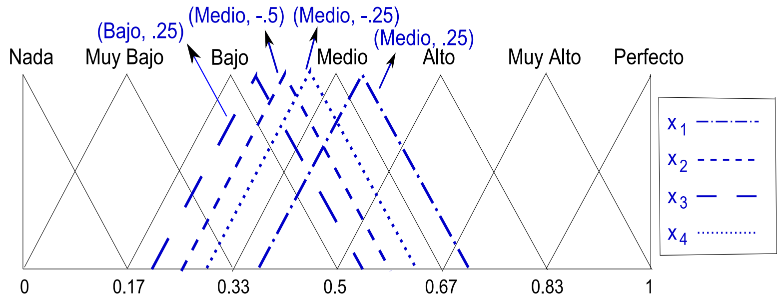

Figura 4.1: Resultados del modelo 2-Tupla para el problema de TDL

4.1.2. Solución basada en el Modelo Virtual

Al igual que hemos realizado con el modelo 2-Tupla, vamos a resolver el problema de toma de decisión con el modelo Virtual. Para ello agregamos las preferencias utilizando la media aritmética definida por Xu (ver Eq. 4.1).

$$\overline{x}^e = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} = \frac{1}{n} s_{\sum_{i=1}^n i} \tag{4.1}$$

Y obtenemos los siguientes valores colectivos:

$\overline{x_1} = \frac{1}{4}(B+M+A+A) = \frac{1}{4}s_{(2+3+4+4)} = \frac{1}{4}s_{13} = s_{3.25}$

$\overline{x_2} = \frac{1}{4}(M+B+MB+A) = \frac{1}{4}s_{(3+2+1+4)} = \frac{1}{4}s_{10} = s_{2.5}$

$\overline{x_3} = \frac{1}{4}(M+MB+M+B) = \frac{1}{4}s_{(3+1+3+2)} = \frac{1}{4}s_{9} = s_{2.25}$

$\overline{x_4} = \frac{1}{4}(B+A+M+B) = \frac{1}{4}s_{(2+4+3+2)} = \frac{1}{4}s_{11} = s_{2.75}$

Con este modelo no es posible realizar una representación análoga a la mostrada con el modelo 2-Tupla en la Figura 4.1, ya que sus resultados no tienen asignada ninguna semántica ni sintaxis.

4.1.3. Solución basada en el Modelo 2-Tupla Proporcional

Para resolver el problema de toma de decisión con este modelo, primero tenemos que transformar los valores lingüísticos a 2-Tupla proporcional como muestra la Tabla 4.3, y a continuación aplicar la media aritmética definida por Wang y Hao (ver Eq. 4.2) para obtener las preferencias colectivas.

$$\begin{aligned}\overline{x} = \pi^{-1}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\pi(\alpha s_i, (1-\alpha)s_{i+1})) = \\ = \pi^{-1}(\frac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(i+(1-\alpha))\end{aligned} \tag{4.2}$$

Tabla 4.3: Vectores de preferencia transformados a 2-tupla proporcional

		alternativas			
	μ_{ij}	x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	e_1	$(1B, 0M)$	$(1M, 0A)$	$(1M, 0A)$	$(1B, 0M)$
	e_2	$(1M, 0A)$	$(1B, 0M)$	$(1MB, 0B)$	$(1A, 0MA)$
	e_3	$(1A, 0MA)$	$(1MB, 0B)$	$(1M, 0A)$	$(1M, 0A)$
	e_4	$(1A, 0MA)$	$(1A, 0MA)$	$(1B, 0M)$	$(1B, 0M)$

$\overline{x} = \pi^{-1}(\frac{1}{4}(\pi(1B, 0M) + \pi(1M, 0A) + \pi(1A, 0MA) + \pi(1A, 0MA))) =$
$= \pi^{-1}(\frac{1}{4}(2+3+4+4)) = \pi^{-1}(3.25) = ((1-0.25)M, 0.25A) = (0.75M, 0.25A)$

$\overline{x} = \pi^{-1}(\frac{1}{4}(\pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M) + \pi(1MB, 0B) + \pi(1A, 0MA))) =$
$= \pi^{-1}(\frac{1}{4}(3+2+1+4)) = \pi^{-1}(2.5) = ((1-0.5)B, 0.5M) = (0.5B, 0.5M)$

$\overline{x} = \pi^{-1}(\frac{1}{4}(\pi(1M, 0A) + \pi(1MB, 0B) + \pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M))) =$
$= \pi^{-1}(\frac{1}{4}(3+1+3+2)) = \pi^{-1}(2.25) = ((1-0.25)B, 0.25M) = (0.75B, 0.25M)$

$\overline{x} = \pi^{-1}(\frac{1}{4}(\pi(1B, 0M) + \pi(1A, 0MA) + \pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M))) =$
$= \pi^{-1}(\frac{1}{4}(2+4+3+2)) = \pi^{-1}(2.75) = ((1-0.75)B, 0.75M) = (0.25B, 0.75M)$

En este modelo tampoco podemos representar la semántica de los resultados obtenidos como hemos realizado con el modelo 2-Tupla.

En la Tabla 4.4 podemos observar que los tres modelos obtienen como solución al problema la misma alternativa $x_1 = PC$, sin embargo existen pequeñas diferencias en algunas características de estos enfoques. A continuación realizaremos un análisis comparativo de los distintos resultados obtenidos, centrándonos en las siguientes características:

- Tipo de representación de la información, (TRI)
- Tipo de modelo computacional: numérico o difuso, (TMC)
- Precisión
- Interpretabilidad

4.2. Estudio Comparativo

Para terminar de alcanzar el primer objetivo de esta memoria, en esta sección vamos a realizar un análisis de los modelos computacionales simbólicos revisados en el capítulo anterior y aplicados al problema de toma de

Tabla 4.4: Resolución del problema de TDL con distintos modelos simbólicos

	2-Tupla	Ling. Virtual	2-Tupla Prop
$\overline{x}_1^e$	$(\mathbf{M}, \mathbf{.25})$	$(\mathbf{s_{3.25}})$	$(\mathbf{0.75M}, \mathbf{0.25A})$
$\overline{x}_2^e$	$(M, -.5)$	$(s_{2.5})$	$(0.5B, 0.5M)$
$\overline{x}_3^e$	$(B, .25)$	$(s_{2.25})$	$(0.75B, 0.25M)$
$\overline{x}_4^e$	$(M, -.25)$	$(s_{2.75})$	$(0.25B, 0.75M)$

decisión lingüístico definido al principio de este capítulo, además de estudiar si se adecúan al enfoque lingüístico difuso.

En la Tabla 4.5 se muestra un análisis comparativo basado en los resultados obtenidos en el problema de toma de decisión lingüístico, centrándonos básicamente en cuatro características que pasamos a ver más detalladamente:

Tabla 4.5: Análisis comparativo de modelos simbólicos

	2-Tupla	Lingüístico Virtual	2-Tupla Prop.
TRI	Difusa	No difusa	No difusa
TMC	Lingüístico	No lingüístico	Lingüístico
Precisión	Etiq. equidistantes	Siempre, no semántica	Misma amplitud
Interpretab.	Fácil de entender	Útil en ordenaciones	Comprensible

- **Tipo de representación de la información**
  - Para representar la información, el modelo 2-Tupla [19] mantiene una representación difusa de la información lingüística, ya que como podemos observar en la Figura 4.1, los resultados tienen asignados una sintaxis y una semántica tal y como define el Enfoque Lingüístico Difuso.
  - El modelo Virtual [42] obtiene un resultado numérico que no tiene asignado ni sintaxis ni semántica, por lo que no mantiene la base en el Enfoque Lingüístico Difuso [26, 37, 46].
  - El modelo 2-Tupla proporcional [40] tampoco mantiene una representación difusa, ya que utiliza la proporción de dos etiquetas lingüísticas consecutivas para representar el resultado.
- **Tipo de modelo computacional**

  Con el modelo computacional queremos ver la representación de las operaciones de cada uno de los modelos.

- El modelo 2-Tupla presenta operaciones simbólicas y funciones de transformación cuyos resultados tienen asignada una sintaxis y una semántica.
- Sin embargo, el modelo Virtual presenta operaciones cuyos resultados son valores numéricos que pueden estar fuera del universo del discurso, por lo que no pueden ser representados lingüísticamente, ya que no tienen asignada ninguna semántica ni sintaxis.
- El modelo 2-Tupla proporcional también propone operaciones simbólicas y funciones de transformación como el modelo 2-Tupla, sin embargo sus resultados sólo tienen asignada una sintaxis, porque su semántica no está claramente definida.

- **Precisión**

  Con la precisión estudiamos la pérdida de información de los resultados de las operaciones en los procesos de computación con palabras

  - El modelo 2-Tupla sólo puede obtener valores dentro del universo del discurso de la variable, y garantiza precisión cuando el conjunto de etiquetas es simétrico y uniformemente distribuido [19].
  - El modelo Virtual [40] es preciso en cualquier conjunto de etiquetas, ya que no utiliza semántica alguna, además de poder obtener valores fuera del universo del discurso de la variable lingüística.
  - Al igual que el modelo 2-Tupla, el modelo 2-Tupla proporcional sólo puede obtener valores dentro del universo del discurso, y garantiza la precisión cuando el soporte de todas las etiquetas es el mismo [46].

- **Interpretabilidad**

  - El modelo 2-Tupla ofrece resultados cualitativos fáciles de entender.
  - Sin embargo, el modelo Virtual obtiene valores pseudo-lingüísticos difíciles de entender porque al no tener ni sintaxis ni semántica, su única utilidad es la ordenación.
  - El modelo 2-Tupla proporcional es algo más complejo que el modelo 2-Tupla, ya que utiliza cuatro valores para representar una única valoración.

De este análisis destacamos que el modelo computacional del modelo 2-Tupla, es el único modelo basado en el Enfoque Lingüístico Difuso, ya que mantiene una sintaxis y una semántica difusa al representar y operar con términos lingüísticos. Por lo que es apropiado para el tratamiento de la incertidumbre, y cercano al modelo cognitivo de los humanos. Mientras que los modelos Virtual y 2-Tupla proporcional no son modelos simbólicos tal y como definen sus autores en [40, 42], porque no mantienen la base del Enfoque Lingüístico Difuso. Sin embargo, a pesar de que el modelo 2-Tupla es preciso en los procesos de computación con palabras, siguen existiendo limitaciones en los procesos operacionales, ya que no es posible realizar el conjunto de operaciones aritméticas de forma simbólica.

Capítulo 5

Modelo Computacional Simbólico Híbrido basado en la Representación $\delta - \alpha$

En los capítulos 3 y 4 hemos revisado, analizado y comparado distintos modelos computacionales simbólicos que trataban de mejorar la precisión de los procesos de computación con palabras y aumentar el conjunto de operaciones simbólicas que podemos llevar a cabo de forma simbólica con información lingüística. Del análisis comparativo del capítulo anterior, se deduce que se han producido avances importantes desde el punto de vista de la precisión en los modelos computacionales simbólicos. Sin embargo, el conjunto de operaciones aritméticas que se pueden aplicar de forma simbólica a la información lingüística difusa sigue siendo un punto débil, ya que no existen modelos simbólicos adecuados que mantengan la base del enfoque lingüístico difuso para aumentar el conjunto de leyes operacionales. Por tanto, en este capítulo y con la intención de alcanzar el segundo objetivo que nos planteamos en nuestra memoria, vamos a presentar una propuesta inicial de un modelo computacional simbólico que nos permita aumentar las leyes operacionales sobre información lingüística. Esta propuesta analizará los problemas existentes para poder representar lingüísticamente los resultados de algunas operaciones, y propondrá un modelo de representación que permitirá modelarlos lingüísticamente. Sobre este modelo de representación se desarrollará un modelo computacional que denominamos *híbrido*, porque operará como el modelo computacional basado en el principio de extensión [11], y luego transformará los números difusos obtenidos a una representación simbólica ordenada de 2-tupla extendida, denominada *representación $\delta - \alpha$*, pero sin realizar procesos de aproximación que impliquen pérdida de información.

5.1. Operadores Lingüísticos Simbólicos

En el capítulo 4 vimos algunas características de modelos computacionales simbólicos, y aunque todos ellos intentan realizar procesos de computación con palabras sin pérdida de información, el único que mantiene el enfoque lingüístico difuso es el modelo 2-Tupla. A pesar de que este modelo opera con palabras de forma precisa y sin pérdida de información, no permite realizar el conjunto de operaciones aritméticas. Por tanto, nuestro interés investigador se centra en superar estas limitaciones computacionales.

Delgado et al. en [12] presentaron una propuesta con las operaciones de la suma, resta y multiplicación (por un número real positivo), en la que operaban mediante números difusos y expresaban los resultados de dichas operaciones de forma simbólica. Sin embargo, para expresar dicho resultado, realizaban un proceso de aproximación a la etiqueta lingüística más cercana, perdiendo de esta forma precisión en los resultados.

Teniendo esto en cuenta, y con vistas a alcanzar el segundo objetivo de esta memoria de investigación, presentar un modelo computacional simbólico que aumente la operatividad aritmética sobre información lingüística, en la siguiente sección vamos a presentar una propuesta inicial de un nuevo modelo de representación lingüístico, que facilite aumentar las leyes operacionales en procesos de computación con palabras desde un punto de vista simbólico.

5.2. Modelo $\delta - \alpha$ de Representación Lingüística

Cuando realizamos operaciones aritméticas con números difusos, puede suceder que los resultados obtenidos estén fuera del universo del discurso [13, 24]. En el siguiente ejemplo vemos este problema de forma detallada:

Ejemplo 10 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos definidos en el universo del discurso [0,1], y sea $Bajo + Medio$ la suma que deseamos realizar cuyo resultado es representado con el número difuso $\tilde{s_r}$ (ver Figura 5.1).*

$$\tilde{s_r} = Bajo + Medio = (0, 0.25, 0.5) + (0.25, 0.5, 0.75) = (0.25, 0.75, 1.25)$$

Para solventar este problema introducimos un modelo de representación de información lingüística que define un nuevo universo del discurso en el que podemos representar y extender los resultados obtenidos. Este nuevo universo del discurso representado mediante el parámetro δ, es un valor numérico.

En el capítulo 4 vimos que de los tres modelos simbólicos revisados, el modelo 2-Tupla era el modelo con mejores características, ya que era el único que estaba basado en el enfoque lingüístico difuso y realizaba operaciones computacionales de forma precisa y sin pérdida de información. Sus resultados son fácilmente entendibles, por lo que con la intención de alcanzar

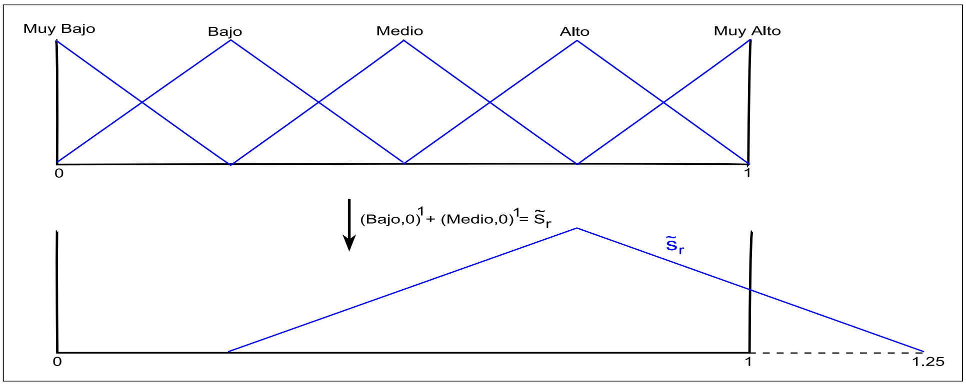

Figura 5.1: Representación del resultado fuera del universo de discurso

nuestro objetivo de representar la información lingüística con un parámetro que indique el universo del discurso, vamos a extender la representación de 2-Tupla a una representación lingüística $\delta - \alpha$, que incluye el parámetro δ que indica el valor máximo del universo del discurso. La definición de la representación lingüística $\delta - \alpha$ será la siguiente:

Definición 29 *Sea s_i una etiqueta lingüística en el conjunto de términos lingüísticos S, α su traslación simbólica en el sentido presentado en [19], y δ el valor máximo del universo del discurso U en el que se define el conjunto de etiquetas S, entonces una valoración lingüística $\delta - \alpha$ se representa como:*

$$(s_i, \alpha)^\delta$$

Sin pérdida de generalidad el valor mínimo del universo del discurso es 0.

En la Figura 5.2 podemos ver la representación lingüística de dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$ con distinto dominio definidas en un conjunto de términos lingüísticos S.

Debemos indicar que dos valoraciones $\delta - \alpha$ con el mismo δ son equivalentes a la representación en 2-Tupla, por ejemplo:

$(Bajo, 0)^2$ y $(Medio, .3)^2 \equiv (Bajo, 0)$ y $(Medio, .3)$

Esto nos permite utilizar y extender los modelos y operadores definidos para 2-Tupla en la representación $\delta - \alpha$. Por tanto, de forma equivalente a la 2-Tupla, definimos las funciones Δ_δ y Δ_δ^{-1} análogas a Δ y Δ^{-1}.

Definición 30 *Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. La $\delta - \alpha$ asociada a S es definida como $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5)$. La función $\Delta_\delta : [0, g] \longrightarrow \langle S \rangle$ es dada mediante*

$$\Delta_\delta(\beta) = (s_i, \alpha)^\delta, \quad con \quad \begin{cases} i = & round\,(\beta), \\ \alpha = \beta - i, \end{cases} \tag{5.1}$$

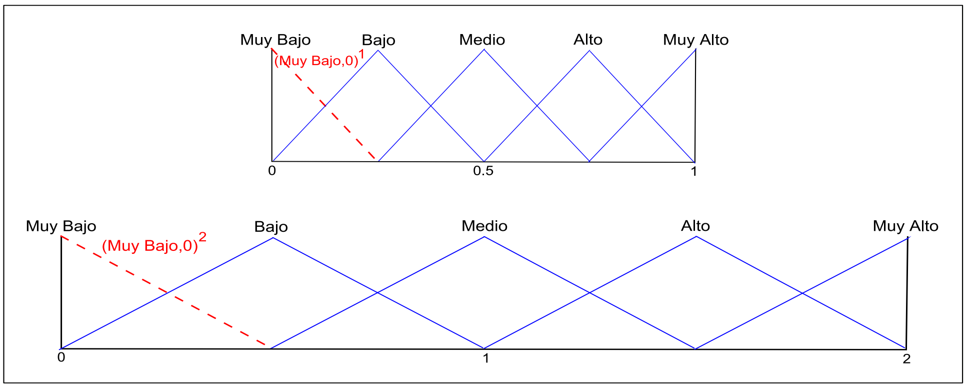

Figura 5.2: Representación lingüística de dos valoracions $\delta - \alpha$ en S

donde "round" es el operador de redondeo, s_i es la etiqueta con índice más cercano a β, α es el valor de la traslación simbólica y δ es el universo del discurso en el que está valorada la variable lingüística.

Al igual que Δ en la 2-Tupla, Δ_δ es biyectiva y $\Delta_\delta^{-1} : \langle S \rangle \longrightarrow [0, g]$ es definida mediante $\Delta_\delta^{-1}(s_i, \alpha)^\delta = i + \alpha$. De esta forma una valoración $\delta - \alpha$ de $\langle S \rangle$ es identificada con el valor numérico en el intervalo [0,g] independientemente del universo del discurso en el que esté valorada la variable lingüística.

5.3. Modelo Computacional

Basándonos en el modelo de representación presentado previamente, vamos a definir una serie de leyes operacionales para trabajar simbólicamente con información lingüística, manteniendo la sintaxis y la semántica según el enfoque lingüístico difuso.

Las leyes operacionales que vamos a presentar son:

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Comparación de valoraciones $\delta - \alpha$

Antes de presentar cada operación, vamos a introducir el esquema básico operacional que nos va a permitir alcanzar el objetivo que perseguimos y luego lo particularizaremos para cada operador.

5.3.1. Esquema Básico

Para superar los problemas anteriores y poder realizar estas operaciones sobre información lingüística, así como representar los resultados aunque estén en un nuevo universo del discurso, δ', utilizaremos la representación $\delta - \alpha$ y seguiremos los pasos del siguiente esquema operacional (ver Figura 5.3):

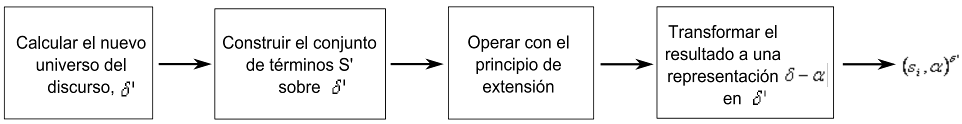

Figura 5.3: Esquema básico operacional

- *Calcular el universo del discurso de los resultados*: en primer lugar calculamos el valor δ', es decir, el universo del discurso en el que estarán representados los resultados de la operación realizada sobre las etiquetas lingüísticas:

$$\delta' = U' \tag{5.2}$$

  donde U' es el nuevo universo del discurso y su cálculo dependerá de cada operador (suma, resta, multiplicación y división).

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'*: una vez que conocemos el nuevo universo del discurso en el que se expresarán los resultados, construimos el conjunto de términos lingüísticos, S', sobre el que se representarán dichos resultados. Si los operandos lingüísticos están definidos en un conjunto S sobre el universo U, los términos lingüísticos del conjunto S' serán equivalentes a S, pero en el nuevo universo U'.

  Ejemplo 11 *Supongamos un conjunto de términos lingüísticos S definido en el universo del discurso inicial U=[0,1], si los resultados de las operaciones se encuentran definidos en el universo del discurso U'=[0,2], el conjunto de términos de S' es como se muestra en la Figura 5.4.*

- *Operar con el principio de extensión*: una vez construido S' sobre δ', se realizarán los procesos computacionales basados en el principio de extensión según la operación que vayamos a realizar [13], $\tilde{s_r} = \tilde{s_i}\ op\ \tilde{s_j}$ donde $\tilde{s_r}, \tilde{s_i}, \tilde{s_j}$ son números difusos, $\tilde{s_r}$ definido en δ'; $\tilde{s_i}, \tilde{s_j}$ definidos

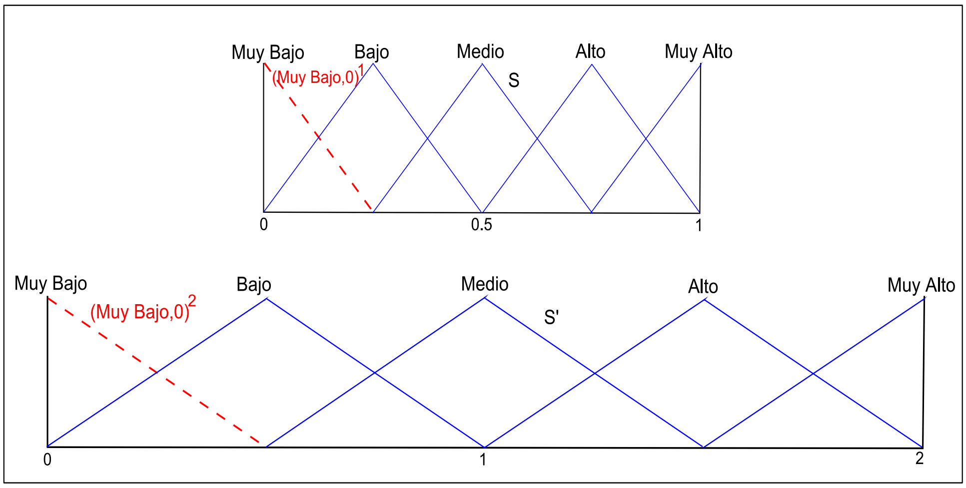

Figura 5.4: Ejemplo de un conjunto de términos S' sobre δ'

en S, y *op* es un operador aritmético. Dado que $\tilde{s_r}$ puede estar fuera del universo del discurso inicial, debemos representar $\tilde{s_r}$ linguística-mente en el nuevo universo del discurso, δ', transformándolo en una representación $\delta - \alpha$.

- *Representación mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$*: en este paso se busca representar los resultados, $\tilde{s_r}$, obtenidos en la fase anterior, en el universo $\delta' = U'$ mediante una representación $\delta - \alpha$. Para evitar los problemas de comprensión de los resultados, esta transformación se realiza como se indica a continuación:

  - En primer lugar transformamos los resultados, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' mediante un proceso de emparejamiento (matching) utilizando la siguiente función:

$$\begin{aligned} \tau_{\tilde{s_r}S'} &: \tilde{s_r} \rightarrow F(S') \\ \tau_{\tilde{s_r}S'} &= (s'_k, \gamma_k)/k \in \{0, \ldots, g\} \\ \gamma_k &= max_y min\{\mu_{\tilde{s_r}}(y), \mu_{s'_k}(y)\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

    donde $F(S')$ es el conjunto de términos difuso definido en S', y $\mu_{\tilde{s_r}}(\cdot)$ y $\mu_{s'_k}(\cdot)$ son las funciones de pertenencia de los conjuntos asociados con los términos $\tilde{s_r}$ y s'_k.

    Sea un conjunto de términos lingüísticos S', y sea $\tilde{s_r}$ el número difuso de una operación aritmética cualquiera, los valores $\tau_{\tilde{s_r}S'}$ se obtienen del emparejamiento entre $\tilde{s_r}$ y los términos de S', (ver la Figura 5.5).

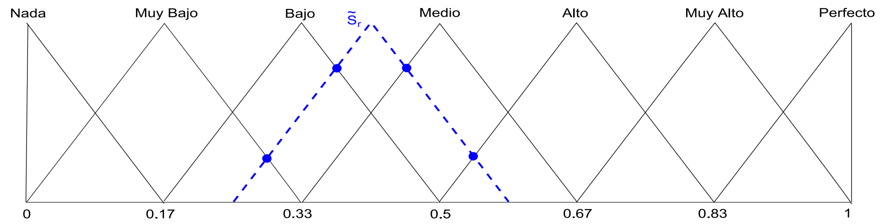

Figura 5.5: Emparejamiento entre $\tilde{s_r}$ en S'

- Una vez obtenido el conjunto difuso $\tau_{\tilde{s_r}S'}$, que representa $\tilde{s_r}$ en S', transformamos dicho conjunto difuso a una representación $\delta - \alpha$ calculando su valor central con la siguiente ecuación:

$$vc(\tau_{\tilde{s_r}S'}) = \frac{\sum_{h=0}^{g} index(s_h) * \gamma_h}{\sum_{h=0}^{g} \gamma_h} \tag{5.4}$$

  donde $index(s_h)$ es el índice del término lingüístico y γ_h es el grado de pertenencia de $\tilde{s_r}$ en $s_h \in S'$.

- El valor $vc(\tau_{\tilde{s_r}S'})$, es un valor numérico en el intervalo de granularidad S', que transformamos a un valor lingüístico $\delta - \alpha$ utilizando la función $\Delta_{\delta'}$:

$$\Delta_{\delta'}(vc(\tau_{\tilde{s_r}S'})) = (s_i, \alpha)^{\delta'} \quad s_i \in S'$$

A continuación vamos a mostrar el funcionamiento de cada una de las operaciones aritméticas basadas en el esquema anterior.

Debemos indicar que al ser esta una propuesta inicial, sin pérdida de generalidad vamos a proponer las operaciones aritméticas sobre etiquetas lingüísticas definidas en el intervalo $[0, 1]$. En trabajos futuros estudiaremos el comportamiento y propiedades en otros universos de discurso y realizaremos operaciones con valoraciones de distintos δ.

5.3.2. Suma Simbólica

Supongamos un conjunto de etiquetas $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$, (ver Figura 5.1). Para llevar a cabo la operación de la suma y de acuerdo al esquema anterior, el proceso será el siguiente:

- *Calcular el universo del discurso del resultado*: como mencionamos anteriormente, la forma de calcular el nuevo universo del discurso, dependerá de la operación en concreto. Para la operación de la suma, $\tilde{s_r} = (s_{i_1}, \alpha)^{\delta_1} + \ldots + (s_{i_m}, \alpha)^{\delta_m}$, el nuevo universo del discurso será la suma del universo de discurso de las valoraciones $\delta - \alpha$ que vamos a sumar, es decir,

$$\delta' = \sum_{i=1}^{m} \delta_i$$

donde m es el número de sumandos $\delta - \alpha$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'*
- *Operar con el principio de extensión*: una vez construido S' sobre δ', se realiza la operación de la suma de la siguiente forma:

  Sea $\tilde{s_i}$ y $\tilde{s_j}$ dos números difusos definidos en el conjunto de términos lingüísticos S:

  $\tilde{s_r} = \tilde{s_i} + \tilde{s_j} = (a_i, b_i, c_i) + (a_j, b_j, c_j) = (a_i + a_j, b_i + b_j, c_i + c_j)$
- *Representación mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$*: el resultado de la operación de la suma, $\tilde{s_r}$, es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$ como sigue:
  - Primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' mediante un proceso de emparejamiento (matching) utilizando la Ecuación 5.3.
  - Una vez obtenido el conjunto difuso $\tau_{\tilde{s_r}S'}$, que representa $\tilde{s_r}$ en S', transformamos dicho conjunto difuso a un valor numérico en el intervalo de granularidad de S', calculando el valor central con la Ecuación 5.4.
  - El valor $vc(\tau_{\tilde{s_r}S'})$, es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$ utilizando la función $\Delta_{\delta'}$.

A continuación resolvemos un ejemplo paso a paso.

Ejemplo 12 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y sea $(Bajo, 0)^1 + (Medio, 0)^1$ la suma que deseamos realizar cuyo resultado será representado con el número difuso $\tilde{s_r}$ (ver Figura 5.1).*

- *Calcular el universo del discurso del resultado:*

$$\delta' = \delta_1 + \delta_2 = 1 + 1 = 2$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ' como se muestra en la Figura 5.6.*
- *Operar con el principio de extensión: en la Figura 5.7 podemos observar el resultado obtenido de sumar $(Bajo, 0)^1 + (Medio, 0)^1$ representado en el nuevo universo del discurso U'.*

  $\tilde{s_r} = Bajo{+}Medio = (0, 0.25, 0.5){+}(0.25, 0.5, 0.75) = (0.25, 0.75, 1.25)$

- *Representar mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$ el resultado de la operación de la suma:*
  - *Primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' utilizando la Ecuación 5.3:*

    $\tau_{\tilde{s_r}S'} = ((Muy\ Bajo, 0.25), (Bajo, 0.75), (Medio, 0.75), (Alto, 0.25), (Muy\ Alto, 0))$
  - *Después calculamos el valor central:*

    $vc = \frac{(0*0.25)+(1*0.75)+(2*0.75)+(3*0.25)+(4*0)}{0.25+0.75+0.75+0.25+0} = \frac{3}{2} = 1.5$
  - *Finalmente el valor central es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$:*

$$\Delta_{\delta'}(1.5) = (Medio, -0.5)^2$$

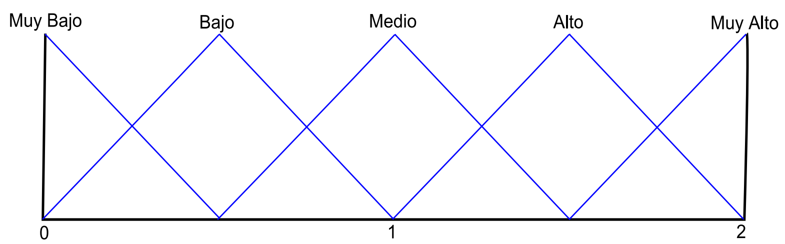

Figura 5.6: Representación del nuevo conjunto de términos lingüísticos, S'

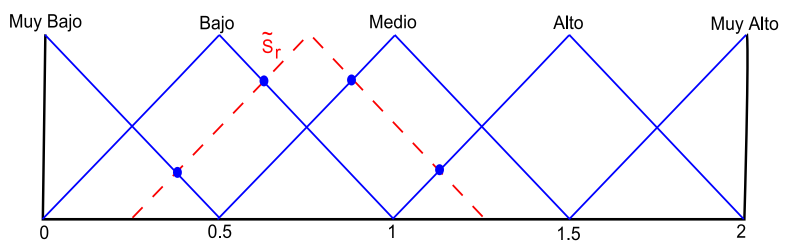

Figura 5.7: Resultado de sumar $(Bajo, 0)^1 + (Medio, 0)^1$ en S'

5.3.3. Resta Simbólica

La operación de la resta tiene algunas peculiaridades, ya que el nuevo universo del discurso podría ser negativo. Por tanto, la operación resta que vamos a definir, cumple las siguientes restricciones:

- No puede haber valores negativos en la semántica de los resultados

- Toda operación resta $s_i - s_j$ puede realizarse $\Leftrightarrow i > j$

A continuación explicamos el proceso de la operación de la resta simbólica.

Supongamos un conjunto de etiquetas S, (ver Figura 5.8). Para realizar la resta $(Alto, 0)^1 - (Bajo, 0)^1$ y según el esquema básico, el proceso es como sigue:

- *Calcular el universo del discurso del resultado*: Para la operación de la resta, $\tilde{s_r} = (s_i, \alpha)^{\delta_l} - (s_j, \alpha)^{\delta_k}$, el nuevo universo del discurso será el máximo valor del universo de discurso inicial, es decir,

$$\delta' = max(\delta_l, \delta_k)$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*

- *Operar con el principio de extensión*: una vez construido S' sobre δ', se realiza la operación de la resta como sigue:

  $\tilde{s_r} = \tilde{s_i} - \tilde{s_j} = (a_i, b_i, c_i) - (a_j, b_j, c_j) = (max(0, a_i - c_j), max(0, b_i - b_j), max(0, c_i - a_j))$

- *Representación mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$*: este paso se lleva a cabo tal y como hemos presentado en la Sección 5.3.1 y hemos mostrado en la Figura 5.3.

Veamos un ejemplo paso a paso.

Ejemplo 13 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y sea $(Alto, 0)^1 - (Medio, 0)^1$ la resta que vamos a realizar cuyo resultado será representado con el número difuso $\tilde{s_r}$ (ver Figura 5.8).*

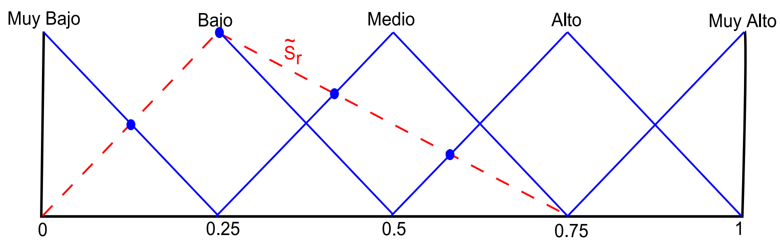

Figura 5.8: Resultado de restar $(Alto, 0)^1 - (Medio, 0)^1$

- *Calcular el universo del discurso del resultado:*

$$\delta' = max(1, 1) = 1$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*

- *Operar con el principio de extensión: el resultado de la operación de la resta según hemos definido anteriormente es:*

  $$\tilde{s_r} = Alto - Medio = (0.5, 0.75, 1) - (0.25, 0.5, 0.75) =$$
  $$= max(0, -0.25), max(0, 0.25), max(0, 0.75)) = (0, 0.25, 0.75)$$

- *Representar mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$ el resultado de la operación de la resta:*

  - *Primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' utilizando la Ecuación 5.3:*

    $\tau_{\tilde{s_r}S'} = ((Muy\ Bajo, 0.5), (Bajo, 1), (Medio, 0.83), (Alto, 0.33),$
    $(Muy\ Alto, 0))$

  - *Después calculamos el valor central:*

    $vc = \frac{(0*0.5)+(1*1)+(2*0.83)+(3*0.33)+(4*0)}{0.5+1+0.83+0.33+0} = \frac{3.65}{2.66} = 1.37$

  - *Finalmente el valor central es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$:*

    $$\Delta_{\delta'}(1.37) = (Bajo, 0.37)^1$$

5.3.4. Multiplicación Simbólica

Para presentar esta operación vamos a mostrar:

1. El producto de un número real positivo por una etiqueta lingüística

2. El producto de dos etiquetas lingüísticas

Primero explicaremos el proceso general como hemos realizado con la operación de la suma y de la resta, y posteriormente presentaremos un ejemplo de cada tipo de operación de multiplicación.

Debemos remarcar que los resultados vienen determinados por el universo del discurso $[0, 1]$ en el que trabajamos, de forma que si multiplicamos por valores menores que la unidad, los resultados son menores que los multiplicandos. Por tanto, en otros dominios los resultados serán diferentes, aunque en esta memoria no vamos a analizarlos, ya que no es objeto de la misma.

- *Calcular el universo del discurso del resultado*: para calcular el nuevo universo del discurso, vamos a distinguir los dos tipos de multiplicaciones:

1. Para el producto de un número real positivo por una valoración $\delta - \alpha$, $\tilde{s_r} = \lambda * (s_i, \alpha)^{\delta}$, será:

$$\delta' = \lambda * \delta$$

2. Para el producto de dos valoraciones $\delta - \alpha$, $\tilde{s_r} = (s_i, \alpha)^{\delta_l} * (s_j, \alpha)^{\delta_k}$, será el producto de los universos de discursos de ambas valoraciones $\delta - \alpha$, es decir,

$$\delta' = \delta_l * \delta_k$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'*
- *Operar con el principio de extensión*: una vez construido S' sobre δ', se realiza la operación de la multiplicación, que en cada tipo será:

1. Para el producto de un número real positivo por una valoración $\delta - \alpha$:
$\tilde{s_r} = \lambda * \tilde{s_i} = \lambda * (a_i, b_i, c_i) = (\lambda * a_i, \lambda * b_i, \lambda * c_i)$
2. Para el producto de dos etiquetas lingüísticas:
$\tilde{s_r} = \tilde{s_i} * \tilde{s_j} = (a_i, b_i, c_i) * (a_j, b_j, c_j) = (a_i * a_j, b_i * b_j, c_i * c_j)$

donde $\tilde{s_i}, \tilde{s_j}$ son dos números difusos definidos en el conjunto de términos lingüísticos S.

- *Representación mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$*: este paso se realiza como explicamos en la Sección 5.3.1 y mostramos en la Figura 5.3.

A continuación resolvemos dos ejemplos.

Ejemplo 14 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\lambda = 2$. El producto de $\lambda * (Medio, 0)^1$ es mostrado en la Figura 5.9:*

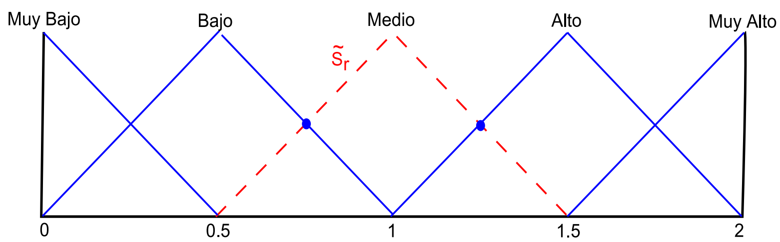

Figura 5.9: Resultado de multiplicar 2*$(Medio, 0)^1$

- *Calcular el universo del discurso del resultado:*

$$\delta' = \lambda * \delta = 2 * 1 = 2$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*

- *Operar con el principio de extensión:*

  $\tilde{s_r} = 2 * (0.25, 0.5, 0.75) = (2 * 0.25, 2 * 0.5, 2 * 0.75) = (0.5, 1, 1.5)$

- *Representar mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$ el resultado de la operación de la multiplicación:*

  - *Primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' utilizando la Ecuación 5.3:*

    $\tau_{\tilde{s_r}S'} = ((Muy\ Bajo, 0), (Bajo, 0.5), (Medio, 1), (Alto, 0.5),$
    $(Muy\ Alto, 0))$

  - *Después calculamos el valor central:*

    $vc = \frac{(0*0)+(1*0.5)+(2*1)+(3*0.5)+(0*0)}{0+0.5+1+0.5+0} = \frac{4}{2} = 2$

  - *Finalmente el valor central es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$:*

$$\Delta_{\delta'}(2) = (Medio, 0)^2$$

Ejemplo 15 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $(Bajo, 0)^1 * (Medio, 0)^1$ la multiplicación que deseamos realizar (ver Figura 5.10):*

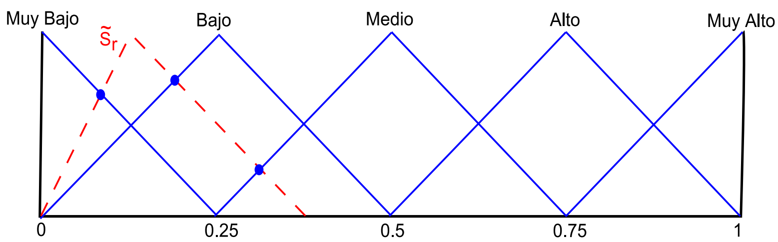

Figura 5.10: Resultado de multiplicar $(Bajo, 0)^1 * (Medio, 0)^1$

- *Calcular el universo del discurso del resultado:*

$$\delta' = \delta_1 * \delta_2 = 1 * 1 = 1$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*

- *Operar con el principio de extensión:*

  $\tilde{s_r} = (0, 0.25, 0.5) * (0.25, 0.5, 0.75) = (0 * 0.25, 0.25 * 0.5, 0.5 * 0.75) = (0, 0.125, 0.375)$

- *Representar mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$ el resultado de la operación de la multiplicación:*

  - *Primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' utilizando la Ecuación 5.3:*

    $\tau_{\tilde{s_r}S'} = ((Muy\ Bajo, 0.63), (Bajo, 0.75), (Medio, 0.25), (Alto, 0), (Muy\ Alto, 0))$

  - *Después calculamos el valor central:*

    $vc = \frac{(0*0.63)+(1*0.75)+(2*0.25)+(3*0)+(4*0)}{0.63+0.75+0.25+0+0} = \frac{1.25}{1.63} = 0.77$

  - *Finalmente el valor central es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$:*

    $$\Delta_{\delta'}(0.77) = (Bajo, -0.33)^1$$

5.3.5. División Simbólica

La operación de la división tiene la siguiente restricción:

- La operación s_i/s_j es posible $\Leftrightarrow i > j$

Supongamos un conjunto de etiquetas S, para realizar la operación de la división $\tilde{s_i}/\tilde{s_j}$ y según el esquema básico, el proceso será el siguiente:

- *Calcular el universo del discurso del resultado*: Para la operación de la división, $\tilde{s_r} = (s_i, \alpha)^{\delta_l}/(s_j, \alpha)^{\delta_k}$ el nuevo universo del discurso se calcula de la siguiente forma:

  $$\delta' = max(\overline{a_j}, \overline{b_j}, \overline{c_j})$$

  donde

  $$\overline{a_j} = \begin{cases} \delta_k & si \quad a_j = 0 \\ \frac{1}{a_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\overline{b_j} = \begin{cases} \delta_k & si \quad b_j = 0 \\ \frac{1}{b_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\overline{c_j} = \begin{cases} \delta_k & si \quad c_j = 0 \\ \frac{1}{c_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*
- *Operar con el principio de extensión*: una vez construido S' sobre δ', se realiza la operación de la división de la siguiente forma:

  $\tilde{s_r} = \tilde{s_i}/\tilde{s_j} = (a_i, b_i, c_i)/(a_j, b_j, c_j) = (a_i * \overline{\overline{c_j}}, b_i * \overline{\overline{b_j}}, c_i * \overline{\overline{a_j}})$

  donde

  $$\overline{\overline{a_j}} = \begin{cases} \delta'_k & si \quad a_j = 0 \\ \frac{1}{a_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\overline{\overline{b_j}} = \begin{cases} \delta'_k & si \quad b_j = 0 \\ \frac{1}{b_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  $$\overline{\overline{c_j}} = \begin{cases} \delta'_k & si \quad c_j = 0 \\ \frac{1}{c_j} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

  Nota: Hemos utilizado $\overline{a_j}, \overline{b_j}, \overline{c_j}$ y $\overline{\overline{a_j}}, \overline{\overline{b_j}}, \overline{\overline{c_j}}$ para evitar la división por cero.

- *Representación mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$*: el resultado de la operación de la división, $\tilde{s_r}$, es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$ siguiendo los pasos descritos en la Sección 5.3.1.

Veamos un ejemplo paso a paso.

Ejemplo 16 *Sea $S = \{Muy\ Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy\ Alto\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y sea $(Medio, 0)^1/(Bajo, 0)^1$ la división que vamos a realizar cuyo resultado será representado con el conjunto difuso $\tilde{s_r}$ (ver Figura 5.11).*

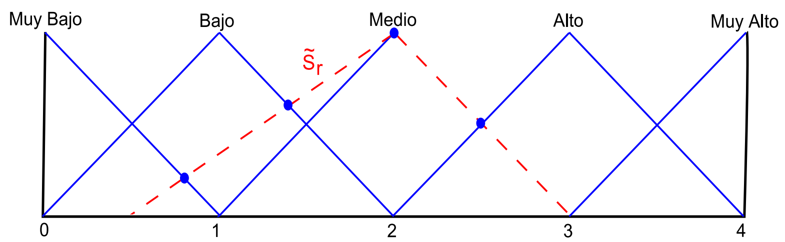

Figura 5.11: Resultado de dividir $(Medio, 0)^1/(Bajo, 0)^1$

- *Calcular el universo del discurso del resultado:*

$$\delta' = max(1, \frac{1}{0.25}, \frac{1}{0.5}) = 4$$

- *Construir el conjunto de términos lingüísticos S' sobre δ'.*
- *Operar con el principio de extensión: el resultado de la operación de la división será:*

  $\tilde{s_r} = Medio/Bajo = (0.25, 0.5, 0.75)/(0, 0.25, 0.5) =$
  $(0.25 * \frac{1}{0.5}, 0.5 * \frac{1}{0.25}, 0.75 * 4) = (0.5, 2, 3)$

- *Representar mediante una valoración lingüística $\delta - \alpha$ el resultado de la operación de la división:*

  - *Para ello, primero transformamos el resultado, $\tilde{s_r}$, en un conjunto difuso en S' utilizando la Ecuación 5.3:*

    $\tau_{\tilde{s_r}S'} = ((Muy\ Bajo, 0.2), (Bajo, 0.6), (Medio, 1), (Alto, 0.5),$
    $(Muy\ Alto, 0))$

  - *Después calculamos el valor central:*

    $vc = \frac{(0*0.2)+(1*0.6)+(2*1)+(3*0.5)+(4*0)}{0.2+0.6+1+0.5+0} = \frac{4.1}{2.3} = 1.78$

  - *Finalmente el valor central es transformado a un valor lingüístico $\delta - \alpha$:*

    $$\Delta_{\delta'}(1.78) = (Medio, -0.22)^4$$

5.3.6. Comparación entre Valoraciones $\delta - \alpha$

Para realizar comparaciones entre valoraciones $\delta - \alpha$ debemos tener en cuenta varios aspectos.

Sea $(s_i, \alpha_k)^z$ y $(s_j, \alpha_l)^w$ dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$:

- si $z = w$ entonces
  - si $i = j$ entonces
    1. si $\alpha_k = \alpha_l$ entonces $(s_i, \alpha_k)^z$, $(s_j, \alpha_l)^w$ representa la misma información
    2. si $\alpha_k < \alpha_l$ entonces $(s_i, \alpha_k)^z < (s_j, \alpha_l)^w$
    3. si $\alpha_k > \alpha_l$ entonces $(s_i, \alpha_k)^z > (s_j, \alpha_l)^w$
  - en otro caso
    1. si $i < j$ entonces $(s_i, \alpha_k)^z < (s_j, \alpha_l)^w$
    2. si $i > j$ entonces $(s_i, \alpha_k)^z > (s_j, \alpha_l)^w$
- en otro caso
  1. Aplicar la siguiente ecuación y comparar los valores reales obtenidos

$$\frac{\Delta_\delta(s_i,\alpha)^\delta * \delta}{g-1} \tag{5.5}$$

donde δ es el universo del discurso y g la granularidad

Ejemplo 17 *Sea* $S = \{s_0 : Muy\ Bajo, s_1 : Bajo, s_2 : Medio, s_3 : Alto, s_4 : Muy\ Alto\}$ *un conjunto de 5 términos lingüísticos, y sean* $(Bajo, 0.2)^1$ *y* $(Bajo, 0.2)^1$ *dos valoraciones lingüísicas* $\delta - \alpha$ *representados en la Figura 5.12. Como podemos observar ambas valoraciones tienen el mismo* δ*, por tanto, comparamos las etiquetas lingüísticas y las traslaciones simbólicas.*

En este caso tanto las etiquetas lingüísticas como las traslaciones simbólicas son iguales, por tanto ambas valoraciones lingüísticas son iguales, $(Bajo, 0.2)^1 = (Bajo, 0.2)^1$

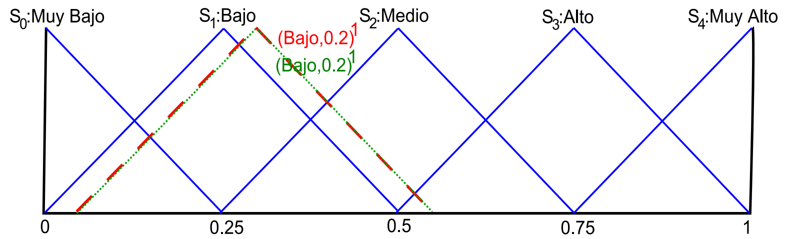

Figura 5.12: Comparación de dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$

Ejemplo 18 *Veamos otro ejemplo con las valoraciones lingüísticas* $\delta - \alpha$*,* $(Medio, 0.1)^1$ *y* $(Medio, 0.4)^1$ *representadas en la Figura 5.13.*

Dado que las etiquetas lingüísticas son iguales, comparamos las traslaciones simbólicas, $0.1 < 0.4$*, entonces* $(Medio, 0.1)^1 < (Medio, 0.4)^1$*.*

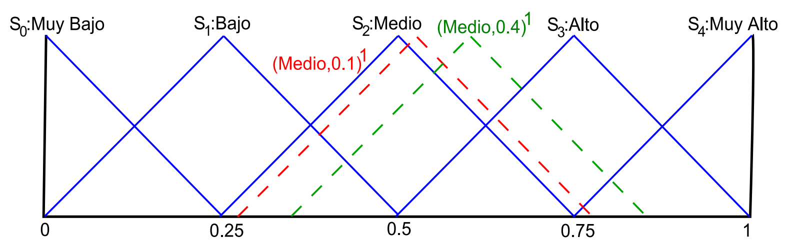

Figura 5.13: Comparación de dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$

Ejemplo 19 *Sean* $(Medio, 0)^1$ *y* $(MuyAlto, 0)^1$ *dos valoraciones lingüísticas* $\delta - \alpha$ *representadas en la Figura 5.14.*

En este caso las etiquetas lingüísticas son diferentes y si las comparamos observamos que $s_2 < s_4$ *porque* $2 < 4$*, por tanto* $(Medio, 0)^1 < (MuyAlto, 0)^1$*.*

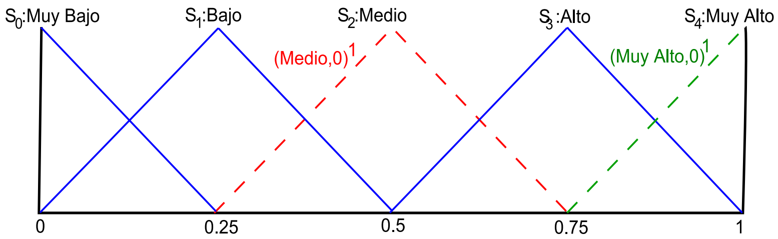

Figura 5.14: Comparación de dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$

Ejemplo 20 *Sean* $(Medio, 0.2)^1$ *y* $(MuyBajo, 0.1)^1$ *dos valoraciones lingüísticas* $\delta - \alpha$ *representadas en la Figura 5.15.*

Si comparamos las etiquetas lingüísticas, $s_2 > s_0$ *porque* $2 > 0$*, por tanto* $(Medio, 0.2)^1 > (MuyBajo, 0.1)^1$*.*

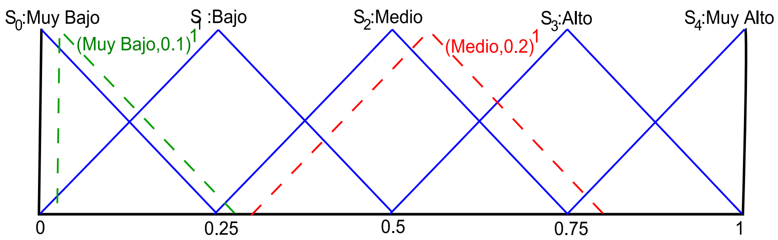

Figura 5.15: Comparación de dos valoraciones lingüísticas $\delta - \alpha$

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

A continuación revisaremos cuáles han sido los resultados que hemos obtenido a lo largo de esta memoria, y qué desarrollos futuros nos planteamos a partir de estos resultados.

El modelado lingüístico de preferencias se ha aplicado a un gran número de áreas, entre ellas la Toma de Decisiones. La resolución de problemas de decisión conlleva dos fases fundamentales:

1. Proceso de Agregación, que consiste en obtener las valoraciones colectivas de cada alternativa.

2. Proceso de Explotación, obtiene el conjunto de alternativas solución al problema.

Estos procesos en contextos lingüísticos implican operar con palabras. Los modelos clásicos (basado en el Principio de Extensión y Simbólico) presentan algunas limitaciones en los procesos de computación con palabras debido a los procesos de aproximación, y de ahí la falta de precisión en los resultados.

A lo largo de esta memoria hemos revisado algunos de los modelos más extendidos de la computación con palabras en la literatura, prestando especial atención a tres modelos computacionales simbólicos como son: el modelo lingüístico 2-Tupla presentado por Herrera y Martínez [19], el modelo Virtual definido por Xu [42] y el modelo 2-Tupla proporcional presentado por Wang y Hao [40]. Para cada uno de ellos hemos estudiado su modelo de representación y modelo computacional, para después realizar un análisis comparativo centrándonos en las siguientes características: tipo de representación de la información, tipo del modelo computacional, precisión e interpretabilidad. El resultado más destacable de este análisis es que el modelo 2-Tupla es el único modelo que mantiene la base en el Enfoque Lingüístico Difuso. Sin embargo este modelo presenta algunas limitaciones, ya que no puede realizar operaciones aritméticas y mostrar los resultados de forma lingüística. Por tanto, el segundo objetivo planteado en esta memoria fue presentar una propuesta inicial de un modelo computacional lingüístico, que permite realizar operaciones aritméticas con números difusos y representar sus resultados de forma lingüística, superando de esta forma las limitaciones de los modelos anteriores.

6.1. Trabajos Futuros

A partir de los resultados presentados en esta memoria, nos planteamos las siguientes líneas de acción:

- Estudiar distintos procesos de matching para obtener el grado de pertenencia de los conjuntos difusos, y comprobar si son más precisos que los obtenidos con el proceso de matching utilizado en la propuesta inicial del modelo computacional presentado en el capítulo 5.

- Eliminar las restricciones impuestas en las operaciones, para que las valoraciones lingüísticas puedan tener diferente dominio. Eliminar también la restricción de la operación de la resta para poder obtener valores negativos en la semántica de los resultados.

- Estudiar la forma en la que los resultados de las operaciones sean independientes del universo del discurso en el que trabajemos.

- Desarrollar un mayor número de operadores sobre el modelo de representación de dicha propuesta, como la negación y distintos operadores de agregación.

- Estudiar posibles aplicaciones del modelo lingüístico $\delta - \alpha$ a procesos de toma de decisión multicriterio, ya que las propuestas actuales no son satisfactorias.

Capítulo 7

Cursos de Doctorado

El período de docencia fue realizado durante el año académico 2008/2009, en el programa de doctorado de Informática de la Universidad de Jaén, siendo el coordinador del mismo D. Juan Ruiz de Miras.

A continuación pasamos a enumerar y describir brevemente cada uno de los cursos realizados en dicho período:

- *Metodología y Documentación Científica*: Este curso tuvo carácter obligatorio y fue impartido por el Dr. Francisco Feito, el Dr. Luis Martínez, el Dr. Alfonso Ureña y el Dr. Victor M. Rivas. Los contenidos versaron sobre diferentes temas, pero todos ellos perseguían la finalidad de inculcar a los alumnos una metodología de investigación. En este curso se expusieron los objetivos a lograr en un programa de doctorado y la normativa que rigen dichos programas. Además, se proporcionó la información necesaria para que los alumnos conocieran de forma detallada los sistemas documentales y otras formas de obtener información científica.

- *Minería de Datos Descriptiva y Web Mining*: Impartido por la Dra. María José del Jesús, el Dr. Pedro González, el Dr. Carlos Molina, el Dr. José María Serrano y el Dr. Victor M. Rivas. En este curso se estudiaron las nuevas tendencias en minería de datos descriptivas, los problemas por resolver en las técnicas existentes y las vías de solución y desarrollo. Además, aprendimos algunos conceptos básicos del lenguaje de programación PERL, que se utiliza para el tratamiento de cadenas.

- *Integración de Técnicas Hipermedia y Visualización Gráfica en Sistemas Inteligentes*: Impartido por el Dr. Francisco Mata, el Dr. Pedro J. Sánchez, el Dr. Antonio J. Rueda y la Dra. Lina Guadalupe García. Los contenidos versaron sobre los siguientes temas: Introducción a los Sistemas Inteligentes (sistemas de agentes, sistemas multi-agente, aplicaciones en internet), Agentes Inteligentes en Entornos Gráficos (grupos de animales, grupos de humanos, animales artificiales, humanos artificiales, evolución artificial), Sistemas Hipermedia (arquitecturas, metodologías y modelos).

- *Búsquedas Inteligentes de Información en la Web*: Impartido por el Dr. L. Alfonso Ureña y el Dr. Manuel García. En este curso se estudió el estado del arte de los sistemas de búsqueda de información, los sistemas de recuperación de información multilingüe, los sistemas de búsqueda de respuestas y los sistemas de recuperación de información geográfica.

- *Avances en Sistemas de Información Espacial*: Este curso fue impartido por el Dr. Francisco Feito, la Dra. Lidia Ortega, el Dr. Juan Carlos Torres (procedente de la Universidad de Granada) y el Dr. Angel Luis García. En dicho curso se estudiaron los avances sobre Información Espacial, el Diseño e Implementación de los Sistemas de Navegación en Entornos Virtuales, se explicaron los Métodos para una Gestión Inteligente de la Información Espacial y las Herramientas Espaciales de Google.

- *Recuperación de Información Multimodal*: Este curso fue impartido por la Dra. María Teresa Martín y el Dr. José Manuel Fuertes. Los contenidos versaron sobre los siguientes temas: Técnicas de Recuperación de Información (visual y textual), Herramientas y Módulos disponibles para el Tratamiento y Recuperación de la Información Visual y Textual, y Estudio y Aplicación de las diferentes Técnicas de Fusión de Documentos y Combinación de Resultados.

- *Minería de Datos Prescriptiva*: Curso impartido por la Dra. María José del Jesús, el Dr. Victor M. Rivas y el Dr. Antonio Jesús Rivera. Se estudiaron los problemas de Clasificación, Regresión y Predicción de Series Temporales y las Técnicas existentes para solucionarlos. Además de Aproximación de Funciones, Redes Neuronales y Aproximación de Funciones con Redes Neuronales.

Índice de tablas

Índice de figuras

Bibliografía

[1] J. Aczél. On weighted synthesis of judgements. *Aequationes Math*, (27):288–307, 1984.

[2] P.P. Bonissone. *A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications*, pages 329–339. Approximate Reasoning in Decision Analysis, North-Holland, 1982.

[3] P.P. Bonissone and K.S. Decker. *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-Off Precision and Complexity.* In L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Editors., Uncertainty in Artificial Intelligence. North-Holland, 1986.

[4] G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Pasi. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 27:126–132, 1997.

[5] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.

[6] G. Buyukozkan, D. Ruan, and O. Feyzioglu. Evaluating e-learning web site quality in a fuzzy environment. *International Journal of Intelligent System*, 22:567–586, 2007.

[7] J.R. Chang, T.H. Ho, C.H. Cheng, and A.P. Chen. Dynamic fuzzy owa model for group multiple criteria decision making. *Soft Computing*, 10:543–554, 2006.

[8] C.H. Cheng and Y. Lin. Evaluating the best main battle tank using fuzzy decision theory with linguistic criteria evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142:174–186, 2002.

[9] F. Chiclana, F. Mata, S. Alonso, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. Group decision making: From consistency to consensus. proceedings of mdai 2007. *Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI) 4617*, pages 80–91, 2007.

[10] T.Y. Chou, S.T. Chou, and G.H. Tzeng. Evaluation it/is investments: A fuzzy multi-criteria decision model approach. *European Journal of Operational Research*, 173:1026–1046, 2006.

[11] R. Degani and G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2:143–162, 1988.

[12] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(3):351–370, 1993.

[13] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Kluwer Academic, New York, 1980.

[14] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[15] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under lingusitic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67–82, 2000.

[16] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(2):354–370, 2008.

[17] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:175–190, 1996.

[18] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:73–87, 1996.

[19] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.

[20] F. Herrera and L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 31(2):227–234, 2001.

[21] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.

[22] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A*, 32:394–402, 2002.

[23] U. Hohle. *Mathematics of fuzzy sets.* 1998.

[24] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets an fuzzy logic: Theory and Applications.* Prentice-Hall PTR, 1995.

[25] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier, and J. Bremont. Subjective evaluation of car seat comfort with fuzzy set techniques. *International Journal of Intelligent Systems*, 12:891–913, 1997.

[26] L. Martínez. Sensory evaluation based on linguistic decision analysis. *International Journal of Aproximated Reasoning*, 44 Num 2:148–164, 2007.

[27] L. Martínez, M.J. Barranco, L.G. Perez, and M. Espinilla. A knowledge based recommender system with multigranular linguistic information. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(3):225 – 236, 2008.

[28] L. Martínez, M. Espinilla, J. Liu, L.G. Pérez, and P.J. Sánchez. An evaluation model with unbalanced linguistic information: Applied to olive oil sensory evaluation. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 15(2-3), 2009.

[29] L. Martínez, M. Espinilla, and L.G. Pérez. A linguistic multigranular sensory evaluation model for olive oil. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(2):148–158, 2008.

[30] L. Martínez, D. Ruan, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision making: Tools and applications. *Information Sciences*, 176(14):2297, 2009.

[31] J.M. Merigo and A.A. Gil-Lafuente. The linguistic generalized owa operator and its application instrategic decision making. In *Proceedings of the tenth international conference on enterprise information systems (ICEIS 2008)*, pages 219–224, Barcelona, Spain, 2008.

[32] S.A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets Systems*, 1:155–167, 1978.

[33] W. Pedrycz. *Fuzzy modeling: Paradigms and practice.* 1996.

[34] W. Pedrycz and F. Gomide. *An introduction to fuzzy sets.* 1998.

[35] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.

[36] M.S. Shendrik and B.G. Tamm. Approach to interactive solution of multicritical optimization problems with linguistic modeling of preferences. *Automatic Control and Computer Sciences*, 19(6):3–9, 1985.

[37] M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10:716–723, 1980.

[38] V. Torra. Negation function based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:975–988, 1996.

[39] E. Triantaphyllou. *Multi-Criteria DM Methods: A comparative Study.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[40] J. Wang and J. Hao. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 14:435–445, 2006.

[41] Y.J. Xu and L. Huang. An approach to group decision making problems based on 2-tuple linguistic aggregation operators. In *International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management*, pages 73–77, Guangzhou, China, 2008.

[42] Z.S Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Science*, 166:19–30, 2004.

[43] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.

[44] R.R. Yager. Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. *Group Decision and Negotation*, 2:81–93, 1993.

[45] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12:237–261, 1995.

[46] R.R. Yager. *Computing with words and information/intelligent systems 2:applications*, chapter Approximate reasoning as a basis for computing with words, pages 50–77. Physica Verlag, 1999.

[47] D. Yucheng, X. Yinfeng, and Y. Shui. Linguistic multiperson decision making based on the use of multiple preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:603–623, 2009.

[48] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[49] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.

[50] L.A. Zadeh. *Computing with Words in Information/Intelligent Systems 1*, chapter What is Computing with Words? Physica-Verlag, 1999.

[51] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets. Theory and its Applications.* Kluwer Academic, 1996.

[52] Xu Z.S. An approach based on the uncertain lowg and induced uncertain lowg operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations. *Decision Support Systems*, 41(6):488–499, 2006.

[53] Xu Z.S. A direct approach to group decision making with uncertain additive linguistic preference relations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 5(1):21–32, 2006.