# Un Modelo de Selección para Problemas de Decisión con Múltiples Expertos e Información Linguística Multi-Granular


**Francisco Herrera Triguero**
Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A.
E.T.S. de Ingeniería Informática
Universidad de Granada
18071 - Granada
e-mail: herrera@decsai.ugr.es

**Enrique Herrera Viedma**
Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A.
E.T.S. de Ingeniería Informática
Universidad de Granada
18071 - Granada
e-mail: viedma@decsai.ugr.es

**Luis Martínez López**
Dpto. de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Jaén
23071 - Jaén
e-mail: martin@ujaen.es



## Resumen

En este trabajo estudiamos los problemas de decisión con múltiples expertos, asumiendo que éstos proporcionan sus preferencias sobre las alternativas mediante valores lingüísticos evaluados en conjuntos de etiquetas con distinta granularidad y/o semántica, esto es, mediante información lingüística multi-granular. En este contexto de decisión, se presenta un modelo de selección compuesto por dos pasos con objeto de obtener el conjunto solución de alternativas. Primero, se realiza la fusión de la información lingüística multi-granular expresada por los expertos, obteniéndose las preferencias lingüísticas colectivas sobre las alternativas. Y segundo, se realiza la selección de las mejores alternativas a partir de los valores de preferencia colectivos.



**Palabras clave:** Decisión con multiples-expertos, información lingüística, multi-granularidad, grado de selección.


## 1 Introducción

En muchas actividades de decisión nos encontramos aspectos que no son fácilmente calificables mediante valores precisos, ya sea por su propia naturaleza (aspectos cualitativos : "belleza", "comfortabilidad", etc ...) o simplemente porque en ese momento no esta disponible o es muy costoso conseguir un valor exacto, por lo que un valor aproximado es suficiente. En tales circunstancias, es normal manejar y representar los aspectos cualitativos como términos lingüísticos mediante variables lingüísticas [12], es decir, variables cuyos valores no son números sino palabras o frases en un lenguaje natural o artificial. Este enfoque lingüístico ha sido utilizado por diversos autores para resolver problemas de decisión [4, 2, 5, 9, 11].

En el enfoque lingüístico es muy importante determinar la "*granularidad de la incertidumbre*", es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos utilizado para expresar la información. Según el grado de incertidumbre que un experto tiene al calificar un fenómeno, el conjunto de etiquetas elegido para expresar su opinión tendrá más o menos términos. Cuando existen distintos expertos con diferentes grados de incertidumbre sobre un fenómeno, pueden utilizar conjuntos de etiquetas con distinta granularidad y/o semántica para expresar sus preferencias.

En este trabajo, consideramos problemas de decisión con múltiples expertos que dan sus preferencias sobre un conjunto de alternativas usando valores lingüísticos evaluados sobre conjuntos de etiquetas con distinta granularidad y/o semántica, esto es, mediante *información lingüística multi-granular*. Presentamos un modelo de selección que obtiene el conjunto solución de alternativas siguiendo dos pasos:

1. *Fusión de la información lingüística multi-granular.* En esta fase, se obtiene una preferencia lingüística colectiva sobre cada alternativa mediante la fusión de las preferencias lingüísticas multi-granulares individuales dadas por los expertos sobre cada una de las alternativas. El esquema de fusión sigue las dos siguientes fases:
   (a) *Hacer uniforme la información lingüística multi-granular.* Consiste en expresar las preferencias lingüísticas multi-granulares individuales en un único conjunto básico de etiquetas (CBE). Cada valor lingüístico multi-granular suministrado por los expertos se representa como un conjunto difuso en el CBE.
   (b) *Cálculo de las preferencias lingüísticas colectivas.* Para cada alternativa se calcula la preferencia lingüística colectiva de acuerdo a las preferencias de todos los expertos.
2. *Selección de las mejores alternativas.* A partir de los valores colectivos calculamos una relación de preferencia difusa usando la Teoría de la Posibilidad aplicada a los conjuntos difusos definidos en CBE. Finalmente, sobre esta relación aplicamos una función de selección para obtener las mejores

alternativas.

El trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 presentamos el problema de decisión en contexto lingüístico; en la Sección 3 se muestra el modelo de selección; en la Sección 4 se da un ejemplo; y por último, apuntamos algunos comentarios finales.

# 2 El Problema de Decisión con Múltiples Expertos e Información Lingüística Multi-Granular

Consideramos un problema de decisión en el cuál tenemos un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, ..., x_n\}$ $(n \geq 2)$ que son calificadas según un conjunto finito de expertos $P = \{p_1, ..., p_m\}$ $(m \geq 2)$. Cada experto $p_j$ da un vector de utilidad con un valor lingüístico de preferencia $p^{ij}$ para cada alternativa $x_i$. Asumimos que cada experto, $p_j$, puede usar diferentes conjuntos de etiquetas $\{S_j\}$ para expresar sus preferencias. Por lo tanto, para cada experto $p_j$, el vector de utilidad se define como un subconjunto lingüístico de selección sobre el conjunto $X$ de alternativas valorado lingüísticamente en $S_j$:

$$p_j \longrightarrow (p^{1j}, ..., p^{nj}) \quad p^{ij} \in S_j$$

$$S_j = \{s_0^j, ..., s_{k_j}^j\} \; j \in \{1, ..., m\}$$

donde $k_j + 1$ es la granularidad de $S_j$.

Cada conjunto $S_j$ es definido como un conjunto finito y totalmente ordenado de términos lingüísticos que representan un valor posible de una variable lingüística en el sentido usual [1].

La semántica de cada etiqueta está dada por números difusos definidos sobre el intervalo [0,1], descritos por funciones de pertenencia trapezoidales lineales, representadas por la tupla $(x_0, x_1, x_2, x_3)$, donde los parámetros $x_1,\ x_2$ indican el intervalo en el que la función de pertenencia vale 1.0; y $x_0,\ x_3$ indican los límites izquierdo y derecho del soporte de la función de pertenencia. La etiqueta del centro representa una incertidumbre de "aproximadamente 0.5" y el resto de etiquetas está distribuído simétricamente a ambos lados de la misma [1].

# 3 Modelo de Selección

Aquí desarrollamos cada paso del modelo de selección para problemas de decisión con múltiples expertos e información lingüística multi-granular presentado en la introducción.

## 3.1 Fusión de la Información Lingüística Multi-granular

En este fase se obtienen las preferencias lingüísticas colectivas sobre las alternativas de acuerdo a las preferencias lingüísticas multi-granulares individuales expresadas por los expertos. La técnica de fusión de información lingüística multi-granular que nos permite hallar los valores colectivos se desarrolla en los dos siguientes pasos:

1. *Hacer uniforme la información lingüística multi-granular.*
2. *Cálculo de las preferencias lingüísticas colectivas.*

### 3.1.1 Hacer Uniforme la Información Lingüística Multi-Granular

Para poder manejar la información lingüística multi-granular la representamos uniformemente transformándola a un único conjunto de etiquetas, CBE, que notamos como $S_T$.

Antes de definir el proceso de conversión a $S_T$, hemos de seleccionar el CBE. Éste debe ser un conjunto de etiquetas lingüísticas que nos permita mantener el grado de incertidumbre asociado a cada experto y la capacidad de discriminación para expresar los valores de preferencia. Con vistas a cumplir este objetivo, buscamos los conjuntos de máxima granularidad en $\{S_j, \forall j\}$. Cuando existe un único conjunto de etiquetas con máxima granularidad, se elige como CBE. Si encontramos dos o más conjuntos de máxima granularidad , entonces el CBE es seleccionado dependiendo de la semántica de estos conjuntos de etiquetas:

1. Si todos los conjuntos de etiquetas de máxima granularidad tienen la misma semántica, entonces $S_T$ es cualquiera de ellos.
2. Si existen algunos conjuntos de etiquetas con diferente semántica, entonces $S_T$ será un conjunto de etiquetas especial con un número de términos superior al que una persona es capaz de discriminar o distinguir (como mucho 11 ó 13 [6]). Definimos un conjunto de etiquetas especial con 15 términos y la siguiente semántica (ver Figura 1).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s_0$ | $(0, 0, .07)$ | $s_1$ | $(0, .07, .15)$ |
| $s_2$ | $(.07, .15, .22)$ | $s_3$ | $(.15, .22, .29)$ |
| $s_4$ | $(.22, .29, .36)$ | $s_5$ | $(.29, .36, .43)$ |
| $s_6$ | $(.36, .43, .5)$ | $s_7$ | $(.43, .5, .58)$ |
| $s_8$ | $(.5, .58, .65)$ | $s_9$ | $(.58, .65, .72)$ |
| $s_{10}$ | $(.65, .72, .79)$ | $s_{11}$ | $(.72, .79, .86)$ |
| $s_{12}$ | $(.79, .86, .93)$ | $s_{13}$ | $(.86, .93, 1)$ |
| $s_{14}$ | $(.93, 1, 1)$ | | |

Una vez seleccionado el CBE, $S_T$, definimos una función de transformación de información lingüística multi-granular, que expresa la información de cada valor lingüístico $p^{ij} \in S_j$ como un conjunto difuso sobre $S_T$.

**Definición 1.** *Sean* $A = \{l_0, \ldots, l_p\}$ *y* $S_T = \{c_0, \ldots, c_g\}$ *dos conjuntos de etiquetas, con* $g \geq$

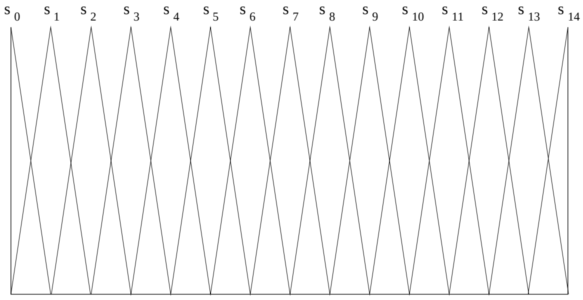


Figura 1: Conjunto de Etiquetas con 15 términos

*p. Una función de transformación de información lingüística multigranular, $\tau_{AS_T}$, se define como:*

$$\tau_{AS_T} : A \longrightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{AS_T}(l_i) = \{(c_k, \alpha_k^i) \; /k \in \{0, \ldots, g\}$$

$$\alpha_k^i = \max_y \min\{\mu_{l_i}(y), \mu_{c_k}(y)\}$$

*donde $F(S_T)$ es el conjunto de conjuntos difusos definidos en $S_T$, $\mu_{l_i}(y)$ y $\mu_{c_k}(y)$ las funciones de pertenencia de las etiquetas $l_i$ y $c_k$ respectivamente.*

El resultado de $\tau_{AS_T}$ para cualquier valor lingüístico de $A$ es un conjunto difuso definido en términos del conjunto de etiquetas $S_T$.

**Ejemplo 1.** Sea $A = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4\}$ y $S_T = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ dos conjuntos de etiquetas, con 5 y 7 términos (Figura 2) y con las siguientes semánticas asociadas:

| | $A$ | | $S_T$ |
|---|---|---|---|
| $l_0$ | $(0, 0, .25)$ | $c_0$ | $(0, 0, .16)$ |
| $l_1$ | $(0, .25, .5)$ | $c_1$ | $(0, .16, .34)$ |
| $l_2$ | $(.25, .5, .75)$ | $c_2$ | $(.16, .34, .5)$ |
| $l_3$ | $(.5, .75, .1)$ | $c_3$ | $(.34, .5, .66)$ |
| $l_4$ | $(.75, 1, 1)$ | $c_4$ | $(.5, .66, .84)$ |
| | | $c_5$ | $(.66, .84, 1)$ |
| | | $c_6$ | $(.84, 1, 1)$ |

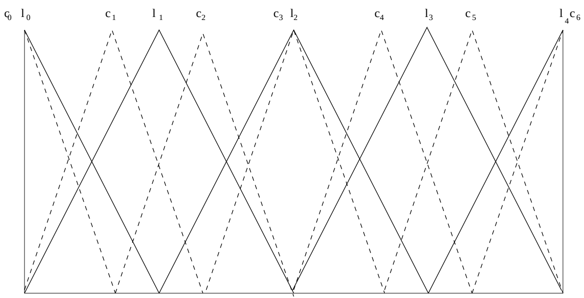


Figura 2: Conjuntos de etiquetas A y $S_T$

Veamos como expresar las etiquetas $l_0$ y $l_1$ en términos del conjunto $S_T$. Los conjuntos difusos asociados a $l_0$ y $l_1$ después de aplicar $\tau_{AS_T}$ son:

$$\begin{array}{llll} \tau_{AS_T}(l_0) = & \{(c_0, 1), & (c_1, .58), & (c_2, .18), \\ (c_3, 0), & (c_4, 0), & (c_5, 0), & (c_6, 0)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \tau_{AS_T}(l_1) = & \{(c_0, .39), & (c_1, .85), & (c_2, .85), \\ (c_3, .39), & (c_4, 0), & (c_5, 0), & (c_6, 0)\} \end{array}$$

Por tanto, para hacer uniforme la información lingüística multi-granular seleccionamos $S_T$ y aplicamos el conjunto de funciones de transformación de información lingüística multigranular $\{\tau_{S_j S_T},\ j \in \{1, ..., m\}\}$ a los vectores de utilidad suministrados por los distintos expertos. Entonces cada valor lingüístico $p^{ij}$ se representa mediante un conjunto difuso definido en $S_T = \{c_0, ..., c_g\}$, caracterizado por la siguiente expresión:

$$\tau_{S_j S_T}(p^{ij}) = \{(c_0, \alpha_0^{ij}), \ldots, (c_g, \alpha_g^{ij})\}$$

De este modo, el vector de utilidad de cada experto $p_j$ se representa como un vector de conjuntos difusos en $S_T$:

$$(\tau_{S_j S_T}(p^{1j}), \ldots, \tau_{S_j S_T}(p^{nj})).$$

Para simplicar la notación, cada conjunto difuso $\tau_{S_j S_T}(p^{ij})$ lo representamos como $r^{ij}$, por lo que el vector de utilidad del experto $p_j$ se representa como:

$$(r^{1j}, \ldots, r^{nj}) \text{ con } r^{ij} = \{\alpha_0^{ij}, \ldots, \alpha_g^{ij}\}.$$

### 3.1.2 Cálculo de las Preferencia Lingüísticas Colectivas

En este paso del proceso de decisión la información aportada por un experto $p_j$ sobre una alternativa $x_i$, $p^{ij}$, está definida como un conjunto difuso $r^{ij}$ sobre $S_T$. Por tanto, para obtener una preferencia lingüística colectiva sobre una alternativa, $x_i$, debemos agregar estos conjuntos difusos $\{r^{ij}, \forall j\}$. La preferencia lingüística colectiva sobre la alternativa $x_i$ la notamos como $r^i$, y es un nuevo conjunto difuso definido sobre $S_T$ de acuerdo a la siguiente expresión:

$$r^i = \{\alpha_0^i, ..., \alpha_g^i\}$$

con función de pertenencia

$$\alpha_k^i = f(\alpha_k^{i1}, ..., \alpha_k^{im}),\ k \in \{0, ..., g\}$$

donde $f$ es un "operador de agregación".

Por tanto, el resultado de este paso del modelo de selección es un conjunto de preferencias lingüísticas colectivas, donde cada valor colectivo para cada alternativa es obtenido según las valoraciones individuales expresadas por todos los expertos sobre dicha alternativa,

$$(r^1, ..., r^n)$$

En la siguiente subsección, mostramos como encontrar el conjunto solución de alternativas a partir de las evaluaciones colectivas.

### 3.2 Selección de las Mejores Alternativas

El objetivo del modelo de selección es encontrar un conjunto de alternativas que contenga las mejores, de acuerdo a las preferencias de todos los expertos. En este caso las preferencias son conjuntos difusos sobre CBE, $r^i$. Entonces, tenemos que definir un método de selección, que aplicado directamente sobre las preferencias (conjuntos difusos), nos permita obtener la solución. Ésta no es una tarea fácil, pues hemos de comparar conjuntos difusos. Para resolverla cambiamos la representación de las preferencias lingüísticas colectivas basadas en conjuntos difusos por una representación basada en relaciones de preferencia difusas. Usamos el método de comparación de números difusos en contexto posibilístico descrito en [3]. Específicamente, aplicamos una modificación del *grado de posibilidad de dominancia* sobre números difusos propuesto en [3], para que actúe sobre conjuntos difusos $r^i$ definidos en un universo discreto (el conjunto básico de etiquetas $S_T$). Este método de selección queda definido por los dos siguientes pasos:

1. Calcular una relación de preferencia difusa.
2. Aplicar un grado de selección a la relación de preferencia difusa para ordenar las alternativas y seleccionar la(s) mejor(es).

**1.** Obtener una Relación de Preferencia Difusa.

La siguiente definición se usa para comparar números difusos.

**Definición 2 [3].** *Sean* **u** *y* **v** *dos números difusos, el grado de posibilidad de dominancia de u sobre v es:*

$$P(u \geq v) = \max_{x} \min_{y \leq x} \{\mu_u(x), \mu_v(y)\}$$

Sin embargo, nosotros tenemos que ordenar conjuntos difusos en un universo discreto, $S_T$. En la siguiente definición adaptamos el grado de posibilidad de dominancia para poder trabajar en $S_T$.

**Definición 3.** *Sean $x_i, x_j \in X (i \neq j)$ dos alternativas con sus respectivos conjuntos difusos de preferencia $r^i, r^j \in F(S_T)$, entonces el grado de preferencia de $x_i$ sobre $x_j$, $b_{ij}$, se obtiene según la siguiente expresión:*

$$b_{ij} = \max_{c_l} \min_{c_h \leq c_l} \{\mu_{r^i}(c_l), \mu_{r^j}(c_h)\}$$

*donde $\mu_{r_i}(c_l) = \alpha_l^i$ y $\mu_{r_j}(c_h) = \alpha_h^j$.*

Aplicando esta definición sobre todos los posibles pares $(i \neq j)$ de las alternativas, obtenemos una relación de preferencia difusa $B = [b_{ij}]$.

**2.** Aplicación de un Grado de Selección.

Para finalizar, el modelo de selección calcula el conjunto solución de alternativas aplicando un grado de selección sobre la relación de preferencia difusa, $B$. En [8] se presenta una muestra de los distintos grados de selección que se pueden usar. Usando uno de ellos ordenamos las alternativas y seleccionamos aquella(s) con valor máximo en su grado de selección.

En la siguiente sección presentamos un ejemplo particular de aplicación de este modelo general de selección.

## 4 Ejemplo

Supongamos que tenemos una asesoría bursátil que recibe el encargo de hacer un estudio para invertir una cantidad de dinero de la forma más rentable. Existen cuatro posibles opciones de inversión:

- $x_1$ es una compañía de automóviles,
- $x_2$ es una compañía alimenticia,
- $x_3$ es una compañía de ordenadores,
- $x_4$ es una compañía armamentos.

La asesoría bursatil tiene un grupo de departamentos para consultar sus decisiones.

- $p_1$ es el departamento de análisis de riesgos,
- $p_2$ es el departamento de análisis de crecimiento,
- $p_3$ es el departamento de análisis medio-ambiental,
- $p_4$ es el departamento de análisis socio-político.

Cada uno es dirigido por un experto. Los expertos usan diferentes conjuntos de etiquetas para expresar sus preferencias lingüísticas sobre el conjunto de las alternativas. En particular:

- $p_1$ utiliza el conjunto de etiquetas $A$ de 9 términos.
- $p_2$ utiliza el conjunto de etiquetas $B$ de 7 términos.
- $p_3$ utiliza el conjunto de etiquetas $C$ de 5 términos.
- $p_4$ utiliza el conjunto de etiquetas $D$ de 9 términos.

| | **Conj. Etiquetas A** | | **Conj. Etiquetas B** |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | (0 0 .12) | $b_0$ | (0 0 .16) |
| $a_1$ | (0 .12 .25) | $b_1$ | (0 .16 .33) |
| $a_2$ | (.12 .25 .37) | $b_2$ | (.16 .33 .5) |
| $a_3$ | (.25 .37 .5) | $b_3$ | (.33 .5 .66) |
| $a_4$ | (.37 .5 .62) | $b_4$ | (.5 .66 .83) |
| $a_5$ | (.5 .62 .75) | $b_5$ | (.66 .83.1) |
| $a_6$ | (.62 .75 .87) | $b_6$ | (.83 1 1) |
| $a_7$ | (.75 .87 .1) | | |
| $a_8$ | (.87 1 1) | | |

| | **Conj. Etiquetas C** | | **Conj. Etiquetas D** |
|---|---|---|---|
| $c_0$ | $(0, 0, .25)$ | $d_0$ | $(0, 0, 0, 0)$ |
| $c_1$ | $(0, .25, .5)$ | $d_1$ | $(0, .01, .02, .07)$ |
| $c_2$ | $(.25, .5, .75)$ | $d_2$ | $(.04, .1, .18, .23)$ |
| $c_3$ | $(.5, .75, 1)$ | $d_3$ | $(.17, .22, .36, .42)$ |
| $c_4$ | $(.75, 1, 1)$ | $d_4$ | $(.32, .41, .58, .65)$ |
| | | $d_5$ | $(.58, .63, .80, .86)$ |
| | | $d_6$ | $(.72, .78, .92, .97)$ |
| | | $d_7$ | $(.93, .98, .99, 1)$ |
| | | $d_8$ | $(1, 1, 1, 1)$ |

Después del estudio de las alternativas, los expertos suministran las siguientes preferencias:

| | | *alternativas* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| *expertos* | $p_1$ | $a_4$ | $a_6$ | $a_3$ | $a_5$ |
| | $p_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_5$ |
| | $p_3$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |
| | $p_4$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_3$ | $d_5$ |

A continuación presentamos un modelo particular de selección el cuál nos permite resolver este ejemplo.

### 4.1 Un Modelo de Selección Basado en el Operador OWA y en el Grado de Selección de No Dominancia

Este modelo de selección específico sigue el esquema general presentado en la Sección 3, pero presenta los siguientes rasgos particulares:

1. El operador de agregación $f$ utilizado para calcular los valores de preferencia colectivos, es el *operador OWA guiado por un cuantificador lingüístico* [10], representando el concepto de *mayoría difusa*.

2. El proceso de selección es realizado por el *"grado de selección de no dominancia"* definido por Orlovski [7].

**1.** Fusión de la Información Lingüística Multi-Granular

Se desarrolla en los dos siguientes pasos:

**1.1** Hacer uniforme la información lingüística multi-granular. Seleccionamos el CBE, siguiendo los pasos indicados en la Subsección 3.1.1. En este caso, como hay dos conjuntos de etiquetas con máxima granularidad y diferente semántica, elegimos como $S_T$ el conjunto de etiquetas presentado en la Figura 1. Todos los valores de utilidad son convertidos a $S_T$ a través de las funciones $\{\tau_{AS_T}, \tau_{BS_T}, \tau_{CS_T}, \tau_{DS_T}\}$, con lo que obtenemos los siguientes conjuntos difusos sobre $S_T$:

| | |
|---|---|
| $r^{11}$ | $(0, 0, 0, 0, .05, .45, .8, .82, .48, .23, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{12}$ | $(0, 0, 0, 0, .11, .45, .65, .95, .68, .39, .1, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{13}$ | $(0, 0, 0, .23, .35, .6, .8, .98, .75, .5, .3, .1, 0, 0, 0)$ |
| $r^{14}$ | $(0, 0, 0, 0, .3, .77, 1, 1, 1, .51, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{21}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .25, .99, .7, .31, .01, 0, 0)$ |
| $r^{22}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .35, .63, .94, .76, .46, .2, 0, 0)$ |
| $r^{23}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, .01, .25, .5, .7, .9, .9, .65, .45, .2)$ |
| $r^{24}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, .55, 0, 0)$ |
| $r^{31}$ | $(0, 0, 0, .18, .55, .95, .7, .35, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{32}$ | $(0, 0, 0, 0, .1, .45, .65, .95, .68, .39, .1, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{33}$ | $(0, 0, 0, .23, .35, .6, .8, .98, .75, .5, .3, .1, 0, 0, 0)$ |
| $r^{34}$ | $(0, 0, .41, 1, 1, .99, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{41}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .36, .71, .91, .56, .22, 0, 0, 0)$ |
| $r^{42}$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .23, .54, .84, .86, .58, .3)$ |
| $r^{43}$ | $(.25, .4, .7, .9, .87, .65, .4, .2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^{44}$ | $(.25, .4, .7, .9, .87, .65, .4, .2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |

**1.2** Calcular las preferencias lingüísticas colectivas.

A partir de los $r^{ij}$ calculamos la preferencias lingüística colectiva sobre cada alternativa, usando el operador OWA guiado por un cuantificador lingüístico.

**Definición 4 [10].** *Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de valores a ser agregados, el operador Ordered Weighted Averaging (OWA), $F$ se define como,*

$$F(a_1, \ldots, a_n) = WB^T = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i$$

*donde $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es un vector de pesos, tal que,$w_i \in [0, 1]$ y $\sum_i w_i = 1$. $B$ es el vector ordenado asociado a $A$, donde $b_i \in B$ es el i-esimo mayor valor en $A$.*

Nuestro interés es alcanzar soluciones que expresen la opinión de la mayoría de los expertos. En este sentido, los pesos $w_i$ para la agregación se pueden calcular a partir de la función que describe a un cuantificador lingüístico proporcional creciente $Q$ mediante la siguiente expresión [10]:

$$w_i = Q(i/m) - Q((i - 1)/m), i = 1, \ldots, m,$$

con

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{r-a}{b-a} & \text{si } a \le t \le b \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

con $a, b, t \in [0, 1]$. En este caso, notaremos al operador OWA guiado por el cuantificador lingüístico $Q$, como $F_Q$.

En este ejemplo utilizamos el cuantificador "*tantos como sea posible*" con parámetros ($a = 0.5, b = 1$), y por tanto con el vector de pesos $W = \{0, 0, .5, .5\}$. Entonces, las preferencias lingüísticas colectivas que obtenemos son:

| | |
|---|---|
| $r^1$ | $(0, 0, 0, 0, .08, .45, .72, .88, .58, .31, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^2$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .12, .82, .73, .38, .1, 0, 0)$ |
| $r^3$ | $(0, 0, 0, .05, .23, .52, .32, .17, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| $r^4$ | $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .12, .27, .11, 0, 0, 0)$ |

**2.** Selección de las Mejores Alternativas.

Se realiza también en dos pasos:

**2.1** Cálculo de la relación de preferencia difusa. Obtenemos la siguiente relación de preferencia difusa a partir de los valores colectivos:

$$\begin{pmatrix} - & .31 & .52 & .12 \\ .82 & - & .52 & .27 \\ .45 & 0 & - & 0 \\ .27 & .27 & .27 & - \end{pmatrix}$$

**2.2** Aplicación del grado de selección de no dominancia. A cada alternativa $x_i$, le calculamos su grado de selección de no dominacia $NDD_i$.

**Definición 5 [7].** *Sea $B = [b_{ij}]$ una relación de preferencia difusa definida sobre el conjunto de alternativas $X$. Para la alternativa $x_i$, su grado de no dominancia $NDD_i$, es definido como sigue:*

$$NDD_i = \min_{x_j}[1 - b^s_{ji}, j \neq i]$$

*donde $b^s_{ji}$ se calcula mediante la siguiente expresión,*

$$b^s_{ji} = \max\{b_{ji} - b_{ij}, 0\},$$

*y representa el grado para el cuál $x_i$ es estrictamente dominado por $x_j$.*

Entonces, primero calculamos la relación de preferencia estricta $B^s$:

$$\begin{pmatrix} - & 0 & .07 & 0 \\ .51 & - & .52 & 0 \\ .0 & 0 & - & 0 \\ .15 & 0 & .27 & - \end{pmatrix}$$

y luego, los grados de no dominacia:

$$\{NDD_1 = .49, NDD_2 = 1, NDD_3 = .48,$$
$$NDD_4 = 1\}.$$

Por tanto, el conjunto solución de alternativas obtenido es $X^{ND} = \{x_2, x_4\}$, siendo las mejores opciones la compañía alimenticia y la armamentística.

# 5 Comentarios Finales

En este trabajo hemos presentado un modelo de selección para problemas de toma de decisión con múltiples expertos los cuales expresan sus preferencias usando distintos dominios lingüísticos.

Este modelo es útil en problemas de decisión donde los expertos provienen de distintas áreas de conocimiento o tienen distinto grado de conocimiento sobre el problema. La técnica de fusión de información lingüística multi-granular usada puede ser aplicada en muchas otras áreas como diagnosis, recuperación de información, etc.

# Referencias


[1] P.P. Bonissone and K.S. Decker, Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity, en: L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence* (North-Holland, 1986) 217-247.

[2] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma and L. Martínez, Combining Numerical and Linguistic Information in Group Decision Making, *Information Sciences* **7** (1998) 177-194.

[3] D. Dubois and H. Prade, Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, *Information Sciences* **30** (1983) 183-224.

[4] F. Herrera and E. Herrera-Viedma, Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **27** (1997) 646-656.

[5] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems* **79** (1996) 175-190.

[6] G.A. Miller, The Magical Number Seven or Minus Two: Some limits On Our Capacity of Processing Information, *Psychological Rev.* **63** (1956) 81-97.

[7] S.A. Orlovski, Decision Making with a Fuzzy Preference Relation, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 155-167.

[8] M. Roubens, Some Properties of Choice Functions Based on Valued Binary Relations, *European Journal of Operational Research* **40** (1989) 309-321.

[9] M. Tong and P. P. Bonissone, A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **10** (1980) 716-723.

[10] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **18** (1988) 183-190.

[11] R.R. Yager, Non-Numeric Multi-Criteria Multi-Person Decision Making, *Group Decision and Negotiation* **2** (1993) 81-93.

[12] L. A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning. Part I, *Information Sciences* **8** (1975) 199-249, Part II, *Information Sciences* **8** (1975) 301-357, Part III, *Information Sciences* **9** (1975) 43-80.