UNIVERSIDAD DE GRANADA

E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial

UN NUEVO MODELO DE REPRESENTACION DE INFORMACION LINGÜISTICA BASADO EN 2-TUPLAS PARA LA AGREGACION DE PREFERENCIAS LINGÜISTICAS

TESIS DOCTORAL

Luis Martínez López

Granada, Julio de 1999

UN NUEVO MODELO DE REPRESENTACION DE INFORMACION LINGÜISTICA BASADO EN 2-TUPLAS PARA LA AGREGACION DE PREFERENCIAS LINGÜISTICAS

MEMORIA QUE PRESENTA

LUIS MARTÍNEZ LÓPEZ

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INFORMÁTICA

JULIO 1999

DIRECTOR

FRANCISCO HERRERA TRIGUERO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA UNIVERSIDAD DE GRANADA

La memoria titulada **UN NUEVO MODELO DE REPRESENTACION DE INFORMACION LINGÜISTICA BASADO EN 2-TUPLAS PARA LA AGREGACION DE PREFERENCIAS LINGÜISTICAS**, que presenta D. Luis Martínez López (miembro del Dpto. de Informática de la Universidad de Jaén) para optar al grado de DOCTOR, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada bajo la dirección de el Doctor D. Francisco Herrera Triguero

Granada, Julio de 1999

El doctorando	El director
Luis Martínez López	Francisco Herrera Triguero

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a las que quiero reconocer su ayuda durante la realización de esta memoria pero, entre ellas, hay algunas que me gustaría destacar.

En primer lugar a Paco, mi director, cuyo apoyo y buen hacer no me ha faltado en ningún momento. También agradecer especialmente a Enrique, Oscar y Jose Manuel su apoyo científico y su amistad que también ha sido muy importante para mi.

También quiero agradecer tanto al Departamento de Informática de la Universidad de Jaén y al Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Granada el apoyo y soporte prestado durante el desarrollo de este trabajo.

No quiero dejar pasar la oportunidad para agredecer el apoyo y ánimo constante que me ha dado mi familia durante muuuucho tiempo.

Por último, aunque no con menos ganas, quiero agredecer a mis amigos y alumnos que también me han ayudado y apoyado de forma contínua durante esta travesía científica. Especialmente un recuerdo para aquel que no puede compartir conmigo este momento gracias J.A.

Gracias a todos.

UN NUEVO MODELO DE REPRESENTACION DE INFORMACION LINGÜISTICA BASADO EN 2-TUPLAS PARA LA AGREGACION DE PREFERENCIAS LINGÜISTICAS

Luis Martínez López

8 de marzo de 2000

Índice General

Introducción **1**

1 Conjuntos Difusos y Variables Lingüísticas. Modelado de Preferencias **7**

1.1 Nociones y Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos 7

1.2 Variables Lingüísticas 13

1.2.1 Elección del Conjunto de Términos Lingüísticos 15

1.2.2 Semántica de un Conjunto de Términos Lingüísticos 17

1.2.3 Uso de las Variables Lingüísticas 22

1.3 Modelado de Preferencias 23

1.4 Modelado Lingüístico de Preferencias 24

1.4.1 Estructuras para el Modelado Lingüístico de Preferencias 25

1.4.2 Aplicaciones 26

1.5 Toma de Decisiones 30

1.5.1 Problemas de Decisión Multiexperto y Multicriterio 31

1.5.1.1 Toma de Decisiones Multiexperto (TDME) 32

1.5.1.2 Toma de Decisiones Multicriterio (TDMC) 33

1.5.2 Proceso de Decisión 34

2 Un Nuevo Modelo de Representación de Información Lingüística Basado en 2-tuplas Lingüísticas **37**

2.1 Análisis de los Modelos de Computación Lingüística 38

2.1.1 Modelo Computacional Lingüístico Basado en el Principio de Extensión 38

2.1.2 Modelo Computacional Lingüístico Simbólico 39

2.1.3 Proceso de TDME Usando el Modelo Basado en el Principio de Extensión y el Modelo el Simbólico 41
2.2 Un Modelo de Representación Lingüística con 2-tuplas 48
2.2.1 La Traslación Simbólica. Una Representación Lingüística con 2-tuplas 48
2.2.2 Modelo Computacional Lingüístico para la Representación con 2-tuplas 50
2.3 Operadores de Agregación para 2-tuplas Lingüísticas 52
2.3.1 Operadores de Agregación Simbólicos Extendidos sobre 2-tuplas Lingüísticas 52
2.3.2 Operadores de Agregación para 2-tuplas Basados en Operadores de Agregación Numéricos 55
2.4 Proceso TDME Usando el Modelo Basado en 2-tuplas Lingüísticas 59
2.4.1 Modelo de Decisión 60
2.4.2 Análisis Comparativo 61
2.5 Comentarios Finales 61

3 Agregación de Información Lingüística Multigranular 63

3.1 Fuentes de Información con Valoraciones Lingüísticas Multigranulares . . . 64
3.2 Proceso de Agregación para Información Lingüística Multigranular Basado en la Representación con 2-tuplas 65
3.2.1 Expresión de la Información de Forma Uniforme 67
3.2.1.1 Conversión de Etiquetas Lingüísticas en Conjuntos Difusos sobre el Conjunto Básico de Términos Lingüísticos 68
3.2.1.2 Conversión de Conjuntos Difusos en 2-tuplas Lingüísticas . 69
3.2.2 Agregación de 2-tuplas 70
3.2.3 Vuelta Atrás 71
3.3 Problema de TDME con Información Lingüística Multigranular 74
3.3.1 Proceso de Decisión 76
3.3.2 Aplicación del Proceso de Decisión 76
3.4 Comentarios Finales 80

4 Integración de Información Lingüística y Numérica 83

4.1 El Problema de la Integración de Información Numérica y Lingüística . . . 84

4.2 Proceso de Agregación de Información Numérica y Lingüística Basado en el Modelo de Representación Lingüística con 2-tuplas 85

4.2.1 Funciones de Transformación entre Valores en [0,1] y 2-tuplas Lingüísticas 87

4.2.1.1 Función de Transformación de un Valor en [0,1] a una 2-tupla en S 87

4.2.1.2 Función de Transformación de una 2-tupla Lingüística a un Valor en [0,1] 91

4.2.1.3 Condiciones para que las Transformaciones entre Valores [0,1] y 2-tuplas Lingüísticas en S Sean Biyectivas 92

4.2.2 Agregación de Información Numérica y Lingüística 96

4.2.2.1 Unificación de Información Numérica y Lingüística en 2-tuplas Lingüísticas 98

4.2.2.2 Agregación de 2-tuplas Lingüísticas 100

4.2.2.3 Vuelta Atrás 100

4.3 Problema de TDMC con Información Lingüística y Numérica 103

4.3.1 Proceso de Decisión 104

4.3.2 Aplicación del Proceso de Decisión 104

4.4 Comentarios Finales 106

5 Aplicación: Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en Biotecnología 107

5.1 Estrategia de Transferencia de Tecnología 108

5.2 Definición de un Problema de Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en Biotecnología 110

5.3 Método de Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en un Problema de Biotecnología 112

5.4 Resolución del Problema de Selección de Transferencia de Tecnología en Biotecnología 113

5.4.1 Ejemplo para la Selección de Transferencia de Tecnología en Biotecnología 113
5.4.2 Resolución con el Modelo Basado en el Principio de Extensión . . . 116
5.4.3 Resolución Basada en el Modelo de Representación Lingüístico con 2-tuplas 119
5.5 Estudio Comparativo 124
5.5.1 Ventajas del método basado en 2-tuplas 125

Conclusiones **127**

A Cuantificadores Lingüísticos Difusos **131**

B Valores Característicos **135**

Bibliografía **138**

Introducción

Motivación

La valoración de preferencias es un elemento fundamental en el desarrollo de las actividades cotidianas de los humanos, ya que se utiliza para expresar conocimiento, gustos, afinidades, etc., sobre distintos aspectos que presentan dichas actividades. El modelado de preferencias es una actividad indispensable en problemas relacionados con la Toma de Decisiones, la Economía, la Sociología, la Psicología, etc. Dependiendo del tipo de aspectos que presente un problema determinado, *cuantitativos o cualitativos*, así será la naturaleza de la información utilizada para modelar dichos aspectos. Cuando se intentan modelar aspectos cuantitativos (longitud, superficie, ...) el uso de información numérica suele ser habitual a la hora de realizar la modelización de las preferencias, mientras que cuando intentamos modelar aspectos cualitativos (confort, diseño, ...), la información numérica no se presenta como una buena opción ya que son aspectos difíciles de valorar mediante un valor exacto. En este último caso el uso del "Enfoque Lingüístico Difuso" [99], que utiliza conceptos de la "Teoría de Conjuntos Difusos" [31, 98], nos ayuda a modelar este tipo de preferencias, hablándose de *Modelado Lingüístico de Preferencias* [2, 5, 7, 13, 22, 28, 36, 66, 79, 81, 89].

En el Modelado Lingüístico de Preferencias se utilizan *"variables lingüísticas"* [99], variables cuyos valores no son números sino palabras o frases tomadas de un lenguaje natural o artificial. Estos valores, denominados *"etiquetas lingüísticas"* son valores en un Universo del Discurso discreto, menos precisos que los valores numéricos, y se adaptan mejor a la hora de caracterizar aspectos complejos o mal definidos.

Como se ha indicado, una de las áreas en las que se utiliza frecuentemente el modelado de preferencias es la Toma de Decisiones [34, 73, 74, 103]. El esquema de resolución de cualquier problema de *Toma de Decisiones*, donde intervienen varios expertos y/o criterios, tiene las dos fases siguientes (Ver Figura 1) [75]:

1. *Un proceso de agregación.* En el que se transforma un conjunto de valores de preferencias marginales asociadas a diferentes expertos y/o criterios en un conjunto de valores de preferencia colectiva aplicando un operador de agregación.

2. *Un proceso de explotación.* A partir de los valores de preferencia colectiva y aplicando un criterio de selección se obtiene un conjunto solución.

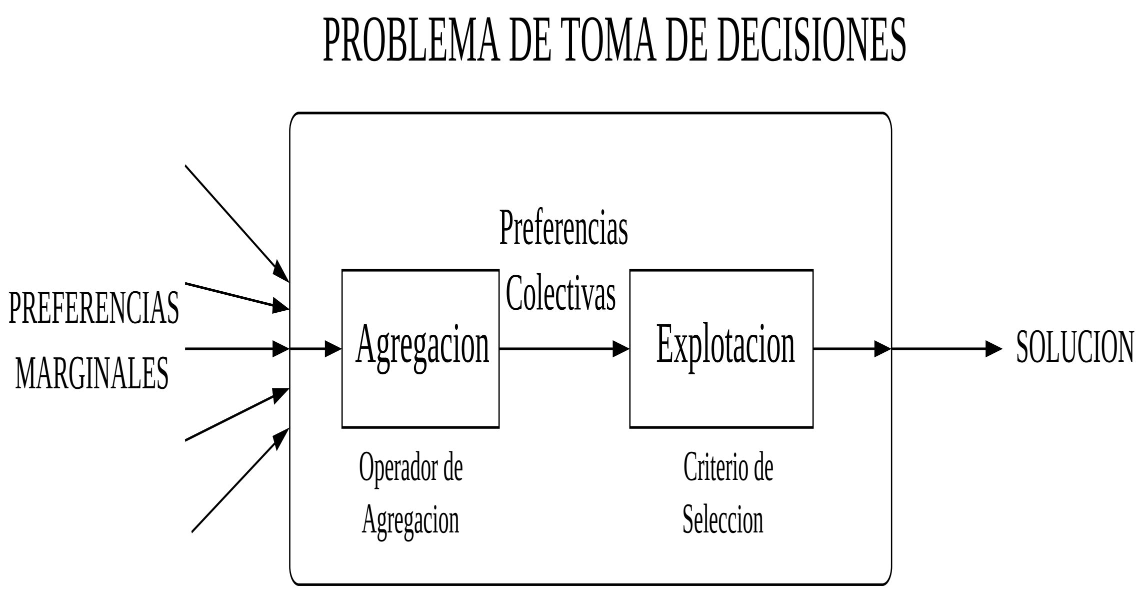

Figura 1: Fases de un Proceso de Toma de Decisión

En los problemas de Toma de Decisiones donde la información se presenta mediante preferencias lingüísticas, precisan de un operador de agregación de información lingüística para llevar a cabo la fase de agregación. En la literatura existe una gran variedad de operadores de agregación lingüística [6, 23, 28, 41, 83, 95]. Estos operadores presentan una serie de problemas y limitaciones, tales como:

- *Pérdida de información.* Existen dos modelos computacionales para operar sobre las etiquetas lingüísticas:

1. Modelo basado en el Principio de Extensión.

   Cuando la semántica de las etiquetas está definida por conjuntos difusos [99] se puede utilizar el Principio de Extensión [99] para operar sobre éstos. El uso de la aritmética difusa desarrollada a partir del Principio de Extensión en [31] puede incrementar la imprecisión de los resultados (números difusos) y hacer que no coincidan con ninguno de los números difusos que definen la semántica de las etiquetas lingüísticas iniciales. En ese caso, se lleva a cabo un proceso de aproximación lingüística [6, 28] que identifica el número difuso obtenido en las operaciones con el número difuso más cercano asociado a una etiqueta inicial.

2. Modelo Simbólico.

   Los operadores actúan, en este caso, sobre una valoración del orden que ocupa la etiqueta en el conjunto de términos lingüísticos (valor discreto numérico) [23], obteniendo resultados en un dominio continuo (intervalo de valores de $\mathcal{R}$), por lo que éstos pueden no coincidir con ningún valor asociado al orden que ocupa una etiqueta. En tal caso, hay que hacer una aproximación del resultado al valor discreto más cercano que represente a una etiqueta.

En estos dos modelos se observa que al operar sobre información lingüística se produce una "pérdida de información" debido a las operaciones de aproximación, que afecta a la precisión de los resultados finales.

- *Dificultad en la agregación de información lingüística multigranular.* Un aspecto importante a tener en cuenta al trabajar con información lingüística es la *"granularidad de la incertidumbre"*, que es la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos utilizado para valorar las variables lingüísticas. En problemas con múltiples expertos puede ocurrir que la información con la que se modelan las preferencias lingüísticas esté valorada en conjuntos de etiquetas con distinta granularidad, a este tipo de información lo denominamos información lingüística multigranular [48]. En los modelos computacionales asociados al Enfoque Lingüístico Difuso (modelo basado en el Principio de Extensión y modelo Simbólico) no existe un proceso de normalización estándar, ni operadores de agregación para este tipo de información, por lo que agregar este tipo de información es una tarea difícil de llevar a cabo.

- *Dificultad en la integración de información lingüística y numérica.* En problemas con múltiples expertos o criterios pueden aparecer contextos en los que las preferencias estén valoradas mediante valores numéricos y lingüísticos. Esto puede ser debido o bien a que el problema presente aspectos tanto cualitativos como cuantitativos, o bien a que los expertos participantes provengan de áreas de conocimiento distintas y prefieran expresar sus preferencias en dominios de distinta naturaleza. En la literatura existen intentos de afrontar este tipo de problemas [25, 96], pero en este tipo de contextos no existen mecanismos de normalización de información que garanticen que no se produce pérdida de información en el proceso de agregación.

Debido a estas razones, parece lógico y adecuado desarrollar un nuevo modelo de representación de información lingüística junto con un modelo computacional asociado que nos permita operar con información lingüística sin que se produzca ninguna pérdida de información. Además, este modelo de representación debería permitir el desarrollo de procesos de agregación que faciliten la combinación de información lingüística multigranular y la integración de información numérica y lingüística.

Objetivos

Nos planteamos el siguiente doble objetivo:

- El desarrollo de un nuevo modelo de representación de información lingüística basado en una representación de 2-tuplas junto con una técnica computacional que subsane algunas de las limitaciones del modelado lingüístico de preferencias tales como, la pérdida de información en los procesos de agregación.

- El desarrollo de herramientas y procesos que permitan la *"combinación"* de información en cualquier contexto en el que participe información de naturaleza lingüística, tales como la agregación de información lingüística multigranular y la integración de información numérica y lingüística.

Resumen

La presente memoria se encuentra estructurada en cinco capítulos. A continuación presentamos un breve resumen de los mismos:

- En el Capítulo 1, se presenta una revisión del "Enfoque Lingüístico Difuso" [99]. Para ello, en primer lugar, se hace un breve repaso de la "Teoría de los Conjuntos Difusos" y de sus conceptos básicos. En segundo lugar hacemos una revisión exhaustiva del elemento básico del Enfoque Lingüístico Difuso, *las variables lingüísticas*, y las distintas formas de generar su sintáxis y su semántica. También se presenta una descripción de las principales áreas de aplicación donde se utilizan variables lingüísticas, centrándonos en el Modelado Lingüístico de Preferencias y sus aplicaciones. Para finalizar el Capítulo, se presentan algunos problemas de Toma de Decisiones que se utilizarán a lo largo de esta memoria.

- En el Capítulo 2, se analizan los distintos modelos computacionales que existen en la literatura para operar con preferencias lingüísticas:

  1. Modelo basado en el Principio de Extensión.
  2. Modelo Simbólico.

  Analizando cuáles son sus principales problemas y limitaciones a la hora de operar con información lingüística. Seguidamente se presenta un nuevo modelo de representación para información lingüística con 2-tuplas, basado en el concepto de *Traslación Simbólica*, junto con un modelo computacional que aporta soluciones a algunas de las limitaciones de los modelos anteriores. Para finalizar se hace un análisis comparativo de los tres modelos computacionales sobre un problema de Toma de Decisiones.

- En el Capítulo 3, estudiamos la agregación de información lingüística multigranular. Para ello estudiamos los problemas que nos encontramos cuando operamos con este tipo de información en procesos de agregación. A continuación, presentamos un proceso para combinar este tipo de información, tomando como base el modelo de representación de información lingüística con 2-tuplas. Por último, se presenta

un ejemplo de combinación de información lingüística multigranular aplicado a un problema de Toma de Decisiones Multiexperto que utiliza este tipo de información.

- En el Capítulo 4, abordamos la integración de información numérica y lingüística en procesos de agregación. Presentamos un conjunto de funciones de transformación sin pérdida de información entre valores numéricos, lingüísticos y 2-tuplas lingüísticas. A partir de las funciones de transformación proponemos un proceso de combinación de información numérica y lingüística. Finalmente, éste es aplicado a un problema de Toma de Decisiones Multicriterio.

- En el Capítulo 5, presentamos un estudio comparativo de un modelo clásico de representación de información lingüística y el modelo basado en 2-tuplas. Para ello presentamos un problema de Toma de Decisiones Multiexperto-Multicriterio de *Selección de Estrategias de Transferencia de Tecnología aplicada a la Biotecnología.* Dicho problema será resuelto con un enfoque clásico basado en el Principio de Extensión y con el enfoque basado en el modelo de representación con 2-tuplas. Se compararán ambas soluciones y haremos un estudio de las ventajas del nuevo modelo.

- Finalmente, se presentan las conclusiones más relevantes obtenidas a lo largo de la memoria y una breve descripción de las líneas futuras de desarrollo a partir de la misma. La memoria finaliza con una recopilación bibliográfica que recoge las contribuciones más destacadas en la materia estudiada.

Capítulo 1

Conjuntos Difusos y Variables Lingüísticas. Modelado de Preferencias

En este Capítulo presentamos una breve revisión de conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos que son utilizados a lo largo de la memoria. Estudiaremos el concepto de Variable Lingüística y su aplicación al Modelado de Preferencias. Analizaremos las estructuras de representación de preferencias lingüísticas y su aplicación. Finalmente presentaremos algunos modelos de Toma de Decisiones que utilizaremos en los siguientes capítulos.

1.1 Nociones y Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos

La Teoría de los Conjuntos Difusos tiene una más que breve existencia ya que las primeras publicaciones, en las que se introducía la idea clave de conjunto difuso, se produjeron en la decada de los 60 [98]. El interés de la Teoría de Conjuntos Difusos se centra esencialmente en modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Probabilidades resultan insuficientes o no operativos. Para ello dicha teoría generaliza la noción clásica de conjunto e introduce el concepto de "difusicidad" (fuzziness). Los conjuntos difusos surgen como una nueva forma de representar la imprecisión y la incertidumbre [58, 103]. A lo largo de las tres décadas de existencia de la Teoría de Conjuntos

Difusos, gran cantidad de investigadores le han prestado atención en sus investigaciones, y puede indicarse que dicha teoría se ha desarrollado a lo largo de dos líneas o vertientes principales [73]:

1. Como una teoría matemática formal [52, 71], generalizando la Teoría de Conjuntos y la Lógica Multivaluada, que ha ampliado los conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como el Algebra, la Teoría de Grafos, la Topología, etc., aplicando conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos a dichas áreas.

2. Como un potente modelador del lenguaje [99], que puede utilizarse en un gran número de situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre. Debido a la generalidad de esta teoría se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas: Teoría de Sistemas [72], Teoría de la Decisión [34], Bases de Datos [97], etc. En muchas ocasiones esto significará, sin embargo, la especificación y desarrollos dependientes del contexto de los conceptos originales de la Teoría de Conjuntos Difusos.

A continuación, vamos a introducir una serie de conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos necesarios para el seguimiento de las definiciones y procesos que se presentarán a lo largo de esta memoria.

1. Conjuntos Difusos y Función de Pertenencia

La noción de conjunto refleja la tendencia a organizar, resumir y generalizar el conocimiento sobre los objetos del mundo real. Se puede incluso especular con que la naturaleza de cualquier principio humano es organizar y clasificar sistemáticamente la información de la diversidad en cualquier ambiente, entorno, o contexto. El encapsulamiento de los objetos es una colección cuyos miembros comparten una serie de características o propiedades que implican la noción de conjunto. Los conjuntos introducen una noción fundamental de *dicotomía*. En esencia, cualquier proceso de dicotomización es una clasificación binaria: o se acepta o se rechaza que un objeto pertenece a una categoría determinada. Normalmente la decisión de *aceptar* se nota por “1” y la de *rechazar* por “0” en resumen, una decisión de clasificación puede expresarse a través de una función característica.

Definición 1.1. *Sea A un conjunto en el universo X, la función característica asociada a A, $A(x)$, $x \in X$, se define como:*

$$A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

La función $A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ induce una restricción, con un límite bien definido, sobre los objetos del universo X que pueden ser asignados al conjunto A. El concepto de conjunto difuso lo que hace es *relajar* este requerimiento y admite valores intermedios en la función característica, que pasa a denominarse función de pertenencia.

Esto permite una interpretación más realista de ciertos contextos de trabajo. La mayoría de las categorías que describen los objetos del mundo real no tienen unos límites claros y bien definidos, por ejemplo, ordenador *potente*, *buen* sabor, coche *veloz*, etc. (las palabras en itálica identifican fuentes de imprecisión). Si un objeto pertenece a una categoría es con un grado, el cuál, puede ser expresado por un número real en el intervalo $[0, 1]$. Cuanto más cercano a 1 sea el grado, indicará mayor pertenencia a una categoría determinada y cuanto más cercano a 0 indicará menor pertenencia a dicha categoría.

2. Definición Básica de Conjunto Difuso

Un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión completa) y 1 (pertenencia completa). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir los conjuntos difusos como sigue:

Definición 1.2. [98] *Un conjunto difuso $\tilde{A}$ sobre X está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio, espacio, o universo del discurso X en el intervalo $[0, 1]$.*

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1].$$

Así, un conjunto difuso $\tilde{A}$ en X puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico x, $x \in X$, y su grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\tilde{A} =$

$\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))/\ x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]\}$. Claramente, un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto cuya función de pertenencia toma sólo dos valores $\{0,1\}$.

Por ejemplo, consideremos el concepto "coche *veloz*", en un contexto donde la velocidad oscila en el intervalo $[0,120]$ definida en km/h. Claramente, un coche cuya velocidad máxima sea 10 km/h no es un coche *veloz* y se le asignará un valor de cero a su grado de pertenencia al conjunto de coches veloces. Un coche con velocidad máxima superior a 90 km/h puede considerarse un coche veloz y asignarle un valor 1 para expresar el grado de compatibilidad con el concepto. Por tanto, velocidades en el rango $[90,120]$ tienen un grado de pertenencia igual a 1 en el conjunto de coches veloces. La cuantificación del resto de valores puede llevar puede llevarse a cabo mediante una función de pertenencia $\mu_{\tilde{H}} : V \longrightarrow [0,1]$ que caracteriza el conjunto difuso $\tilde{H}$ de coches veloces en el universo $V = [0,120]$.

$$\mu_{\tilde{H}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,10] \\ 1 - \frac{90-x}{80} & x \in (10,90) \\ 1 & x \in [90,120]. \end{cases}$$

Los conjuntos difusos pueden verse pues, como restricciones elásticas impuestas sobre los elementos de un universo o dominio. Pueden ser definidos sobre universos finitos o infinitos usando distintas notaciones. Si un universo X es discreto y finito, con cardinalidad n, el conjunto difuso puede expresarse con un vector *n-dimensional* cuyos valores son los grados de pertenencia de los correspondientes elementos de X. A veces, se utiliza una notación de sumatoria. Esta nos permite enumerar sólo los elementos de X con grados distintos de cero en el conjunto difuso. Por ejemplo, si $X = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces un conjunto difuso $\tilde{A} = \{(a_i/x_i)|x_i \in X\}$, donde $a_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i), i = 1, ..., n$, puede notarse por [58]:

$$\tilde{A} = a_1/x_1 + a_2/x_2 + ... + a_n/x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i/x_i.$$

Cuando el universo X es continuo, para representar un conjunto difuso usamos la siguiente expresión:

$$\tilde{A} = \int_x a/x,$$

donde $a = \mu_{\tilde{A}}(x)$ y la integral debería ser interpretada de la misma forma que el sumatorio en el universo finito.

A continuación, introducimos dos conceptos básicos a la hora de trabajar con conjuntos difusos, como son el soporte y el α-corte de un conjunto difuso:

Definición 1.3. *El soporte de un conjunto difuso $\tilde{A}$, $Support(\tilde{A})$, es el conjunto de todos los elementos de $x \in X$, tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero.*

$$Support(\tilde{A}) = \{x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Definición 1.4. *Sea $\tilde{A}$ un conjunto difuso sobre el universo X, dado un número $\alpha \in [0,1]$. Se define el α-corte sobre $\tilde{A}$, ${}^{\alpha}A$, como un conjunto clásico que contiene todos los valores del universo X cuya función de pertenencia en $\tilde{A}$ sea mayor o igual al valor α:*

$${}^{\alpha}A = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

3. Tipos de Funciones de Pertenencia

En principio cualquier forma de la función $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$, describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso $\tilde{A}$ que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Las gráficas de las funciones pueden tener diferentes representaciones o formas, y pueden tener algunas propiedades específicas (ej., continuidad). Sea una representación adecuada, se puede determinar sólo en el contexto de la aplicación. En ocasiones, sin embargo, la semántica capturada por los conjuntos difusos no es muy sensible a variaciones en la forma, y son convenientes funciones simples.

En muchos casos prácticos, los conjuntos difusos pueden representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son las siguientes:

1. **Función Triangular:**

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ \frac{c-x}{c-b} & si\ x \in [b,c] \\ 0 & si\ x \geq c, \end{cases}$$

donde b es el punto modal de la función triangular, con a y c siendo los límites inferior y superior, respectivamente, para los valores no nulos de $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

2. **Función Trapezoidal:**

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 1 & si\ x \in [b,d] \\ \frac{c-x}{c-d} & si\ x \in [d,c] \\ 0 & si\ x \geq c, \end{cases}$$

donde b y d indican el intervalo dónde la función de pertenencia vale 1.

3. **Función Gaussiana:**

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2},$$

donde $k > 0$.

4. Número Difuso

Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen una especial significación aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales, $\mathcal{R}$.

$$\tilde{A} : \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$$

Bajo ciertas condiciones estos conjuntos difusos pueden ser vistos como *"números difusos"* o *"intervalos difusos"*. Para denominar a un conjunto difuso $\tilde{A}$ sobre $\mathcal{R}$ como un número difuso, debe de poseer al menos las siguientes tres propiedades:

1. $\tilde{A}$ debe ser un conjunto difuso convexo normalizado.

2. Para cualquier $\alpha \in (0,1]$, ${}^{\alpha}A$ debe ser un intervalo cerrado.

3. El soporte de $\tilde{A}$ debe ser finito.

Las formas de las funciones de pertenencia más habituales para representar números difusos son las funciones triangulares y trapezoidales, sin embargo en ciertas aplicaciones es preferible utilizar otro tipo de funciones.

5. El Principio de Extensión

Es un concepto básico de la Teoría de Conjuntos Difusos, el cuál se utiliza para generalizar conceptos matemáticos no difusos a conjuntos difusos. A lo largo del tiempo han aparecido diferentes formulaciones de este concepto [54, 58, 99]. A continuación se da una definición del mismo:

Definición 1.5. [99] *Sea* X *el producto cartesiano de los universos* $X_1, ..., X_r$ *y sean* $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_r$ r *conjuntos difusos en* $X_1, ..., X_r$ *respectivamente. Sea* f *una función definida desde el universo* X*,* $(X = X_1 \times ... \times X_r)$*, al universo* Y*,* $y = f(x_1, ..., x_r)$*. El Principio de Extensión nos permite definir un conjunto difuso* $\tilde{B}$ *en* Y*, a partir de los conjuntos difusos* $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_r$ *representando su imagen a partir de la función* f*, de acuerdo a la siguiente expresión,*

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(x_1, ..., x_r), (x_1, ..., x_r) \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1,...,x_r)\in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\}, & si \;\; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Para $r = 1$*, el Principio de Extensión se reduce a:*

$$\tilde{B} = f(A) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(x), x \in X)$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & si \;\; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

1.2 Variables Lingüísticas

En los diferentes problemas que nos podemos encontrar en el mundo real, la información que manejamos puede tener diferentes rangos de valoración y los valores pueden tener distinta naturaleza. En ocasiones, la información que manipula un problema puede que no sea fácil de valorar de forma precisa mediante un valor cuantitativo (un número), sin embargo, puede ser fácilmente valorada en forma cualitativa. En este caso, suele ocurrir que el uso de un enfoque lingüístico difuso se adapte mejor que un enfoque numérico. Por ejemplo, cuando intentamos evaluar fenómenos relacionados con la percepción subjetiva (*diseño, gusto, ...*) solemos utilizar palabras del lenguaje natural (*bonito, feo, dulce, salado, ...*) en lugar de valores numéricos. Tal y como se indica en [17], ésto puede ocurrir por diversas razones.

1. Hay situaciones en las que la información puede ser incuantificable debido a su naturaleza, y así, sólo puede "medirse" utilizando términos lingüísticos (ej., cuando se evalua el "confort" o el "diseño" de un coche [63], el uso de términos como "bueno", "medio", "malo" suelen ser habituales).

2. Existen otras ocasiones, en las que información cuantitativa no puede medirse porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta de esa información, o porque el coste de su medida es muy elevado, por tanto, el uso de un "valor aproximado" es aceptado (ej., imaginemos la evaluación de la velocidad de un coche, términos lingüísticos como "rápido", "muy rápido", "despacio" pueden utilizarse en lugar de valores numéricos).

El Enfoque Lingüístico Difuso es un enfoque aproximado, que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Conjuntos Difusos. Este enfoque representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante *variables lingüísticas* [99].

Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o *etiqueta* y por un *valor semántico* o *significado*. La etiqueta es una palabra o frase perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo del discurso. Al ser las palabras menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística parece una buena propuesta para caracterizar a aquellos fenómenos que son demasiado complejos o están mal definidos para poder ser evaluados mediante valores numéricos precisos. Formalmente, se definen como sigue:

Definición 1.6. [99] *Una variable lingüística está caracterizada por una quíntupla $(H, T(H), U, G, M)$, donde H es el nombre de la variable; $T(H)$ (o sólo T) simboliza el conjunto de términos de H, es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de H, donde cada valor es una variable difusa notada genéricamente como X y que varía a lo largo del universo del discurso U, el cuál está asociado con una variable base llamada u;*

G es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los nombres de los valores de H; y M es una regla semántica para asociar significado M(X), a cada elemento de H, el cuál es un conjunto difuso de U.

En la práctica, existen dos posibilidades para elegir los descriptores lingüísticos apropiados del conjunto de términos y su semántica:

1. La primera posibilidad consiste en definir el conjunto de términos lingüísticos mediante una *gramática libre de contexto*, y su semántica mediante números difusos descritos por una función de pertenencia parametrizada y por reglas semánticas [5, 7, 99].

2. La segunda posibilidad define el conjunto de términos lingüísticos usando una estructura ordenada de etiquetas, y la semántica de los términos lingüísticos se deriva de la propia estructura ordenada; la cuál puede estar uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$ o no [8, 25, 37, 82, 91, 93].

1.2.1 Elección del Conjunto de Términos Lingüísticos

El objetivo de establecer los descriptores lingüísticos de una variable lingüística es proporcionar a una fuente de información un número reducido de términos con los cuáles pueda expresar con facilidad su información y/o conocimiento. Para cumplimentar este objetivo hay que analizar un aspecto muy importante, tal y como es, *la granularidad de la incertidumbre* [6], esto es, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usado para expresar la información.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos debe ser lo suficientemente pequeño como para no imponer una restricción de precisión a la información que quiere expresar cada fuente de información, y lo suficientemente grande para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Valores típicos de cardinalidad usados en modelos lingüísticos son valores impares, tales como 7 ó 9, con un límite superior de granularidad de 11 ó no más de 13, donde el término medio representa una valoración de "aproximadamente 0.5", y con el resto de los términos simétricamente distribuidos a su alrededor [6]. Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de Miller sobre la capacidad humana, en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de siete o nueve términos [70].

Una vez establecida la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos hay que proveer un mecanismo para generar los términos lingüísticos. Existen dos enfoques para esto, uno los define con una gramática libre de contexto y el otro mediante un orden total definido sobre el conjunto de términos. A continuación analizamos ambos mecanismos.

1. Enfoque basado en una Gramática Libre de Contexto.

Una posibilidad para generar el conjunto de términos lingüísticos consiste en utilizar una gramática libre de contexto G, donde el conjunto de términos pertenece al lenguaje generado por G [5, 7, 100]. Una gramática generadora, G, es una 4-tupla (V_N, V_T, I, P), siendo V_N el conjunto de símbolos no terminales, V_T el conjunto de símbolos terminales, I el símbolo inicial y P el conjunto de reglas de producción. La elección de estos cuatro elementos determinará la cardinalidad y forma del conjunto de términos lingüísticos. El lenguaje generado debería ser lo suficientemente grande para que pueda describir cualquier posible situación del problema.

De acuerdo con las observaciones de Miller [70], el lenguaje generado no tiene que ser infinito, sino mas bien fácilmente comprensible. Así, estructuras sintácticas complejas, como la recursiva ilimitada que usa siempre la misma regla de producción en un ciclo no terminal (el cuál produce un lenguaje infinito) deberían evitarse.

Por ejemplo, entre los símbolos terminales y no terminales de G podemos encontrar términos primarios (ej.: *alto, medio, bajo*), modificadores (ej.: *no, mucho, muy, más o menos*), relaciones (ej.: *mayor que, menor que*) y conectivos (ej.: *y, o, pero*). Construyendo I como cualquier término primario, el conjunto de términos lingüísticos $H = \{muy\ alto,\ alto,\ alto\ o\ medio, ...\}$ se genera usando P. P puede ser definida en una forma extendida de Backus Naur (ver [7] para un ejemplo).

2. Enfoque basado en Términos Primarios con una Estructura ordenada.

Una alternativa para reducir la complejidad de definir una gramática consiste en dar directamente un conjunto de términos, considerándolos a todos como primarios y distribuidos sobre una escala con un orden total definido [8, 37, 91, 93]. Por ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de siete etiquetas:

$$S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$$

$$s_0 = N = Nada \quad s_1 = MB = Muy\_Bajo$$
$$s_2 = B = Bajo \quad s_3 = M = Medio$$
$$s_4 = A = Alto \quad s_5 = MA = Muy\_Alto \quad s_6 = P = Perfecto$$

donde $s_a < s_b$ si y sólo si $a < b$.

1.2.2 Semántica de un Conjunto de Términos Lingüísticos

En la literatura encontramos tres posibilidades para definir la semántica del conjunto de términos lingüísticos:

1. Semántica basada en la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos.

2. Semántica basada en funciones de pertenencia.

3. Semántica intervalar basada en la función de negación.

Estas posibilidades son analizadas a continuación.

1. Semántica basada en la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos.

En [8, 91] se muestra la posibilidad de definir la semántica de las etiquetas de un conjunto ordenado de términos, utilizando el orden total junto con las siguientes características que debe cumplir el conjunto de etiquetas:

1. Existe un operador de negación. Por ejemplo, $Neg(s_i) = s_j$, $j = g - i$ (g+1 es la cardinalidad de S).

2. Tiene un operador de maximización: $\max(s_i, s_j) = s_i \ si \ s_i \geq s_j$.

3. Tiene un operador de minimización: $\min(s_i, s_j) = s_i \ si \ s_i \leq s_j$.

En realidad lo que se utiliza es una escala que provee un orden tal que, $s_i > s_j$ si $i > j$. Un ejemplo de esta semántica es el siguiente [91]:

$$\begin{array}{ll} Perfecto = P & s_6 \\ Muy\_Alto = MA & s_5 \\ Alto = A & s_4 \\ Medio = M & s_3 \\ Bajo = B & s_2 \\ Muy\_Bajo = MB & s_1 \\ Nulo = N & s_0. \end{array}$$

2. Semántica basada en funciones de pertenencia.

Este enfoque define la semántica del conjunto de términos lingüísticos utilizando números difusos en el intervalo $[0, 1]$, dónde cada número difuso es descrito por una función de pertenencia [6, 7, 15, 22, 61, 79].

Un método eficiente desde un punto de vista computacional para caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de su función de pertenencia [5]. Debido a que las valoraciones lingüísticas dadas por las fuentes de información son aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones de pertenencia trapezoidales son lo suficientemente buenas para representar la vaguedad de dichas valoraciones lingüísticas. Además puede ser innecesario o imposible obtener valores mas ajustados [5, 6, 22, 79, 80]. Esta representación paramétrica se expresa usando una 4-tupla (a, b, d, c). Los parámetros "b" y "d" indican el intervalo en el que la función de pertenencia vale 1; mientras que "a" y "c" indican los extremos izquierdo y derecho de la función de pertenencia [5]. Un caso especial de este tipo de funciones de pertenencia son las funciones de pertenencia triangulares, en las que $b = d$, por lo que se representan mediante una 3-tupla (a,b,c), donde "b" es el valor donde la función de pertencia vale 1, mientras que "a" y "c" indican los extremos izquierdo y derecho de la función.

Por ejemplo, en [6] se propone la siguiente semántica para un conjunto de nueve términos (Figura 1.1):

$$I = Imposible = (0, 0, 0, 0)$$
$$EI = Extremadamente\_Improbable = (0, .01, .02, .07)$$
$$PMB = Posibilidad\_Muy\_Baja = (.04, .1, .16, .21)$$
$$PP = Poca\_Posibilidad = (.17, .2, .36, .42)$$
$$PS = Puede\_Ser = (.32, .41, .58, .65)$$
$$CP = Cierta\_Posibilidad = (.58, .63, .8, .86)$$
$$MP = Muy\_Probable = (.73, .78, .92, .97)$$
$$EP = Extremadamente\_Posible = (.93, .98, .99, 1)$$
$$C = Cierto = (1, 1, 1, 1).$$

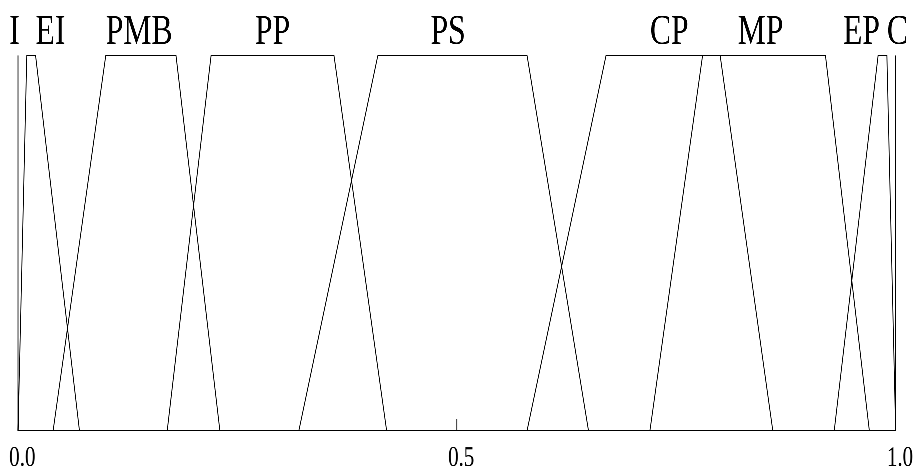

Figura 1.1: Conjunto etiquetas con semántica basada en la función de pertenencia

Otros autores usan representaciones no trapezoidales, por ejemplo, funciones Gaussianas [7].

Un caso particular, es cuando tenemos una extensión del enfoque basado en la estructura ordenada de términos lingüísticos. Para ello se utiliza un conjunto de números difusos uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1]$. La Figura 1.2 muestra un ejemplo de este caso particular.

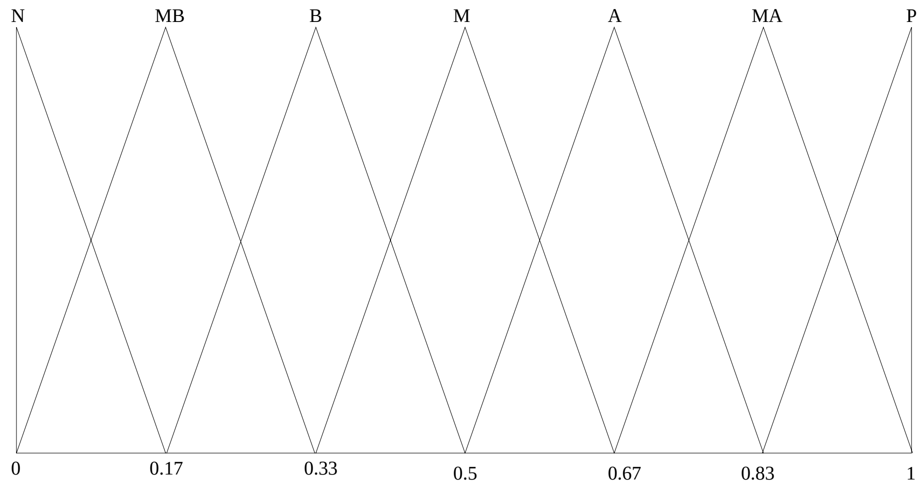

Figura 1.2: Conjunto de etiquetas uniformemente distribuido

Este enfoque implica establecer las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta. Esta tarea presenta el problema de determinar los parámetros según todos los puntos de vista de las fuentes de información. En la realidad, parece difícil aceptar que todas las fuentes de información propongan exactamente las mismas funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos primarios, hay que aceptar que no existe una distribución universal de conceptos. Por ejemplo, en la Figura 1.3, vemos dos percepciones muy cercanas de la misma evaluación.

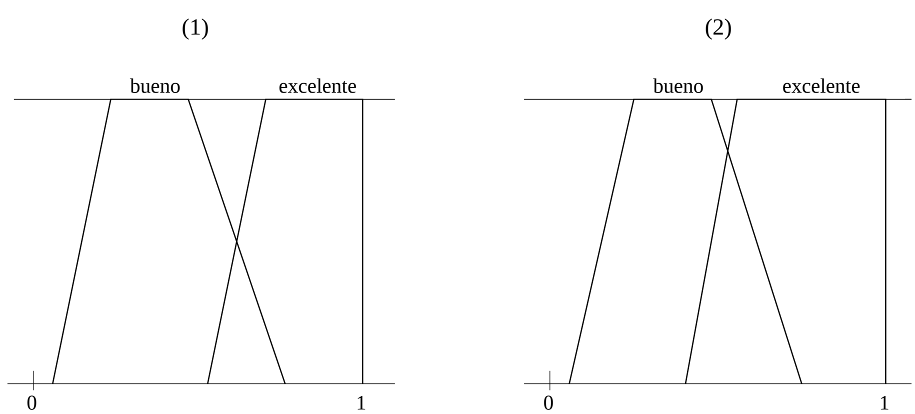

Figura 1.3: Distribuciones diferentes de Conceptos

Por tanto, pueden darse situaciones de términos lingüísticos con una sintáxis similar y diferente semántica [48]. Más aún, no siempre es posible para las fuentes de información definir un conjunto difuso para cada etiqueta primaria porque requiera un exceso de precisión que la fuente de información no es capaz de proporcionar. Por tanto, muchas veces consideramos entornos donde las fuentes de información pueden discriminar sin problemas el mismo conjunto de términos lingüísticos bajo una concepción parecida, teniendo en cuenta que el concepto de variable lingüística sirve para expresar una medida de una caracterización aproximada de información para una preferencia imprecisa [36].

3. Semántica intervalar basada en la función de negación.

Otros autores proponen generar la semántica de las etiquetas lingüísticas utilizando funciones de negación que inducen una semántica para cada etiqueta [82, 84], estando éstas definidas como intervalos en $[0, 1]$.

En [82] se hace un estudio de las funciones de negación que se definen sobre los conjuntos ordenados de etiquetas, donde cada etiqueta es un subdominio del dominio de definición del conjunto de etiquetas, usualmente $[0, 1]$. Se observa que las funciones de negación clásicas [68] presentan ciertos problemas cuando se asume que un subdominio puede ser más informativo que el resto de los subdominios [82]. En este caso, la densidad de las etiquetas en ese subdominio debería ser mayor que la densidad en el resto del dominio, es decir, el conjunto ordenado de términos no estaría uniformemente distribuido.

Para clarificar esta aproximación presentamos el ejemplo propuesto en [82]. Consideremos un sistema de control al que se le pide una temperatura exigiendo un comportamiento muy preciso cuando, el valor de la temperatura es "Bajo". Entonces, el conjunto de etiquetas tendría una distribución de etiquetas similar a la mostrada en la Figura 1.4 (en la Fig. 1.4, CN=Casi-Nada y PB=Poco-Bajo).

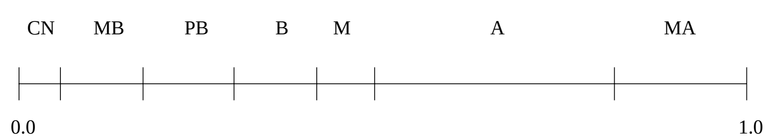

Figura 1.4: Conjunto etiquetas no uniforme

Para estas situaciones, en [82] se propone un método que induce la semántica usando una función de negación definida a partir del conjunto de etiquetas para particionarlo. Este método puede construir una semántica para un conjunto de etiquetas si la fuente de información provee los valores de una función de negación para cada etiqueta. Por ejemplo, para el conjunto de etiquetas de la Fig. 1.4, puede definirse la siguiente función de negación:

$$
\begin{aligned}
&Neg(CN) = Neg(MB) = \{MA\}\\
&Neg(PB) = Neg(B) = \{A\}\\
&Neg(M) = \{M\}\\
&Neg(A) = \{PB, B\}\\
&Neg(MA) = \{CN, MB\}.
\end{aligned}
$$

1.2.3 Uso de las Variables Lingüísticas

El enfoque lingüístico difuso ha sido utilizado ampliamente en gran cantidad de aplicaciones, sin embargo, atendiendo a la forma en que se utiliza la información lingüística podemos distinguir dos líneas principales de aplicación:

1. *Sistemas basados en reglas difusas con variables lingüísticas.* Son una extensión de los sistemas Basados en Reglas de proposiciones. Utilizan la Lógica Difusa [58, 103] tanto, para representar distintas formas de conocimiento sobre el problema como, para modelar las interacciones y relaciones existentes entre las variables del mismo. La principal aplicación de estos sistemas inteligentes es el modelado difuso de sistemas [72]. Estos sistemas se han aplicado con éxito a un gran número de problemas reales [3, 30, 51, 72].

2. *Modelado lingüístico de preferencias.* Consiste en utilizar variables lingüísticas para valorar las preferencias sobre las alternativas que presenta un problema, es decir, las estructuras de preferencia son representadas mediante etiquetas lingüísticas [79, 99].

   Este es el área en la que nos centramos a lo largo de esta memoria, y que describiremos con mayor profundidad más adelante en este Capítulo.

1.3 Modelado de Preferencias

El modelado de preferencias es un elemento fundamental en áreas, tales como, la Toma de Decisiones, la Economía, la Psicología, etc. En el modelado de preferencias debemos decidir la representación de las valoraciones de las preferencias dadas por los expertos que participan en el problema. Al hablar de representación en este caso, lo hacemos desde dos puntos de vista claramente diferenciados e igualmente transcendentes, como son:

1. Decidir la naturaleza y el dominio de la información que se va a utilizar para expresar los valores de las preferencias sobre las distintas alternativas del problema. Dependiendo de la opción que se tome aquí podemos hablar de:

   (a) *Modelado binario de preferencias.* Se utilizan dos valores, normalmente $\{0, 1\}$, para expresar la preferencia sobre cada par de alternativas.

   (b) *Modelado de preferencias valorado en* $[0, 1]$. La información utilizada para expresar las preferencias son valores numéricos en el intervalo $[0, 1]$, que modelan la incertidumbre existente en la preferencia de cada alternativa.

   (c) *Modelado difuso de preferencias.* Cuando nos encontramos con problemas que presentan alternativas sobre las que tenemos un conocimiento incierto o impreciso, y se utilizan números difusos para expresar la preferencia sobre las distintas alternativas del problema.

   (d) *Modelado lingüístico de preferencias.* Los valores utilizados para expresar la preferencia sobre las alternativas del problema son etiquetas lingüísticas.

   Nota: distintos autores consideran (b) y (c) con el mismo nombre, modelado difuso de preferencias.

2. Seleccionar la estructura que soportará y dará significado a las preferencias con las que trabajará el problema.

   (a) *Vector de utilidad.* Los valores de preferencia son expresados en un vector, donde cada valor expresa la preferencia para cada una de las alternativas que se están calificando en el problema. Por ejemplo, consideremos un problema con un conjunto de n alternativas $\{x_1, ..., x_n\}$, un vector de utilidad para estas alternativas sería:

$$(y_1, ..., y_n)$$

donde y_1 es la preferencia sobre la alternativa x_1, y_2 es la preferencia sobre la alternativa x_2 y así sucesivamente.

(b) *Relación de preferencia.* En la Teoría Clásica de Preferencias [74], una relación binaria R con respecto a cada par de alternativas (x_i, x_j) de un conjunto A es una relación de preferencia si refleja el grado en que "$\mathbf{x}_i$ *es preferida a* $\mathbf{x}_j$". La estructura que soporta las relaciones de preferencia son matrices cuyos elementos representan el valor de la relación binaria sobre las alternativas correspondientes a la posición que ocupan en la matriz, es decir,

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & x_1 & ... & x_n \\ \hline x_1 & y_{11} & ... & y_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n & y_{n1} & ... & y_{nn} \end{array}\right)$$

donde y_{ij} expresa el grado de preferencia con el que la alternativa x_i es preferido a la alternativa x_j.

1.4 Modelado Lingüístico de Preferencias

El modelado lingüístico de preferencias consiste en representar las preferencias de un problema mediante etiquetas lingüísticas, para a partir de ellas resolver el problema. Esta modelización se ha utilizado con éxito sobre un gran número de problemas, tales como, "Toma de Decisiones" [8, 22, 39, 66, 67, 79, 93], "Selección de Materiales" [18], "Administración de Personal" [47], "Recuperación de Información" [7], "Diagnosis Clínica" [28], "Gestión Comercial" [92], "Planificación y Secuenciación" [2, 57], etc.

A continuación, vamos a estudiar las distintas estructuras de representación que se utilizan en el modelado lingüístico de preferencias para disponer de la información sobre las distintas alternativas del problema y por último presentaremos una tabla en la que aparecen una amplia gama de aplicaciones en las que se ha utilizado el modelado lingüístico de preferencias.

1.4.1 Estructuras para el Modelado Lingüístico de Preferencias

Para expresar las valoraciones lingüísticas, las distintas fuentes de información que participan en un problema pueden utilizar distintos tipos de estructuras:

1. *Vector de utilidad lingüístico.* Cada fuente de información provee un valor para cada alternativa del problema, es decir, se asocia a cada alternativa un valor lingüístico que indica la utilidad, rendimiento, o preferencia de esa alternativa según el punto de vista de la fuente de información [88].

   Ejemplo:
$$\begin{pmatrix} a_1 & MA \\ a_2 & M \end{pmatrix} \Longrightarrow (MA, M).$$

   El vector asigna un valor lingüístico de preferencia a cada alternativa, a_i, que se está evaluando.

2. *Una relación de preferencia lingüística.* Consiste en expresar las preferencias sobre el conjunto de aspectos a valorar mediante una relación binaria, que refleja el grado lingüístico con el que cada alternativa es preferida sobre otra [36].

   Por ejemplo:
$$\left(\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline a_1 & - & A \\ a_2 & B & - \end{array}\right).$$

   Vemos una relación de preferencia sobre dos alternativas (a_1, a_2), que expresa que a_1 es preferida a a_2 con un grado "A", mientras que a_2 es preferida a a_1 con un grado "B".

1.4.2 Aplicaciones

A continuación presentamos una tabla en la que se presenta un resumen de los distintos problemas agrupados por áreas en las que se ha utilizado el modelado lingüístico de preferencias.

Aplicaciones	Ref.	Autores	Título
Toma de Decisión	[22]	M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila	Linguistic Decision-Making Models
	[24]	M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila	A Model for Linguistic Partial Information in Decision-Making Problems
	[53]	M. Ida	Possibility Valuation based on Ordinal Utility
	[77]	L.F. Sugianto, J. Kacprzyk	Linguistic Expression in Decision Making with Uncertain Data
Decisión Multi-criterio (DM)	[12]	C. Carlsson, R. Fuller	On Fuzzy Screening Systems.
	[19]	C. Chen, M. Klein	An Efficient Approach to Solving Fuzzy MADM Problems.
	[29]	G.B. Devedzic, E. Pap	Multicriteria-Multistages Linguistic Evaluation and Ranking of Machine Tools.
	[41]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma	Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information.
	[65]	G.S. Liang	Fuzzy MCDM based on Ideal and Anti-ideal Concepts
	[66]	C.M. Liu, M.J. Wang, Y.S.Pang	A Multiple Criteria Linguistic Decision Model (MCLDM) for Human Decision Making.
	[79]	M. Tong, P. P. Bonissone	A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets.
	[80]	M. Tong, P. P. Bonissone	Linguistic Solutions to Fuzzy Decision Problems.

Aplicaciones	Ref.	Autores	Título
DM	[78]	B. Tisseyre, N. McFarlane, C. Sinfort, R. Tillett, F. Sevilla, A. Carbonneau	Fuzzy MCDM for Long Cane Pruning: A System for Standard and Complex Vine Configurations.
	[86]	R.R. Yager	A New Methodology for Ordinal Multiobjetive Decisions Based on Fuzzy Sets.
	[88]	R.R. Yager	Fuzzy Screening Systems
	[93]	R.R. Yager	An Approach to Ordinal Decision Making.
Decisión en Grupo (DG)	[36]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment.
	[45]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	Choice Processes for Non-Homogeneous Group Decision Making in Linguistic Setting.
	[39]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators.
	[67]	M. Marimin, M. Umano, I. Hatono, H. Tamura	Linguistic Labels for Expressing Fuzzy Preference Relations in Fuzzy Group Decision Making
Consenso en DG	[8]	G. Bordogna, G. Passi	A Linguistic Modeling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA Operators.
	[40]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments.
	[42]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	A Rational Consensus Model in Group Decision Making Using Linguistic Assessments.
	[43]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	Consensus Based on Fuzzy Coincidence for Group Decision Making in Linguistic Setting.

Aplicaciones	Ref.	Autores	Título
Consenso en DG	[44]	F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay	Linguistic Measures Based on Fuzzy Coincidence for Reaching Consensus in Group Decision Making.
	[69]	L. Mich, L. Gaio, M. Fedrizzi	On Fuzzy Logic-Based Consensus in Group Decision Making
Decisión Multi-criterio y Multiexperto (DMM)	[11]	J.J. Buckley	The Multiple Judge, Multiple Criteria Ranking Problem: A Fuzzy Set Approach.
	[91]	R.R. Yager	Non-Numeric Multicriteria Multi-Person Decision Making.
Consenso en DMM	[33]	M. Fedrizzi, L. Mich	Rule Based Model for Consensus Reaching Group Decisions Support.
Recuperación de Información	[7]	G. Bordogna, G. Passi	A Fuzzy Linguistic Approach Generalizing Boolean Information Retrieval: A Model and Its Evaluation.
	[27]	M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, M.J. Martín, M.A. Vila	Combining Linguistic Information in a Distributed Intelligent Agent Model for Information Gathering.
	[94]	R.R. Yager	Protocol for Negotiations among Multiple Inteligent Agents.
Transferencia de Tecnología	[15]	P. Chang, Y. Chen	A Fuzzy Multicriteria Decision Making Method for Technology Transfer Strategy Selection in Biotechnology.
Medicina	[28]	R. Degani, G. Bortolan	The Problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making.
Educación	[59]	C.K. Law	Using Fuzzy Numbers in Educational Grading System.
Gestión Comercial	[92]	R.R. Yager, L.S. Goldstein, E. Mendels	FUZMAR: An Approach to Aggregating Market Research Data Based on Fuzzy Reasoning.

Aplicaciones	Ref.	Autores	Título
Selección de Proveedores	[49]	F. Herrera, E. López, C. Medaña, M.A. Rodríguez	A Linguistic Decisión Model to Suppliers Selection in International Purchasing.
Promoción de Mercado	[50]	F. Herrera, E. López, C. Medaña, M.A. Rodríguez	A Linguistic Decision Model for Promotion Mix Management.
Selección de Materiales	[18]	S.M. Chen	A New Method for Tool Steel Materials Selection under Fuzzy Environment
Planificación y Secuenciación	[2]	G.I. Adamopoulos, G.P. Pappis	A Fuzzy Linguistic Approach to a Multicriteria Sequencing problem.
	[57]	Y. Klein, G. Langholz	Multicriteria Scheduling Optimization using Fuzzy Logic.
Selección y Asignación de Personal	[47]	F. Herrera, E. López, C. Mendaña, M.A. Rodríguez	A Linguistic Decision Model for Personnel Management Solved with a Linguistic Biobjective Genetic Algorithm
	[85]	S. B. Yaakob, S. Kawata	Workers' Placement in an Industrial Environment
	[64]	G.S. Liang, M.J.J. Wang	Personnel Placement in a Fuzzy Environment
Riesgo en Desarrollo de Software	[60]	H.M. Lee	Applying Fuzzy Sets Theory to Evaluate the Rate of Aggregative Risk in Software Development.
	[61]	H.M. Lee	Group Decision Making Using Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregative Risk in Software Development.
	[62]	H.M. Lee	Generalization of Group Decision Making Using Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregative Risk in Software Development.

Aplicaciones	Ref.	Autores	Título
Evaluación de Sistemas de Armamento	[20]	C.H. Cheng	Evaluating Weapon Systems Using Ranking Fuzzy Numbers.

Tabla 1.1. Aplicaciones del Modelado Lingüístico de Preferencias

Como podemos observar en la Tabla 1.1, se han desarrollado una gran variedad de aplicaciones en las que se utiliza el modelado lingüístico de preferencias.

1.5 Toma de Decisiones

La Toma de Decisiones es sin duda una de las actividades fundamentales de los humanos, ya que constantemente nos estamos enfrentando a situaciones en las que existen varias alternativas y, al menos en algunas ocasiones, tenemos que decidir cuál es mejor, o cuál llevar a cabo.

La Toma de Decisiones es un área que se aplica en distintas disciplinas, tales como, las Ciencias Sociales, la Economía, la Ingeniería, etc. Esta amplia gama de campos de aplicación tiene como consecuencia la existencia de diferentes modelos de Toma de Decisión, que han dado lugar a la Teoría de Decisión.

Un problema clásico de decisión tiene los siguientes elementos básicos:

1. Un conjunto de alternativas o decisiones posibles.

2. Un conjunto de estados de la naturaleza que definen el contexto en el que se plantea el problema.

3. Un conjunto de valores de utilidad, cada uno de los cuales está asociado a un par formado por una alternativa y un estado de la naturaleza.

4. Una función que establece las preferencias del experto (decisor) sobre los posibles resultados.

En la Toma de Decisiones nos podemos encontrar distintos tipos de situaciones de decisión dependiendo del contexto en el que se vaya a desarrollar el problema de decisión:

1. *Ambiente de certidumbre.* En esta situación conocemos con exactitud y precisión el valor de utilidad de cada alternativa.

2. *Ambiente de riesgo.* Esta situación se produce cuando el conocimiento del que se dispone referido a las alternativas consiste en sus distribuciones de probabilidad, una para cada alternativa.

3. *Ambiente de incertidumbre.* Es la situación en la que no conocemos la probabilidad de las alternativas y la utilidad de cada una de ellas se caracteriza de forma aproximada.

La Teoría Clásica de Decisión proporciona una gran cantidad de modelos sobre las distintas situaciones de decisión, aunque no es capaz de dar solución a todos los problemas de decisión. Los métodos clásicos se adecúan fácilmente a problemas desarrollados en ambiente de *certidumbre* y de *riesgo*, sin embargo no son adecuados en situaciones de *incertidumbre*, es decir, en problemas que presentan información vaga e imprecisa. En estas situaciones hablamos de problemas de decisión en contexto difuso o de "Toma de Decisiones Difusa" [4, 102].

1.5.1 Problemas de Decisión Multiexperto y Multicriterio

La Teoría de Decisión clasifica los problemas de decisión en distintos modelos atendiendo a diferentes criterios. Nosotros nos vamos a fijar únicamente en los dos siguientes:

- *Número de Expertos.* En caso de que en el problema de decisión sólo participe un único experto hablamos de *Toma de Decisiones Individual*, y en caso de participar varios expertos hablamos de *Toma de Decisiones Multiexperto.*

- *Número de Criterios.* Existen problemas de decisión que implican una "optimización simple" de las alternativas de acuerdo a un único criterio, mientras que otros problemas implican una "optimización múltiple" de acuerdo a varios criterios, hablándose de *Toma de Decisiones Multicriterio.*

En esta memoria trabajaremos en problemas de decisión con múltiples expertos y/o con múltiples criterios por lo que a continuación presentamos un esquema general de cada uno de ellos y después presentaremos esquemas con características particulares que serán utilizados a lo largo de la memoria.

1.5.1.1 Toma de Decisiones Multiexperto (TDME)

En el modelo de Toma de Decisiones Multiexperto Difuso con el que vamos a trabajar, cada experto valora las alternativas de acuerdo a sus preferencias suministrando un vector de utilidad en el que hay un valor de preferencia para cada una de las alternativas con el que establece un orden sobre ellas. A continuación habrá que integrar los diferentes vectores de utilidad en un vector global de preferencia, para ello se utilizará un proceso de agregación.

El esquema general de un problema TDME podemos definirlo como sigue. Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $(n \geq 2)$ un conjunto finito de alternativas que serán calificadas de acuerdo a la preferencia de un conjunto finito de expertos $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ $(m \geq 2)$. Cada experto p_i suministra una preferencia y_{ij} para cada alternativa x_i, es decir:

Alternativas	*Expertos*			
(x_i)	p_1	p_2	...	p_m
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m}
...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nm}

Tabla 1.2 Esquema general de un problema TDME

El tipo de modelado que nosotros utilizaremos sobre las preferencias es lingüístico, por lo que, el vector de utilidad de alternativas se define como vector valorado en un conjunto de etiquetas S.

$$p_i \longrightarrow (y_{i1}, ..., y_{in}), \quad y_{ij} \in S.$$

Un caso particular de este tipo de problemas que utilizaremos en esta memoria son los problemas de TDME con información lingüística multigranular, en los que cada experto p_i suministra sus preferencias en un conjunto de etiquetas S_i con diferente granularidad y/o semántica al resto de los expertos, es decir,

$$p_i \longrightarrow (y_{i1}, ..., y_{in}) \;\; y_{ij} \in S_i \;\; S_i = \{s_0, ..., s_{g_i}\},$$

donde $g_i + 1$ es la granularidad del conjunto de etiquetas S_i.

1.5.1.2 Toma de Decisiones Multicriterio (TDMC)

En los problemas de decisión multicriterio, las alternativas se evalúan de acuerdo a un conjunto de criterios, cada criterio induce un orden particular de alternativas, por lo que se necesita un procedimiento para construir un orden global de preferencias. Vemos la similitud entre este tipo de problemas y los problemas de toma de decisión multiexperto. En ambos casos, existen múltiples valoraciones en torno a las alternativas y hay que integrarlos en un único orden global de preferencia. La diferencia consiste en que en un tipo de problemas las valoraciones representan las preferencias de distintas personas y en otros la importancia de distintos criterios.

El número de criterios en problemas de decisión multicriterio se asume que es finito. Sean $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, ..., c_k\}$, un conjunto de alternativas y un conjunto de criterios caracterizando una situación de decisión, respectivamente. Entonces, la información básica relativa al problema de TDMC puede expresarse mediante la siguiente tabla:

Alternativas	*Criterios*			
(x_i)	c_1	c_2	...	c_k
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}
...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nk}

Tabla 1.3 Esquema general de un problema TDMC

Cada entrada de la tabla y_{ij} indicará la importancia de la alternativa x_j respecto del criterio c_i, y según el modelado de preferencias que utilicemos estará valorada en un dominio determinado.

En el esquema anterior, cuando utilizamos el modelado lingüístico de preferencias cada prefencia, y_{ij}, estará valorada en un conjunto de etiquetas S. Un esquema particular de problema de TDMC que utilizaremos en esta memoria es cuando hay un conjunto de criterios valorados en un dominio numérico y otro conjunto de criterios valorado en un dominio lingüístico.

Alternativas	*Criterios*							
	Criterios Cuantitativos				*Criterios Cualitativo*			
(a_i)	c_1	c_2	...	c_{k_1}	c_{k_1+1}	c_{k_1+2}	...	$c_{k_1+k_2}$
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k_1}	l_{1k_1+1}	l_{1k_1+2}	...	$l_{1k_1+k_2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nk_1}	l_{nk_1+1}	l_{nk_1+2}	...	$l_{nk_1+k_2}$

Tabla 1.4. Esquema de TDMC con información numérica y lingüística

Donde y_{ij} son las valoraciones de preferencia de cada alternativa para los criterios cuantitativos que estarán valoradas en el rango $[0, 1]$, mientras que las valoraciones, l_{ij}, son etiquetas lingüísticas que expresan la preferencia de cada alternativa para los criterios cualitativos valoradas en un conjunto de términos lingüísticos S.

1.5.2 Proceso de Decisión

El proceso de decisión para un problema de decisión multiexperto o multicriterio consiste básicamente en las fases de *agregación y explotación* [75] (Ver Figura 1.5):

1. *Fase de Agregación.* Su objetivo es obtener un valor colectivo de preferencia para cada unidad de representación, a partir de los valores individuales de preferencia suministrados por los expertos o criterios que participan en el problema, utilizando un operador de agregación de información.

2. *Fase de Explotación.* Su información de entrada son los valores colectivos obtenidos en la fase anterior. Su objetivo es seleccionar la/s mejor/es alternativa/s a partir de los valores colectivos. Para ello, se utilizan *funciones o criterios de selección* las cuáles nos permiten ordenar y seleccionar las mejores alternativas a partir de vectores de utilidad o relaciones de preferencia.

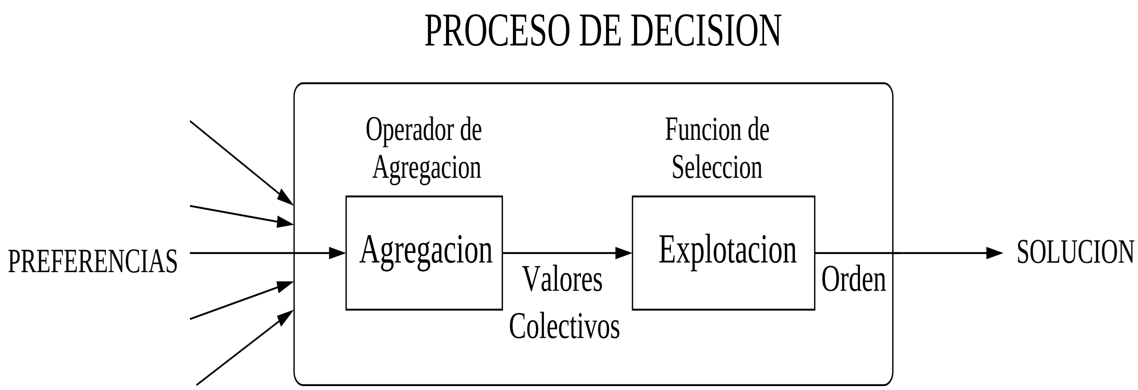

Figura 1.5: Fases de un Proceso de Toma de Decisión

Capítulo 2

Un Nuevo Modelo de Representación de Información Lingüística Basado en 2-tuplas Lingüísticas

El modelado lingüístico de preferencias implica la necesidad de realizar operaciones con etiquetas lingüísticas, es decir, el uso de técnicas computacionales que tienen definidos operadores de agregación, comparación, negación, etc., sobre información lingüística. En la literatura encontramos dos tipos de modelos computacionales sobre información lingüística:

1. *Modelos basados en el Principio de Extensión.*

2. *Modelos Simbólicos.*

En ambos modelos al operar con información lingüística se produce una *pérdida de información* en las operaciones y, por tanto, una falta de precisión en los resultados [13]. Esta pérdida de información se debe al modelo de representación de información del Enfoque Lingüístico Difuso, ya que opera con valores discretos sobre un universo del discurso continuo.

En este Capítulo presentamos un nuevo modelo de representación para la información lingüística basada en el concepto de "Traslación Simbólica" junto con un modelo computacional asociado, que permite operar con preferencias lingüísticas sin pérdida de información ya que utiliza un modelo continuo para representar la información.

Este Capítulo lo comenzamos con un estudio analítico de los distintos Modelos Computacionales lingüísticos existentes en la literatura. Seguidamente, presentaremos una nueva propuesta de Modelo de Representación Lingüística con 2-tuplas, distintos Operadores de Agregación de información con esta representación y mostraremos su comportamiento en un proceso de TDME.

2.1 Análisis de los Modelos de Computación Lingüística

Las preferencias lingüísticas se utilizan en procesos que implican su fusión, agregación, comparación, etc. Como hemos indicado anteriormente, para realizar este tipo de operaciones existen dos enfoques distintos:

1. Modelos computacionales basados en el Principio de Extensión.

2. Modelos computacionales simbólicos.

A continuación, hacemos un repaso de ambos enfoques.

2.1.1 Modelo Computacional Lingüístico Basado en el Principio de Extensión

Este modelo realiza operaciones con términos lingüísticos a través de operaciones asociadas a las funciones de pertenencia de las etiquetas basándose en el Principio de Extensión.

El Principio de Extensión, tal y como vimos en el Capítulo 1, es una herramienta importante de la Teoría de los Conjuntos Difusos [31], que se utiliza para extender conceptos matemáticos definidos sobre la recta real, $\mathcal{R}$, a su versión sobre conjuntos difusos, es decir, nos permite extender funciones para operar con números difusos de forma que el resultado sea también un número difuso. De esta forma, podemos extender la aritmética clásica sobre números difusos, y hablaremos de aritmética difusa.

El uso de la aritmética difusa hace que pueda aumentar la imprecisión de los resultados. Estos resultados (números difusos) obtenidos a partir de los operadores aritméticos difusos son valores que pueden no coincidir con ninguno de los términos lingüísticos del conjunto inicial de términos. Esto nos lleva a tener que realizar un proceso de aproximación lingüística para expresar los resultados en el dominio de expresión original.

Los procesos de aproximación lingüística consisten en localizar un conjunto difuso que represente la semántica de una etiqueta lingüística en el conjunto de etiquetas original y que sea lo más cercano al significado del conjunto difuso sin etiquetar que habíamos obtenido con las operaciones difusas. Para llevar a cabo este proceso de aproximación lingüística existen diversas posibilidades que podemos consultar en [6, 28].

En la Figura 2.1 se presenta el esquema de un proceso de aproximación lingüística en una operación de agregación realizada con un modelo basado en el Principio de Extensión:

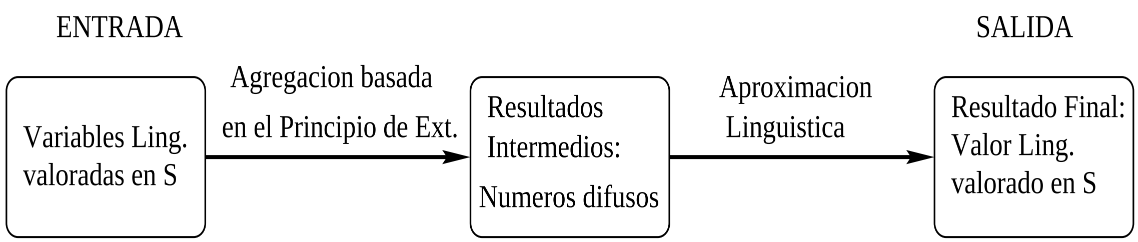

Figura 2.1: Agregación Basada en el Principio de Extensión

Caracterizándolo formalmente, este esquema lo podríamos expresar como:

$$S^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathcal{R}) \xrightarrow{app_1(\cdot)} S.$$

Donde S^n representa el dominio de definición, vectores de n etiquetas sobre S, $F(\mathcal{R})$ es el conjunto de números difusos sobre $\mathcal{R}$, $\tilde{\mathrm{F}}$ es un operador de agregación basado en el Principio de Extensión, $app_1(\cdot)$ es una función de aproximación lingüística y S es el conjunto de términos lingüísticos inicial.

2.1.2 Modelo Computacional Lingüístico Simbólico

Los operadores de agregación asociados al modelo simbólico no necesitan del Principio de Extensión ya que no realizan operaciones sobre las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos, sino que utilizan el orden que ocupa una etiqueta en su conjunto de términos, S, y otras propiedades de dichos términos lingüísticos.

Lo habitual en este modelo computacional es que se utilice la estructura ordenada de los conjuntos de términos lingüísticos, $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ donde $s_i < s_j$ si $i < j$, para operar. Los resultados intermedios de estas operaciones son valores numéricos $\beta \in [0, g]$, los cuáles son aproximados en cada paso del proceso utilizando una función de aproximación $app_2(\cdot)$ para obtener un valor $app_2(\beta) \in \{0, 1, \ldots, g\}$, tal que, indique el índice del término lingüístico asociado, $s_{app_2(\beta)} \in S$.

En la Figura 2.2 observamos el esquema de operación de un modelo simbólico para una operación de agregación.

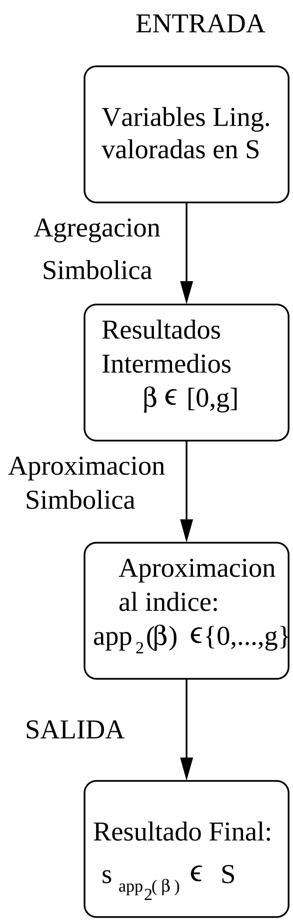

Figura 2.2: Agregación Simbólica

Expresándolo fomalmente queda como:

$$S^n \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{app_2(\cdot)} \{0, ..., g\} \longrightarrow S.$$

Donde S^n representa al igual que antes el dominio de definición, vectores de n etiquetas sobre S, C es un operador simbólico de agregación, $app_2(\cdot)$ es una función de aproximación utilizada para obtener un índice asociado a una etiqueta en S.

2.1.3 Proceso de TDME Usando el Modelo Basado en el Principio de Extensión y el Modelo el Simbólico

Una vez revisados de forma breve los distintos enfoques que existen en la literatura para operar sobre información lingüística, vamos a ver un ejemplo práctico para estudiar sus comportamientos. Seleccionamos un problema de TDME, que sigue el esquema general de este tipo de problemas presentado en la Tabla 1.2. Este problema lo resolveremos utilizando los dos modelos computacionales para información lingüística que acabamos de revisar, el basado en el Principio de Extensión y el Simbólico.

A. Problema de Toma de Decisiones con Información Lingüística

Supongamos una compañía de transportes que necesita renovar su sistema informático. Para ello contrata a una empresa de consultoría que debe realizar un estudio sobre las distintas posibilidades que ofrece el mercado actual, y decidir cuál es la opción más conveniente para sus necesidades.

Las alternativas en este caso son:

- x_1 es un sistema basado en UNIX,
- x_2 es un sistema basado en Windows-NT,
- x_3 es un sistema basado en AS/400,
- x_4 es un sistema basado en VMS.

La empresa de consultoría tiene un grupo de cuatro departamentos de investigación (a cada uno de ellos lo consideraremos como un experto),

- p_1 es el departamento de análisis de costes,
- p_2 es el departamento de análisis de sistemas,
- p_3 es el departamento de análisis de riesgos,
- p_4 es el departamento de análisis tecnológico.

Una vez realizados los estudios pertinentes, cada departamento proporcionará un vector de utilidad expresando su preferencia sobre el conjunto de alternativas. Los valores de preferencia están valorados sobre el conjunto lingüístico $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ (ver Figura 1.2 conjunto etiquetas con su semántica asociada, Capítulo 1). Asumimos que todos los departamentos tienen el mismo grado de importancia en el proceso de decisión.

Los vectores de preferencia proporcionados por los expertos son:

		alternativas			
	y_{ij}	x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	p_1	MB	M	M	B
	p_2	M	B	MB	A
	p_3	A	MB	M	M
	p_4	A	A	B	B

donde "y_{ij}" es el valor de preferencia dado por el experto p_i para la alternativa x_j, cuyas funciónes de pertenencia, $\mu_{y_{ij}}$, asumimos que son triangulares, es decir, $\mu_{y_{ij}} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$.

B. Modelo de Selección

El modelo de selección que vamos a utilizar para resolver este problema de Toma de Decisiones sigue los siguientes pasos:

1. Se realiza un *proceso de agregación* sobre los valores de preferencia suministrados por cada experto para obtener un *valor de preferencia colectiva* sobre cada alternativa, es decir, un vector de preferencia colectiva.

2. A continuación se aplica a un *proceso de explotación* sobre el vector de preferencia colectiva. Este proceso seleccionará como la/s mejor/es alternativa/s aquella/s con máximo valor en el vector de preferencia colectiva.

C. Solución basada en el Principio de Extensión

Vector de preferencia colectiva. Para obtener este vector hay que agregar los vectores que cada experto ha proporcionado. En este modelo usaremos como operador de agregación la media aritmética actuando sobre las funciones de pertenencia, asumiendo que todos los expertos son considerados con igual importancia. Por tanto, el valor de preferencia colectiva para cada alternativa x_j se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\mu_{y_j} = (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}).$$

Sustituyendo la expresión anterior por los valores del problema actual obtenemos:

$$\mu_{y_1} = ((.25 * 1.33), (.25 * 2.01), (.25 * 2.66)) = (.33, .5, .66),$$

$$\mu_{y_2} = ((.25 * 1), (.25 * 1.67), (.25 * 2.33)) = (.25, .42, .58),$$

$$\mu_{y_3} = ((.25 * .83), (.25 * 1.5), (.25 * 2.17)) = (.21, .38, .54),$$

$$\mu_{y_4} = ((.25 * 1.17), (.25 * 1.83), (.25 * 2.5)) = (.3, .45, .625).$$

Los conjuntos difusos que acabamos de obtener no coinciden exactamente con ningún término lingüístico en $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$:

$$\begin{array}{lll} N = (0, 0, .17) & MB = (0, .17, .33) & B = (.17, .33, .5) \\ M = (.33, .5, .67) & A = (.5, .67, .83) & MA = (.67, .83, 1) \\ P = (.83, 1, 1). & & \end{array}$$

Por tanto, vemos la necesidad de aplicar un proceso de aproximación lingüística para obtener los resultados en el dominio de expresión inicial S. Para obtener un término en S cuyo significado sea lo más cercano posible a y_j, utilizaremos como función de aproximación ($app_1(\cdot)$) la distancia euclídea sobre los valores de representación de los números difusos triangulares, ponderando éstos:

$$d(\mu_{s_l}, \mu_{y_j}) = \sqrt{P_1(a_l - a_j)^2 + P_2(b_l - b_j)^2 + P_3(c_l - c_j)^2}$$

representando (a_l, b_l, c_l) y (a_j, b_j, c_j) las funciones de pertenencia de "s_l" y de "y_j" respectivamente y P_1, P_2, P_3 los pesos que representan la importancia de los parámetros a, b y c. Entonces $app_1(\cdot)$ selecciona s_l^* ($app_1(y_j) = s_l^*$), tal que,

$$d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_j}) \leq d(\mu_{s_l}, \mu_{y_j}) \quad \forall s_l \in S$$

Este proceso de aproximación lingüística lo aplicamos a los conjuntos difusos obtenidos con la media aritmética, con $P_1 = 0.2,\ P_2 = 0.6,\ P_3 = 0.2$:

$$app_1(y_1) = M,\ con\ d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_1}) = \sqrt{.2 \cdot (.33 - .33)^2 + .6 \cdot (.5 - .5)^2 + .2 \cdot (.67 - .66)^2} = .004$$

$$app_1(y_2) = M,\ con\ d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_2}) = \sqrt{.2 \cdot (.33 - .25)^2 + .6 \cdot (.5 - .42)^2 + .2 \cdot (.67 - .58)^2} = .082$$

$$app_1(y_3) = B,\ con\ d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_3}) = \sqrt{.2 \cdot (.17 - .21)^2 + .6 \cdot (.33 - .38)^2 + .2 \cdot (.5 - .54)^2} = .046$$

$$app_1(y_4) = M,\ con\ d(\mu_{s_l^*}, \mu_{y_4}) = \sqrt{.2 \cdot (.33 - .3)^2 + .6 \cdot (.5 - .45)^2 + .2 \cdot (.67 - .62)^2} = .046$$

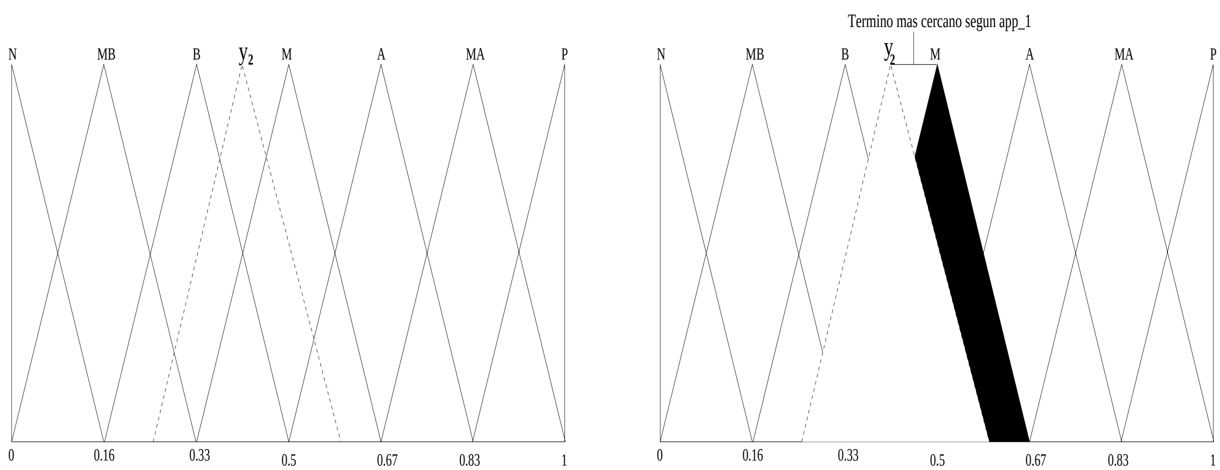

Figura 2.3: Proceso de Aproximación Lingüística

La Figura 2.3 muestra el proceso de aproximación lingüística para y_2. Vemos que y_2 no coincide con ningún término en S, entonces el término más cercano a y_2 según $app_1(\cdot)$ es obtenido de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\min\{d(\mu_{y_2}, \mu_N), d(\mu_{y_2}, \mu_{MB}), d(\mu_{y_2}, \mu_B), d(\mu_{y_2}, \mu_M), d(\mu_{y_2}, \mu_A), d(\mu_{y_2}, \mu_{MA}), d(\mu_{y_2}, \mu_P)\}$$

siendo,

$$d(\mu_{y_2}, \mu_N) = .3919$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_{MB}) = .2324$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_B) = .0880$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_M) = .0820$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_A) = .2500$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_{MA}) = .4187$$
$$d(\mu_{y_2}, \mu_P) = .55$$

por tanto,

$$app_1(y_2) = M$$

ya que es la etiqueta más cercana a y_2.

En la Figura 2.3 se observa que existe una cantidad de información que se pierde durante el proceso aproximación lingüística. Debido a que el resultado original (superficie blanca) puede tener una forma y superficie distinta al resultado final (superficie negra) y por tanto hay que realizar una aproximación desde el resultado original al resultado final.

Proceso de Explotación. Una vez que hemos construido el vector de preferencia colectiva, se aplica sobre él un criterio de selección para obtener el conjunto solución de alternativas. Seleccionamos la/s alternativa/s con mayor grado de preferencia colectiva. En nuestro vector de preferencia colectiva existen tres alternativas con el máximo valor de preferencia, por lo tanto seleccionamos como conjunto solución:

$$\{x_1, x_2, x_4\}$$

Este no es un buen conjunto solución, ya que presenta múltiples soluciones con igual valoración, y no somos capaces de discernir entre ellas una única solución mejor al resto. Es posible que esto ocurra debido al uso de la función de aproximación.

D. Solución basada en un Modelo Simbólico

Ahora vamos a aplicar el mismo modelo de selección para resolver el problema, pero en este caso aplicaremos el enfoque simbólico presentado en [23]. El método simbólico que utilizaremos para agregar variables lingüísticas es la Combinación Convexa [23] que considera un vector de pesos con suma igual a ‘ 1 ’, y actúa sobre los índices de las etiquetas, aplicando una función de redondeo al resultado final para así obtener un valor entero, siendo éste el índice de la etiqueta solución.

Definición 2.1.[23] *Sea $A = \{a_1, ..., a_m\}$ un conjunto de términos lingüísticos a ser agregados, la Combinación Convexa C^m se define como:*

$$C^m\{w_k, b_k, k = 1, \dots, m\} = w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot C^{m-1}\{\eta_h, b_h, h = 2, \dots, m\}$$

donde $W = (w_1, \dots, w_m)$ es un vector de pesos asociado a A, tal que, (i) $w_i \in [0, 1]$, y (ii) $\sum_i w_i = 1$; y $B = (b_1, \dots, b_m)$ es un vector, tal que, $B = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$, con $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}$ $\forall$ $i \leq j$, y σ es una permutación sobre los valores a_i. $\eta_h = w_h / \Sigma_2^m w_k, h = 2, \dots, m$.

Si m=2, entonces se define la Combinación Convexa como

$$C^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k, \quad s_j,\ s_i,\ \in\ S,\ (j \geq i)$$

con,

$$k \;=\; \min\{g, i \;+\; round(w_1 \cdot (j - i))\},$$

siendo $g+1$ la cardinalidad de S, "round" el operador usual de redondeo y $b_1 = s_j,\ b_2 = s_i$.

Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j$ $\forall i$, definimos la Combinación Convexa como:

$$C^m\{w_i, b_i, i = 1, \dots, m\} = b_j.$$

Vector de preferencia colectiva. En el ejemplo hemos supuesto que todos los expertos tienen el mismo grado de importancia a la hora de tomar la decisión, por lo que en este caso el vector de pesos es $\{.25, .25, .25, .25\}$, entonces los valores de preferencia colectiva serán:

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = M$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, MB)\} = M$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (M, M, B, MB)\} = B$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, B)\} = M$$

Un ejemplo de cómo fuciona el proceso de Combinación Convexa es el siguiente:

$$C^4\{(.25,.25,.25,.25),(A,A,M,MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33,.33,.33),(A,M,MB)\}$$

$$C^3\{(.33,.33,.33),(A,M,MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot C^2\{(.5,.5),(M,MB)\}$$

$$C^2\{(.5,.5),(M,MB)\} = s_{k_2} = s_2 = B$$

$$k_2 = \min\{6, 1 + round(0.5(2))\} = 3$$

$$C^3\{(.33,.33,.33),(A,M,MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_3 = M$$

$$k_3 = \min\{6, 2 + round(0.33(2))\} = 3$$

$$C^4\{(.25,.25,.25,.25),(A,A,M,MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot M = s_{k_4} = s_3 = \mathbf{M}$$

$$k_4 = \min\{6, 3 + round(0.25(1))\} = 3$$

Proceso de Explotación. Las alternativas con mayor grado de preferencia colectiva son:

$$\{x_1, x_2, x_4\}$$

Observamos de nuevo que este método vuelve a obtener una solución con múltiples alternativas y además también vemos que coindice con el conjunto solución obtenido con el método anterior. Del resultado obtenido con el método simbólico observamos que este tipo de método también tiene una pérdida de información que en este caso viene determinada por el uso del operador de aproximación "*round*".

Acabamos de ver que los métodos existentes en la literatura para operar con información lingüística tienen un incoveniente común como es la "pérdida de información". Esta se produce porque el Enfoque Lingüístico Difuso utiliza una representación discreta de la información lingüística y utiliza operadores que actúan en un rango continuo. La pérdida de información causa una falta de precisión en los resultados, es decir, puede ocasionar que al operar con distintos valores de entrada obtengamos iguales resultados, aunque antes de utilizar los procesos de aproximación dichos valores fueran distintos. En la siguiente sección presentamos un modelo de representación de información lingüística con 2-tuplas que solucionará el problema de la pérdida de información al operar con información lingüística.

2.2 Un Modelo de Representación Lingüística con 2-tuplas

Para desarrollar este nuevo modelo de representación de información lingüística, en primer lugar introduciremos el concepto básico de *"Traslación Simbólica"* para representar la información lingüística mediante 2-tuplas. Y a continuación presentamos un modelo computacional para operar con 2-tuplas lingüísticas sin pérdida de información.

2.2.1 La Traslación Simbólica. Una Representación Lingüística con 2-tuplas

Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y $\beta \in [0, g]$ un valor obtenido por un método simbólico operando con información lingüística.

Definición 2.2. *La Traslación Simbólica de un término lingüístico s_i es un número valorado en el intervalo $[-.5, .5)$ que expresa la "diferencia de información" entre una cantidad de información expresada por el valor $\beta \in [0, g]$ obtenido en una operación simbólica y el valor entero más próximo, $i \in \{0, ..., g\}$, que indica el índice de la etiqueta lingüística (s_i) más cercana en S.*

A partir de este concepto desarrollaremos un nuevo modelo de representación para la información lingüística, el cuál usa como base de representación 2-tuplas, (r_i, α_i), $r_i \in S$ y $\alpha_i \in [-.5, .5)$.

1. r_i representa la etiqueta lingüística, y

2. α_i es un número que expresa el valor de la distancia desde el resultado original β al índice de la etiqueta lingüística más cercana (r_i) en el conjunto de términos lingüísticos S, es decir, su traslación simbólica.

Una vez que ya conocemos el tipo de representación que utiliza este modelo, hay que definir cómo convertir una etiqueta lingüística clásica en su equivalente 2-tupla y también hay ver cómo se construye una 2-tupla a partir de valor numérico β, $\beta \in [0, g]$, obtenido en una operación simbólica.

Definición 2.3. *Sea $s_i \in S$ un término lingüístico, su representación mediante una 2-tupla equivalente se obtiene mediante la función θ:*

$$\theta : S \longrightarrow (S \ x \ [-.5, .5))$$

$$\theta(s_i) = (s_i, 0)/s_i \in S.$$

Definición 2.4. *Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación simbólica, entonces la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a β se obtiene usando la siguiente función:*

$$\Delta : [0, g] \longrightarrow Sx[-.5, .5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \ con \ \begin{cases} s_i, & i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-.5, .5), \end{cases}$$

donde round es el operador usual de redondeo, s_i es la etiqueta con índice más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

Ejemplo. El funcionamiento de la función Δ que acabamos de definir puede observarse a continuación. Supongamos una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ que obtiene como resultado de dicha operación un valor $\beta = 2.8$, entonces la representación de esta información mediante una 2-tupla lingüística es:

$$\Delta(2.8) = (s_3, -.2).$$

Una representación gráfica de este ejemplo la podemos observar en la Figura 2.4.

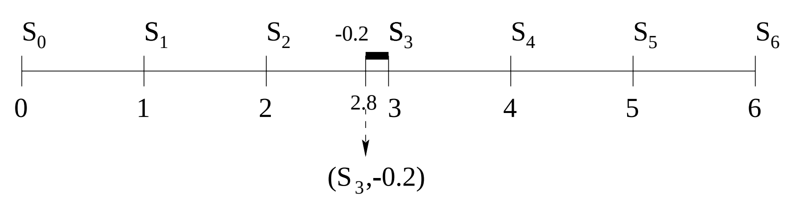

Figura 2.4: Ejemplo de una operación de Traslación Simbólica

Definición 2.5. *Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y (s_i, α) una 2-tupla lingüística. Existe la función Δ^{-1}, tal que, dada una 2-tupla (s_i, α) esta función devuelve su valor numérico equivalente $\beta \in [0, g]$.*

$$\Delta^{-1} : Sx[-.5, .5) \longrightarrow [0, g]$$

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta.$$

2.2.2 Modelo Computacional Lingüístico para la Representación con 2-tuplas

Un modelo de representación de información no es útil si no tiene definido un modelo computacional asociado que nos permita operar sobre dicha representación. A continuación, vamos a presentar un conjunto de operadores sobre este modelo para las siguientes operaciones:

1. Comparación de 2-tuplas.
2. Agregación de 2-tuplas.
3. Operador de Negación de una 2-tupla.

1. Comparación de 2-tuplas

Vamos a ver como comparar información lingüística representada mediante 2-tuplas.

Sean (s_k, α_1) y (s_l, α_2) dos 2-tuplas, cada una representando una cantidad de información, entonces:

- Si $k < l$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2)
- Si $k = l$ puede ocurrir que
    1. si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces (s_k, α_1), (s_l, α_2) representan la misma información.
    2. si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2)

3. si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es mayor que (s_l, α_2).

Algunos ejemplos son:

$(s_4, .3) < (s_5, -.3)$,

$(s_4, .3) = (s_4, .3)$; $(s_4, .3) < (s_4, .4)$; $(s_4, .3) > (s_4, -.1)$,

$(s_4, -.3) > (s_3, .45)$.

2. Agregación de 2-tuplas

La agregación consiste en obtener un valor colectivo que exprese la información de un conjunto de valores marginales. El resultado de una operación de agregación debe de ser consistente con la representación de los valores de entrada, por tanto, el resultado de la agregación de 2-tuplas debe ser una 2-tupla. Este problema podemos enfocarlo desde dos puntos de vista:

1. El primero podría ser utilizar los operadores de agregación numéricos y extender dichos operadores para que puedan trabajar con 2-tuplas lingüísticas.

2. Por otro lado, los operadores de agregación simbólicos pueden ser utilizados sin apenas esfuerzo para trabajar con 2-tuplas lingüísticas.

En la siguiente sección presentaremos un conjunto de operadores de agregación sobre 2-tuplas, algunos basados en operadores de agregación numéricos y otros en operadores de agregación simbólicos.

3. Operador de Negación sobre una 2-tupla

Definimos el operador de negación sobre una 2-tupla lingüística como:

$$Neg((s_i, \alpha)) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha))).$$

siendo $g + 1$ la cardinalidad de S, $S = \{s_0, ..., s_g\}$.

2.3 Operadores de Agregación para 2-tuplas Lingüísticas

En esta sección, presentaremos un conjunto de operadores de agregación para 2-tuplas lingüísticas. En primer lugar, nos centraremos en operadores de agregación simbólicos y los extenderemos para que operen de forma correcta sobre 2-tuplas. Posteriormente definiremos operadores de agregación para 2-tuplas extendiendo operadores de agregación numéricos. De esta forma tendremos un conjunto de operadores amplio y flexible para agregar información lingüística representada mediante 2-tuplas.

2.3.1 Operadores de Agregación Simbólicos Extendidos sobre 2-tuplas Lingüísticas

En la literatura especializada se pueden encontrar operadores de agregación basados en el Principio de Extensión [6, 28] u operadores simbólicos [23, 41, 83, 95]. Aquí nos vamos a centrar en adaptar los operadores de agregación simbólicos para que combinen información lingüística modelada mediante 2-tuplas.

1. **Operador LOWA sobre 2-tuplas**

El operador LOWA definido en [35, 39] es un operador de agregación simbólico basado en la Combinación Convexa [23].

Definición 2.6. *Sea $A = \{a_1, ..., a_m\}$ un conjunto de términos lingüísticos a ser agregados, el operador LOWA , ϕ, se define como:*

$$\phi(a_1, \ldots, a_m) = W \cdot B^T = \mathcal{C}^m\{w_k, b_k, k = 1, \ldots, m\} =$$

$$= w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot \mathcal{C}^{m-1}\{\beta_h, b_h, h = 2, \ldots, m\},$$

donde $W = (w_1, \ldots, w_m)$, es un vector de pesos, tal que, (i) $w_i \in [0, 1]$ y, (ii) $\Sigma_i w_i = 1$, $\beta_h = w_h / \Sigma_2^m w_k, h = 2, \ldots, m$, y $B = (b_1, \ldots, b_m)$ es un vector asociado a A,

$$B = \sigma(A) = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}),$$

donde, $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}$ $\forall$ $i \leq j$, *con* σ *siendo una permutación sobre el conjunto de etiquetas* A. $\mathcal{C}^m$ *es el operador Combinación Convexa sobre m etiquetas.*

En la definición del operador LOWA hay un elemento que no se explicita cómo obtenerlo, que es el vector de pesos, W, y es básico resolver esta cuestión para poder utilizar este operador. Una solución posible es que los pesos representen el concepto de *mayoría difusa* [55] en la agregación del operador LOWA usando *cuantificadores lingüísticos difusos* [100] (En el **Apéndice A** se introducen ambos conceptos). Yager propone una forma de calcular los pesos utilizando cuantificadores lingüísticos difusos. En caso de ser un cuantificador proporcional creciente Q, la expresión para calcular W es [87]:

$$w_i = Q(i/n) - Q((i-1)/n), i = 1, \ldots, n,$$

siendo la función de pertenencia de Q, la siguiente:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < a \\ \frac{r-a}{b-a}, & \text{si } a \leq r \leq b \\ 1, & \text{si } r > b \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0, 1]$. Algunos ejemplos de cuantificadores proporcionales no decrecientes pueden ser: "la mayoría" , "al menos la mitad", cuyos parámetros de definición (a,b) son (0.3,0.8) y (0,0.5) respectivamente. Cuando se usa un cuantificador lingüístico, Q, para calcular los pesos del operador LOWA, ϕ, éste se simboliza como ϕ_Q.

A continuación, presentamos las definiciones necesarias para adaptar el operador LOWA a trabajar con 2-tuplas lingüísticas.

Definición 2.7. *Sea* $A = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas para ser agregadas, tal que,* $(r_i, \alpha_i) \in S \times [-.5, .5)$. *La Combinación Convexa Extendida para combinar 2-tuplas,* EC^m, *la definimos como:*

$$EC^m\{w_j, (r_{\sigma_{(j)}}, \alpha_{\sigma_{(j)}}), j = 1, ..., m\} =$$

$$= \Delta(w_1 \cdot \Delta^{-1}(r_{\sigma_{(1)}}, \alpha_{\sigma_{(1)}}) + (1 - w_1) \cdot \Delta^{-1}(EC^{m-1}\{\eta_h, (r_{\sigma_{(h)}}, \alpha_{\sigma_{(h)}}), h = 2, \ldots, m\})),$$

con $\eta_h = w_h / \sum_2^m w_k, h = 2, ..., m$, $W = (w_1, ..., w_m)$ *un vector de pesos asociado a* A*, tal que, (i)* $w_i \in [0,1]$*, y (ii)* $\sum_i w_i = 1$*; y* $B = \{(r_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(1)}), ..., (r_{\sigma(m)}, \alpha_{\sigma(m)})\}$ *un conjunto ordenado asociado a* A*, tal que,* $(r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}) \leq (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})\ \forall\ i \leq j$.

Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$EC^m\{w_j, (r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}), j = 1, ..., m\} = \Delta(\sum_{i=1}^m w_i \Delta^{-1}(r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})) = \Delta(\sum_{i=1}^m w_i \beta_{\sigma(i)}),$$

donde

$$\beta_{\sigma(i)} = \Delta^{-1}(r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}).$$

Si m=2, se define el operador como

$$EC^2\{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i = 1, 2\} = \Delta(w_1 \cdot \Delta^{-1}(r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}) + (1 - w_1) \cdot \Delta^{-1}(r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)})) = (r_f, \alpha_f)$$

$$(r_f, \alpha_f) = \Delta(\beta_{\sigma(j)} + w_1 \cdot (\beta_{\sigma(i)} - \beta_{\sigma(j)})).$$

Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j\ \forall i$, en este caso definimos la Combinación Convexa extendida como

$$EC^m\{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i = 1, \ldots, m\} = (r_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}).$$

Con esta definición las operaciones de aproximación desaparecen y por tanto la pérdida de información debida a ella también.

Una vez definida la Combinación Convexa Extendida definimos el operador LOWA sobre 2-tuplas.

Definición 2.8. *Sea* $A = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas para ser agregadas, el operador LOWA extendido,* ϕ^e*, se define como*

$$\phi^e((r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)) = W \cdot B^T = EC^m\{w_i, (r_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)}), i = 1, \ldots, m\}.$$

Con este operador podemos combinar información lingüística sin pérdida de información.

Ejemplo.

Sea $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ un conjunto de términos lingüísticos y sean (MB, M, A, A) y (M, B, MB, A) dos vectores de términos lingüísticos para ser agregados.

1. Operador LOWA.

$$\phi(MB, M, A, A) = C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = M$$

$$\phi(M, B, B, A) = C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, B)\} = M$$

2. Operador LOWA para 2-tuplas.

$\phi^e((MB, 0), (M, 0), (A, 0), (A, 0)) =$

$= EC^4\{(.25, .25, .25, .25), ((A, 0), (A, 0), (M, 0), (MB, 0))\} = (M, 0)$

$\phi^e((M, 0), (B, 0), (B, 0), (A, 0)) =$

$= EC^4\{(.25, .25, .25, .25), ((A, 0), (M, 0), (B, 0), (B, 0))\} = (M, -.25).$

Puede observarse que el operador LOWA para 2-tuplas es más preciso que el operador LOWA clásico.

Existen muchos otros operadores simbólicos de agregación lingüística que pueden ser extendidos para trabajar con 2-tuplas, tales como, el operador lingüístico LWA [41], el operador WMA [95], etc.

2.3.2 Operadores de Agregación para 2-tuplas Basados en Operadores de Agregación Numéricos

En el dominio numérico podemos encontrar muchos operadores de agregación [1, 32, 83, 87, 89] que permiten combinar la información de acuerdo a distintos criterios. En el modelo computacional presentado para operar con 2-tuplas en la sección anterior se presentó la función Δ^{-1} (Definición 2.5) que convierte una 2-tupla lingüística en un número en el intervalo $[0, g]$, por tanto parece factible y sencillo adaptar cualquier operador de agregación numérico para combinar 2-tuplas lingüísticas. A continuación presentamos algunos casos.

1. Media Aritmética

Definición 2.9. **[1]** *Sea $x = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numéricos para una variable x. La media aritmética $\overline{x}$ se obtiene dividiendo la suma de todos los valores por* *su cardinalidad, i.e.,*

$$\overline{x}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Este operador simboliza el concepto intuitivo de punto de equilibrio o centro del conjunto de valores. Extender este operador para tener un operador equivalente para información lingüística representada mediante 2-tuplas se puede hacer como muestra la siguiente definición.

Definición 2.10. *Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas, su media aritmética se calcularía con el operador media aritmética extendida, $\overline{x}^e$, que es definido como,*

$$\overline{x}^e((r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i).$$

2. Operador Media ponderada

La media ponderada permite que diferentes valores x_i tengan diferente importancia. Esto se realiza asignando a cada valor x_i un peso asociado w_i, que indica cuál es la importancia de ese valor.

Definición 2.11.[1]. *Sea $x = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de valores numéricos y $W = (w_1, ..., w_n)$ un vector numérico con los pesos asociados a cada x_i, tal que, w_1 corresponde a x_1 y así sucesivamente. La media ponderada se obtiene como sigue:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Este operador lo adaptamos para operar con 2-tuplas tal y como sigue:

Definición 2.12. *Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas y $W = (w_1, ..., w_m)$ un vector numérico con los pesos asociados a cada 2-tupla. La media ponderada extendida $\overline{x}^e$ se define como:*

$$\overline{x}^e = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}) = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}).$$

Una modificación interesante sobre este el operador, $\overline{x}^e$, sería que los pesos w_i fuesen también valores lingüísticos (2-tuplas). A dicho operador lo notamos como $\overline{x}_l^e$ y lo definimos como sigue:

Definición 2.13. *Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas y $W = ((w_1, \alpha_1), ..., (w_m, \alpha_m))$ el vector de pesos lingüísticos asociado. La media ponderada extendida $\overline{x}_l^e$ será:*

$$\overline{x}_l^e = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}) = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^m \beta_{w_i}}),$$

donde $\beta_{w_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)$.

3. Operador OWA (Ordered Weighted Aggregation)

Este operador introducido por Yager en [87] es un operador de agregación ponderado, en el cuál, los pesos no están asociados a un valor predeterminado sino que están asociados a una posición determinada.

Definición 2.14. **[87]** *Sea $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un vector de valores numéricos y $W = (w_1, ..., w_n)$ un vector de pesos asociado , tal que, (i) $w_i \in [0, 1]$ y (ii) $\sum w_i = 1$.*
El operador OWA, F, se obtiene como:

$$F(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j,$$

donde b_j es el j-esimo mayor valor del conjunto A.

Extender el operador OWA para trabajar con 2-tuplas se puede hacer definiendo el operador, F^e, tal y como sigue:

Definición 2.15. *Sea $A = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas y $W = (w_1, ..., w_m)$ un vector de pesos asociado que satisface que (i) $w_i \in [0, 1]$ and (ii) $\sum w_i = 1$.*
El operador OWA extendido F^e para combinar 2-tuplas actúa como:

$$F^e((r_1, \alpha_1), \ldots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot \beta_j^*),$$

siendo β_j^* *el j-esimo mayor valor de los* $\Delta^{-1}((r_i, \alpha_i))$.

Vemos como era de esperar, que este operador es exactamente igual al operador LOWA extendido (Definición 2.8).

Una de las principales ventajas que presenta el operador OWA es su gran flexibilidad a la hora de seleccionar el tipo de regla de agregación de las que hay disponibles. Esta flexibilidad se basa en la forma de determinar el vector de pesos que se va a utilizar en una determinada aplicación. Yager y Filev en [89] presentaron dos familias de operadores OWA llamadas S-OWA, la primera familia es la "orlike" y la segunda la "andlike".

4. OR-LIKE S-OWA

El operador "orlike" S-OWA, denotado como F_{SO}, es definido por una familia de pesos OWA, tales que con $\zeta \in [0, 1]$.

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\zeta) + \zeta, & i = 1 \\ \frac{1}{n}(1-\zeta), & i = 2, ..., n. \end{cases}$$

Definición 2.16. [89] *Sea* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *un conjunto de valores numéricos para agregar, y los pesos a usar en la agregación calculados tal y como acabamos de indicar, un operador "orlike" S-OWA será definido como:*

$$F_{SO}(a_1, ..., a_n) = \zeta \cdot \max_i\{a_i\} + \frac{1}{n}(1-\zeta) \cdot \sum_i a_i.$$

El operador extendido "orlike" S-OWA para trabajar con 2-tuplas se define como sigue:

Definición 2.17. *Sea* $A = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)\}$ *un conjunto de 2-tuplas para agregar, el operador extendido orlike S-OWA utilizará los anteriores pesos,*

$$F^e_{SO}((r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\zeta \cdot \max_i\{\Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\} + \frac{1}{m}(1-\zeta) \cdot \sum_i \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)) =$$

$$= \Delta(\zeta \cdot \max_i\{\beta_i\} + \frac{1}{m}(1-\zeta) \cdot \sum_i \beta_i).$$

5. AND-LIKE S-OWA

El operador "andlike" S-OWA, denotado como F_{SA}, es definido por la familia de pesos OWA tal que con $\vartheta \in [0,1]$

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{n}(1-\vartheta), & i = n \\ \frac{1}{n}(1-\vartheta)+\vartheta, & i = 1,...,n-1. \end{cases}$$

Definición 2.18. **[89]** *Sea $A = \{a_1, ..., a_n\}$ un conjunto de valores numéricos a ser agregados, utilizando los pesos anteriores, obtenemos un operador "andlike" S-OWA:*

$$F_{SA}(a_1, ..., a_n) = \vartheta \cdot \min_i\{a_i\} + \frac{1}{n}(1-\vartheta) \cdot \sum_i a_i.$$

El operador extendido "andlike" S-OWA se define como sigue:

Definición 2.19. *Sea $A = \{(r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de 2-tuplas para agregar, el operador extendido andlike S-OWA utiliza los anteriores pesos, y se define como,*

$$F^e_{SA}((r_1, \alpha_1), ..., (r_m, \alpha_m)) = \Delta(\vartheta \cdot \min_i\{\Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\} + \frac{1}{m}(1-\vartheta) \cdot \sum_i \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)) =$$

$$= \Delta(\vartheta \cdot \min_i\{\beta_i\} + \frac{1}{m}(1-\vartheta) \cdot \sum_i \beta_i).$$

En esta sección hemos visto que tanto los operadores de agregación simbólicos como los definidos en el dominio numérico son fácilmente adaptables para trabajar con el modelo de representación lingüístico de 2-tuplas. De esta observación también extraemos que operadores de agregación definidos en el dominio numérico y que eran de difícil extensión al dominio lingüístico, gracias a este nuevo modelo de representación, pueden ser utilizados sobre información lingüística.

2.4 Proceso TDME Usando el Modelo Basado en 2-tuplas Lingüísticas

Ahora vamos a utilizar el nuevo modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas para resolver el problema presentado en la sección 2.1.3. Utilizaremos el mismo modelo de decisión.

2.4.1 Modelo de Decisión

El modelo de decisión usado anteriormente se dividía en dos fases: (i) Agregación y (ii) Explotación. Al trabajar con el modelo de representación lingüístico basado en 2-tuplas se desarrollará tal y como sigue:

- En primer lugar tenemos que obtener los valores de preferencia colectiva para cada alternativa mediante un proceso de agregación. Antes de nada debemos transformar los valores de preferencia de cada experto a 2-tuplas:

		alternativas			
		x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	p_1	$(MB, 0)$	$(M, 0)$	$(M, 0)$	$(B, 0)$
	p_2	$(M, 0)$	$(B, 0)$	$(MB, 0)$	$(A, 0)$
	p_3	$(A, 0)$	$(MB, 0)$	$(M, 0)$	$(M, 0)$
	p_4	$(A, 0)$	$(A, 0)$	$(B, 0)$	$(B, 0)$

  Una vez tenemos toda la información expresada con 2-tuplas las agregamos para obtener el vector de valores de preferencia colectiva. Para llevar a cabo este proceso de agregación en este caso vamos a utilizar el operador media aritmética extendida (ya que consideramos que todos los expertos tienen la misma importancia):

$$\overline{x}^e(MB, M, A, A) = (M, 0)$$
$$\overline{x}^e(M, B, MB, A) = (M, -.5)$$
$$\overline{x}^e(M, MB, M, B) = (L, .25)$$
$$\overline{x}^e(B, A, M, B) = (M, -.25).$$

  El vector de preferencia colectiva obtenido es:

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline ((M, 0) & (M, -.5) & (L, .25) & (M, -.25)) \end{array} \right)$$

- Aplicamos el mismo proceso de explotación que en la sección 2.1.3. El conjunto solución de alternativas es:

$$\{x_1\}$$

2.4.2 Análisis Comparativo

A lo largo de este capítulo hemos resuelto el mismo problema de decisión usando tres modelos computacionales distintos, obteniendo los siguientes resultados:

	Grado de Dominancia				Conj. solución
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Método Basado en el P.E.	M	M	B	M	$\{x_1, x_2, x_4\}$
Método Simbólico	M	M	B	M	$\{x_1, x_2, x_4\}$
Representación 2-tuplas	(M,0)	(M,-.5)	(B,-.25)	(M,-.25)	$\{x_1\}$

Tabla 2.1. Resultados con los tres métodos

Estudiando la tabla podemos observar que los resultados del enfoque de representación con 2-tuplas varían con respecto a los dos anteriores, ya que el resultado obtenido con la media aritmética extendida es más preciso, es un subconjunto de los conjuntos solución obtenidos por los otros modelos operacionales. Esto se debe a que:

- En el método basado en la representación de 2-tuplas, en el vector de preferencias colectivas hay alternativas que tienen igual término lingüístico pero distinto valor para la traslación simbólica, y por tanto podemos seleccionar sin dificultad cuál es la mejor de las distintas alternativas.

- Los valores con los que trabajan el modelo computacional basado en la artimética difusa y el modelo computacional simbólico son valores discretos. Por tanto, cuando distintas alternativas en su valor final tienen el mismo valor colectivo no podemos discernir cuál de ellas es mejor sobre el resto.

2.5 Comentarios Finales

En este Capítulo hemos repasado la representación de información lingüística y las distintas formas de operar sobre ella que existen en la literatura. Hemos visto que presentan una serie de problemas y limitaciones importantes como es la "pérdida de información" y la incapacidad de operar en ciertos tipos de contextos lingüísticos.

Para solucionar estos problemas hemos presentado un nuevo modelo de representación para la información lingüística que utiliza 2-tuplas para expresar la información y se basa en el concepto de *Traslación Simbólica*. La ventaja más importante que aporta la representación de información lingüística basada en 2-tuplas es la de ser contínua en su dominio. Por lo tanto, puede representar cualquier cantidad de información del universo del discurso sin necesidad de realizar ningún proceso de aproximación.

Junto con el nuevo modelo de representación lingüística hemos desarrollado un modelo computacional para operar sobre 2-tuplas que permite operar con etiquetas lingüísticas sin que se produzca pérdida de información.

Capítulo 3

Agregación de Información Lingüística Multigranular

Un aspecto muy importante cuando se utiliza el Modelado Lingüístico de Preferencias es la *granularidad de la incertidumbre*, que es el número de etiquetas que tiene el conjunto de términos lingüísticos utilizado para dar valor a las variables lingüísticas. Cuando un problema presenta información lingüística valorada en conjuntos de etiquetas con distinta granularidad, a este tipo de información la denominamos *Información Lingüística Multigranular* [48].

El enfoque lingüístico difuso presenta una importante limitación a la hora de realizar procesos de agregación con información lingüística multigranular, ya que no existen definidos procesos de normalización estándar de este tipo de información ni operadores de agregación para la misma.

A lo largo de este Capítulo, y tomando como base de modelado lingüístico de preferencias el modelo de representación lingüístico basado en 2-tuplas, presentamos un método que facilita los procesos de agregación de la información lingüística multigranular y obtiene resultados en el dominio inicial de cada una de las fuentes de información en caso de ser necesario. Por último para mostrar su comportamiento, aplicaremos dicho método de agregación a un problema de TDME.

3.1 Fuentes de Información con Valoraciones Lingüísticas Multigranulares

En los problemas en los que participan distintas fuentes de información a la hora de valorar lingüísticamente los diferentes aspectos o fenómenos del problema, puede ocurrir que cada una de ellas tenga un grado de incertidumbre distinto sobre un fenómeno a calificar del resto de las fuentes. Entonces, cada fuente de información puede expresar su conocimiento con términos lingüísticos valorados en conjuntos de etiquetas con una granularidad de incertidumbre distinta del resto.

Podemos formalizar un problema de TDME, con un conjunto $X = \{x_1, ..., x_n\}$ de alternativas y con un conjunto $P = \{p_1, ..., p_m\}$ de expertos, con información lingüística multigranular tal y como sigue:

$$p_i \longrightarrow (y_{i1}, ..., y_{in}) \quad y_{ij} \in S_i \quad S_i = \{s_0, ..., s_{g_i}\}$$

donde cada experto p_i expresa sus preferencias mediante valoraciones lingüísticas en un conjunto de términos lingüísticos S_i con granularidad $g_i + 1$.

En la literatura encontramos distintas aproximaciones a la hora de tratar con problemas que presentan información lingüística multigranular:

1. En [15] se presenta un problema de TDME con información lingüística multigranular. Para operar con ella se utilizan operaciones basadas en el Principio de Extensión y para ordenar las alternativas se utiliza un método de ordenación de números difusos.

2. En [48] se utiliza un problema de TDME con este tipo de información. Para operar sobre ella se unifica la información mediante conjuntos difusos y para ordenar las alternativas se construye una relación de preferencia difusa utilizando el grado de posibilidad de dominancia y sobre esta relación de preferencia se aplica un proceso de explotación que ordene las alternativas.

3. En [84] se propone un operador de agregación para información lingüística multigranular que puede ser aplicado a procesos de Toma de Decisiones definidos en este contexto.

Las propuestas anteriores presentan distintos problemas, o bien expresión de los resultados en dominios distintos a los originales, o bien pérdida de información durante los procesos de cálculo.

3.2 Proceso de Agregación para Información Lingüística Multigranular Basado en la Representación con 2-tuplas

Para solucionar los problemas de trabajar con información lingüística multigranular presentamos un proceso de agregación basado en el modelo de representación lingüístico con 2-tuplas que se desarrolla de acuerdo al siguiente esquema:

1. **Expresión de la información de forma uniforme**. En primer lugar, la información lingüística expresada en distintos conjuntos de etiquetas debe ser normalizada, es decir, se transforma a un único dominio de expresión. Esto se realiza en dos pasos:

   (a) *Transformación de la información lingüística multigranular en conjuntos difusos.* Consiste en transformar cada etiqueta lingüística de entrada a un "conjunto difuso" definido sobre un *Conjunto Básico de Términos Lingüísticos* (CBTL), que notaremos como S_T.

   (b) *Conversión de los conjuntos difusos a 2-tuplas lingüísticas.* Cada conjunto difuso sobre el CBTL obtenido en la fase anterior es transformado en una 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica y valorada sobre el CBTL.

2. **Agregación de 2-tuplas**. Una vez normalizada la información lingüística multigranular de entrada mediante 2-tuplas lingüísticas valoradas en el CBTL, aplicaremos sobre ellas un operador de agregación para obtener valores colectivos que estarán expresados mediante 2-tuplas valoradas sobre el CBTL.

3. **Vuelta atrás**. Los valores colectivos obtenidos, 2-tuplas valoradas en el CBTL, pueden estar expresadas en un dominio distante de los dominios de expresión utilizados por las fuentes de información. Por lo tanto, puede ser interesante ofrecer la

posibilidad de convertir los valores obtenidos al dominio de expresión inicial, para mejorar el entendimiento de dichos valores. Este paso no es obligatorio, pero puede ser conveniente en muchas ocasiones.

El esquema gráfico de este proceso podemos verlo en la Figura 3.1:

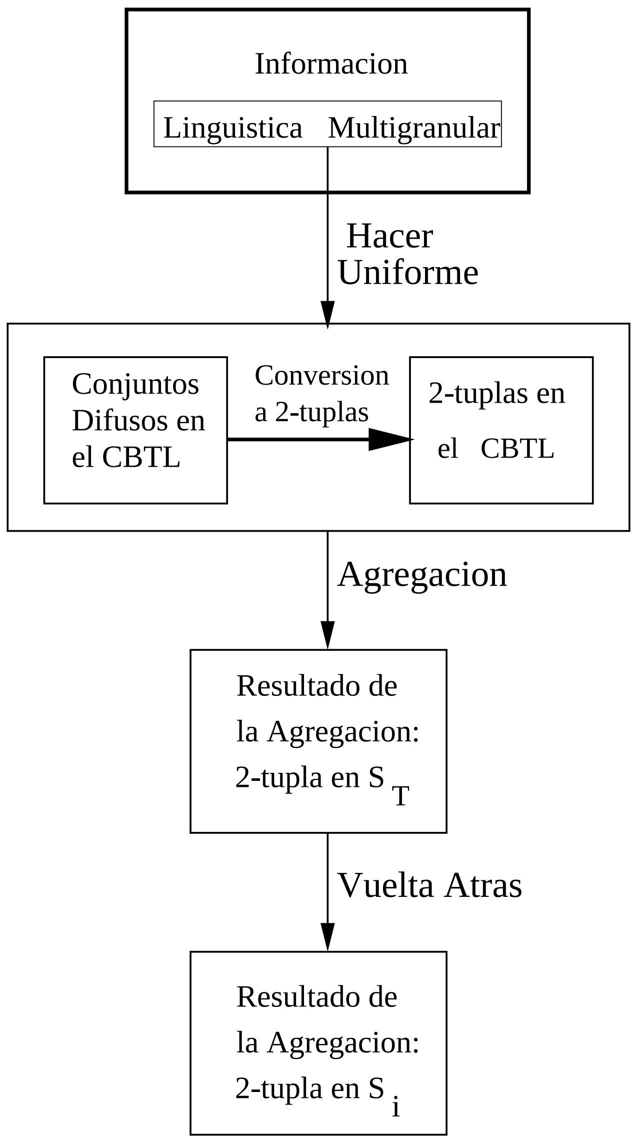

Figura 3.1: Esquema del proceso de agregación de información lingüística multigranular

Seguidamente, desarrollaremos cada paso del esquema de la Figura 3.1 en las siguientes subsecciones.

3.2.1 Expresión de la Información de Forma Uniforme

Cuando en el dominio numérico tenemos información expresada en distintos rangos de valores y debemos agregarla, el primer paso que se sigue es normalizar la información sobre un rango determinado (normalmente $[0, 1]$) y una vez hecho esto ya se puede efectuar el proceso de agregación. Análogamente, en el dominio lingüístico para poder manejar información lingüística multigranular debemos de unificarla, es decir, la información suministrada por todas las fuentes de información debe expresarse en un único dominio de expresión lingüístico normalizado, al que hemos llamado CBTL y lo notamos como S_T.

Antes de definir una función de transformación de la información lingüística multigranular al CBTL, S_T, hay que decidir cómo seleccionar dicho conjunto, S_T. Consideramos que, S_T, debe ser un conjunto de etiquetas que:

1. Permita mantener el grado de incertidumbre asociado a cada experto, y
2. conserve la capacidad de discriminación que expresan los valores de preferencia.

Partiendo de estas premisas, buscamos un CBTL con la máxima granularidad de los S_i que participan en el problema. Podemos encontrar las dos posibilidades siguientes:

- Existe un único conjunto de términos lingüísticos con máxima granularidad, en este caso, lo seleccionaremos como S_T.
- Existen dos o más conjuntos de etiquetas con máxima granularidad, entonces, S_T, será seleccionado dependiendo de la semántica de estos conjuntos de etiquetas, pudiéndose dar los dos siguientes casos a la hora de establecer S_T:
    1. Todos los conjuntos de etiquetas con máxima granularidad tienen idéntica semántica, entonces, S_T puede ser cualquiera de ellos.
    2. Existen varios conjuntos de etiquetas con diferente semántica. Entonces, S_T será un conjunto básico de términos lingüísticos con una cadinalidad mayor a la

que una persona es capaz de discriminar (normalmente 11 ó 13, ver [70]). Por tanto, en este caso definimos un CBTL con 15 etiquetas y la siguiente semántica (ver Figura 3.2):

s_0	$(0, 0, .07)$	s_1	$(0, .07, .14)$	s_2	$(.07, .14, .21)$
s_3	$(.14, .21, .28)$	s_4	$(.21, .28, .35)$	s_5	$(.28, .35, .42)$
s_6	$(.35, .42, .5)$	s_7	$(.42, .5, .58)$	s_8	$(.5, .58, .65)$
s_9	$(.58, .65, .72)$	s_{10}	$(.65, .72, .79)$	s_{11}	$(.72, .79, .86)$
s_{12}	$(.79, .86, .93)$	s_{13}	$(.86, .93, 1)$	s_{14}	$(.93, 1, 1)$

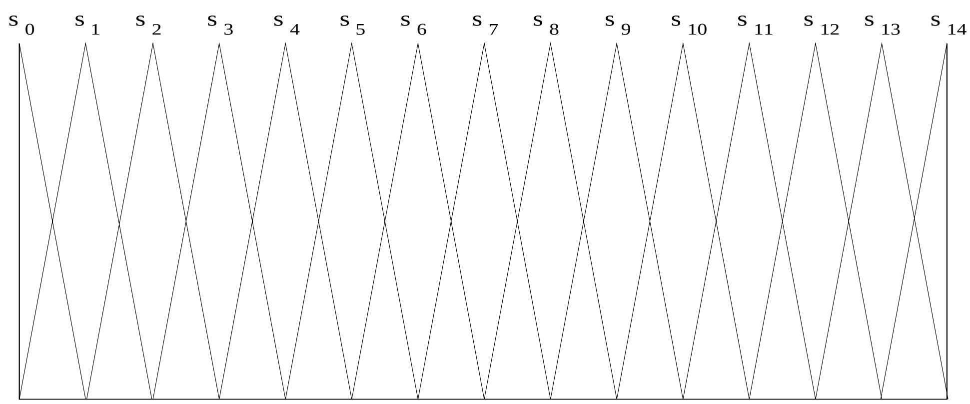

Figura 3.2: Conjunto de etiquetas de 15 términos

Obervación. Debe quedar claro que la justificación de la elección de este conjunto de etiquetas se basa en la idea de que la semántica es un parámetro que usaremos en el proceso de conversión, y por tanto, tiene efecto en el resultado final.

Una vez seleccionado el CBTL que vamos a utilizar para unificar la información de entrada (expresar en un único dominio de expresión), ya podemos realizar las distintas fases del proceso de normalización.

3.2.1.1 Conversión de Etiquetas Lingüísticas en Conjuntos Difusos sobre el Conjunto Básico de Términos Lingüísticos

El primer paso para unificar la información lingüística multigranular sobre el dominio de expresión ,S_T, es convertir cada etiqueta de entrada valorada en un conjunto de etiquetas,

S_i, en un conjunto difuso sobre S_T. Para realizar esta conversión definimos la siguiente función de transformación:

Definición 3.1. *Sea* $A = \{l_0, \ldots, l_p\}$ *y* $S_T = \{c_0, \ldots, c_g\}$ *dos conjuntos de términos lingüísticos* $g \geq p$. *Definimos una función de transformación multigranular,* τ_{AS_T} *como:*

$$\tau_{AS_T} : A \longrightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{AS_T}(l_i) = \{(c_k, \alpha_k^i) \ /k \in \{0, \ldots, g\}\}, \ \forall l_i \in A$$

$$\alpha_k^i = \max_y min\{\mu_{l_i}(y), \mu_{c_k}(y)\}$$

donde $F(S_T)$ *es el conjunto de conjuntos difusos definidos sobre* S_T*, siendo* $\mu_{l_i}(y)$ *y* $\mu_{c_k}(y)$ *las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos asociados a los términos* l_i *y* c_k*, respectivamente.*

Por tanto, el resultado de τ_{AS_T} para cualquier etiqueta lingüística de A es un conjunto difuso definido sobre el CBTL, S_T.

Obervación. Nosotros estamos considerando que todas las fuentes de información utilizan la misma escala $[0, 1]$. Hemos utilizado la operación *max-min* en esta definición porque es una herramienta clásica para calcular el grado de emparejamiento entre dos conjuntos difusos [31, 103]. Sin embargo, podrían seleccionarse otro gran número de especificaciones, por ejemplo, usar una *t-norma* o una *t-conorma* [34] en lugar de las operaciones max y min respectivamente.

Para simplificar la notación, notaremos $\tau_{S_iS_T}(y_{ij})$ como r^{ij}, que representa cada conjunto difuso de preferencia mediante sus grados de pertenencia.

$$r^{ij} = (\alpha_0^{ij}, \ldots, \alpha_g^{ij}).$$

3.2.1.2 Conversión de Conjuntos Difusos en 2-tuplas Lingüísticas

Hasta este momento, lo que hemos hecho es unificar la información lingüística multigranular de entrada transformando cada valor lingüístico "y_{ij}" suministrado por las fuentes de información en un conjunto difuso sobre S_T utilizando $\tau_{S_iS_T}(y_{ij})$, tal que, $\tau_{S_iS_T}(y_{ij}) =$

$\{(c_0, \alpha_0^{ij}), ..., (c_g, \alpha_g^{ij})\}$. Ahora vamos a convertir estos conjuntos difusos a 2-tuplas lingüísticas valoradas sobre S_T. Para ello, definimos una función χ que calcula un valor $\beta \in [0, g]$ que soporta la información del conjunto difuso $\tau_{S_i S_T}(y_{ij})$.

Definición 3.2. *Sea $\tau_{S_i S_T}(l_i) = \{(c_0, \alpha_0^i), \ldots, (c_g, \alpha_g^i)\}$ un conjunto difuso que representa un término lingüístico $l_i \in S_i$ sobre el conjunto básico de términos lingüísticos S_T. Vamos a obtener un valor numérico que soporta la información del conjunto difuso y está valorado en el intervalo $[0, g]$ usando la siguiente función:*

$$\chi : F(S_T) \longrightarrow [0, g]$$
$$\chi(\{(c_k, \alpha_k), k = 0, ...g, c_k \in S_T, \alpha_k \in [-.5, .5)\}) = \frac{\sum_{j=0}^{g} j\alpha_j^i}{\sum_{j=0}^{g} \alpha_j^i} = \beta.$$

Este valor β se puede transformar fácilmente en una 2-tupla lingüística utilizando la función Δ (Definición 2.4).

Por tanto, el proceso de conversión de los conjuntos difusos sobre S_T, r^{ij}, obtenidos en el paso anterior, a 2-tuplas lingüísticas valoradas sobre S_T puede expresarse formalmente como sigue:

$$\Delta(\chi(\tau_{S_i S_T}(y_{ij}))) = \Delta(\chi(r^{ij})) = (s_k, \alpha)^{ij},$$

donde $s_k \in S_T$ y $\alpha \in [-.5, .5)$ es el valor de la traslación simbólica.

En este momento toda la información de entrada está expresada de forma uniforme sobre un único conjunto de términos lingüísticos, S_T, utilizando 2-tuplas. Que es lo que se pretendía en la primera fase del esquema de agregación de la Figura 3.1.

3.2.2 Agregación de 2-tuplas

En esta fase calculamos los valores colectivos o agregados de la información lingüística multigranular de entrada.

En este estado del esquema de agregación, la información de entrada está representada mediante 2-tuplas lingüísticas valoradas sobre el CBTL, S_T, $(s_k, \alpha)^{ij}$ y nuestro objetivo es agregar dicha información. Para llevar a cabo la agregación de las 2-tuplas, $(s_k, \alpha)^{ij}$, que hemos obtenido en el paso anterior, únicamente debemos seleccionar cualquier operador de agregación sobre 2-tuplas y aplicarlo tal y como se indica a continuación.

Sea $\{(s_k,\alpha)^{1j},...,(s_k,\alpha)^{nj})\}$ un conjunto de 2-tuplas valoradas sobre S_T obtenidas al unificar la información lingüística multigranular de entrada, las cuales queremos agregar para obtener un valor colectivo de ellas. La operación de agregación puede expresarse formalmente como sigue:

$$FO((s_k,\alpha)^{1j},...,(s_k,\alpha)^{nj})) = (s_k,\alpha)^j,$$

donde FO es un operador de agregación para 2-tuplas que seleccionamos para realizar la operación y $(s_k,\alpha)^j$ es una 2-tupla valorada en S_T, que expresa el valor colectivo de las 2-tuplas de entrada.

3.2.3 Vuelta Atrás

Este es un paso opcional dentro del proceso de agregación de información lingüística multigranular. Dependiendo del problema en el que estemos trabajando, puede ser que los valores agregados obtenidos, 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica valoradas en el CBTL, S_T, estén expresados en un dominio de expresión distante al utilizado originalmente por las distintas fuentes de información del problema. En estas ocasiones parece apropiado ofrecer la posibilidad de convertir los resultados a los dominios originales para facilitar la comprensión de los resultados. Para llevar a cabo esta fase de *vuelta atrás*, utilizaremos los siguientes elementos:

1. *Una representación equivalente de una 2-tupla basada en la traslación simbólica mediante dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia.*

2. *Obtención de una 2-tupla en un dominio inicial a partir de dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia.* Diseñamos un proceso que obtenga una 2-tupla (s_k^i,α) basada en la traslación simbólica y valorada en S_i a partir de dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia y valoradas en un dominio distinto de S_i.

1. Representación Equivalente de una 2-tupla Mediante Dos 2-tuplas Basadas en el Grado de Pertenencia

Aquí presentamos una función que transforma una 2-tupla basada en la traslación simbólica en dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia y que soportan exactamente la misma cantidad de información que la 2-tupla inicial. Una 2-tupla basada en el grado de pertenencia es una 2-tupla (s_h, γ), donde s_h es una etiqueta lingüística y $\gamma \in [0, 1]$ un valor numérico que indica el grado de pertenencia de la información que estamos representando en la etiqueta s_h.

Definición 3.3. *Sea (s_k, α) una 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica con $s_k \in S_T$ y $\alpha \in [-.5, .5)$ cuyo valor numérico equivalente es $\Delta^{-1}(s_k, \alpha) = \beta$ con $\beta \in [0, g]$. La función δ calcula dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia, a partir del valor numérico equivalente de la 2-tupla inicial, que soportan la misma cantidad de información:*

$$\delta : [0, g] \longrightarrow \{S_T x[0, 1]\} x \{S_T x[0, 1]\}$$

$$\delta(\beta) = \{(s_h, 1 - \gamma), (s_{h+1}, \gamma)\},$$

donde

$$h = trunc(\beta)$$
$$\gamma = \beta - h,$$

trunc es la operación de truncar.

Un ejemplo del modo de operar de esta función puede ser el siguiente:

Sea $(s_8, .3)$ una 2-tupla basada en la traslación simbólica, con $s_8 \in S_T,\ S_T = \{s_0, ..., s_{14}\}$ y ".3" el valor de la traslación simbólica, sus dos 2-tuplas equivalentes basadas en el grado de pertenencia serán:

$$\delta(\Delta^{-1}(s_8, .3)) = \delta(8.3) = \{(s_8, .7), (s_9, .3)\}.$$

Con la función δ hemos obtenido una nueva representación para una 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica, mediante dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia. Cada una de estas 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia expresa una cantidad de información en su respectivo término lingüístico. A partir de estas dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia desarrollaremos un proceso para obtener una 2-tupla lingüística equivalente basada en la traslación simbólica y expresada en el dominio de expresión inicial S_i.

2. Obtención de una 2-tupla en un Dominio Inicial

Sean $(s_h, 1-\gamma)$, (s_{h+1}, γ) dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia, ambas valoradas en S_T. Nuestro objetivo es obtener una 2-tupla lingüística equivalente basada en la traslación simbólica y valorada en cualquier dominio de expresión S_i. Para ello, llevaremos a cabo el siguiente proceso:

1. Realizamos un proceso de emparejamiento utilizando la función $\tau_{S_T S_i}$ sobre los términos s_h y s_{h+1} obteniendo dos conjuntos difusos en S_i.

$$\begin{array}{ll} \tau_{S_T S_i}(s_h) = \{(s_0, \alpha_0^h), ..., (s_{g_i}, \alpha_{g_i}^h)\} & r_h = (\alpha_0^h, ..., \alpha_{g_i}^h) \\ \tau_{S_T S_i}(s_{h+1}) = \{(s_0, \alpha_0^{h+1}), ..., (s_{g_i}, \alpha_{g_i}^{h+1})\} & r_{h+1} = (\alpha_o^{h+1}, ..., \alpha_{g_i}^{h+1}). \end{array}$$

2. Los conjuntos difusos obtenidos se transforman en valores numéricos valorados en $[0, g_i]$ utilizando la función χ,

$$\chi(\tau_{S_T S_i}(s_h)) = \chi(r_h) = \beta_h$$
$$\chi(\tau_{S_T S_i}(s_{h+1})) = \chi(r_{h+1}) = \beta_{h+1}.$$

3. Para alcanzar nuestro objetivo, necesitamos tener un valor β valorado en $[0, g_i]$ que soporte la información de $(s_h, 1-\gamma)$, (s_{h+1}, γ). En este momento tenemos β_h y $\beta_{h+1} \in [0, g_i]$, que representan la información soportada por s_h y s_{h+1}, con los que realizaremos una combinación lineal utilizando los grados de pertenencia de estas etiquetas en sus respectivas 2-tuplas para obtener el valor que buscamos:

$$(\beta_h \cdot (1-\gamma)) + (\beta_{h+1} \cdot \gamma) = \beta,$$

donde $\beta \in [0, g_i]$ representa la misma información que las dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia. Ahora aplicando la función Δ a β obtendremos la 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica valorada en S_i:

$$\Delta(\beta) = (s_j^i, \alpha).$$

Este proceso debe realizarse para todos los dominios de expresión iniciales S_i, para que así todas las fuentes de información puedan entender fácilmente los resultados.

3.3 Problema de TDME con Información Lingüística Multigranular

Volvemos al ejemplo utilizado en el Capítulo anterior para mostrar el funcionamiento del proceso de agregación de información lingüística multigranular con 2-tuplas.

Supongamos una compañía de transportes que necesita renovar su sistema informático, para lo cuál contrata a una empresa de consultoría para realice un estudio sobre las distintas posibilidades que ofrece el mercado actual y decida cuál es la opción más conveniente para sus necesidades.

Las alternativas en este caso son:

- x_1 es un sistema basado en UNIX,
- x_2 es un sistema basado en Windows-NT,
- x_3 es un sistema basado en AS/400,
- x_4 es un sistema basado en VMS.

La empresa de consultoría tiene un grupo de cuatro departamentos de investigación (a cada uno de ellos lo consideraremos como un experto),

- p_1 es el departamento de análisis de costes,
- p_2 es el departamento de análisis de sistemas,
- p_3 es el departamento de análisis de riesgos,
- p_4 es el departamento de análisis tecnológico.

Cada departamento (experto) suministra sus valores de preferencia lingüísticos en conjuntos de términos lingüísticos que pueden tener distinta granularidad y/o semántica:

- p_1 suministra sus preferencias en el conjunto de 9 etiquetas, A.
- p_2 suministra sus preferencias en el conjunto de 7 etiquetas, B.

- p_3 suministra sus preferencias en el conjunto de 5 etiquetas, C.

- p_4 suministra sus preferencias en el conjunto de 9 etiquetas, D.

Conj. de	**etiquetas A**	**Conj. de**	**etiquetas B**
a_0	$(0,\ 0,\ .12)$	b_0	$(0,\ 0,\ .16)$
a_1	$(0,\ .12,\ .25)$	b_1	$(0,\ .16,\ .33)$
a_2	$(.12,\ .25,\ .37)$	b_2	$(.16,\ .33,\ .5)$
a_3	$(.25,\ .37,\ .5)$	b_3	$(.33,\ .5,\ .66)$
a_4	$(.37,\ .5,\ .62)$	b_4	$(.5,\ .66,\ .83)$
a_5	$(.5,\ .62,\ .75)$	b_5	$(.66,\ .83,\ .1)$
a_6	$(.62,\ .75,\ .87)$	b_6	$(.83,\ 1,\ 1)$.
a_7	$(.75,\ .87,\ .1)$		
a_8	$(.87,\ 1,\ 1)$.		

Conj. de	**etiquetas C**	**Conj. de**	**etiquetas D**
c_0	$(0, 0, .25)$	d_0	$(0, 0, 0, 0)$
c_1	$(0, .25, .5)$	d_1	$(0, .01, .02, .07)$
c_2	$(.25, .5, .75)$	d_2	$(.04, .1, .18, .23)$
c_3	$(.5, .75, 1)$	d_3	$(.17, .22, .36, .42)$
c_4	$(.75, 1, 1)$.	d_4	$(.32, .41, .58, .65)$
		d_5	$(.58, .63, .80, .86)$
		d_6	$(.72, .78, .92, .97)$
		d_7	$(.93, .98, .99, 1)$
		d_8	$(1, 1, 1, 1)$.

Los vectores de utilidad suministrados por los expertos son los siguientes:

		alternativas			
		x_1	x_2	x_3	x_4
expertos	p_1	a_4	a_6	a_3	a_5
	p_2	b_3	b_4	b_3	b_5
	p_3	c_2	c_3	c_2	c_1
	p_4	d_4	d_5	d_3	d_5

donde $y_{ij} \in S_i$ es el valor de preferencia dado por el experto p_i sobre la alternativa x_j.

3.3.1 Proceso de Decisión

Para resolver el problema de Toma de Decisiones Multiexperto con información lingüística multigranular que acabamos de presentar tenemos que aplicar un proceso de decisión, el cuál implica una fase de agregación de la información de entrada y una fase de explotación de los valores colectivos. El proceso de decisión que usamos en este caso sigue los siguientes pasos:

- *Cálculo del vector de preferencia colectiva.* Hay que calcular un valor de preferencia colectiva para cada alternativa, para ello, aplicaremos un proceso de agregación a los valores de preferencia suministrados por los expertos. Así obtendremos un vector de preferencia colectiva, cuyos valores expresen el valor de preferencia colectiva de todos los expertos sobre cada una de las alternativas.

- *Proceso de explotación.* Consiste en aplicar un *grado o función de selección* al vector de preferencia colectivo, para obtener un orden de alternativas, y de él un conjunto solución. En este ejemplo seleccionaremos para el conjunto solución aquella/s alternativa/s con máximo valor de preferencia colectiva.

3.3.2 Aplicación del Proceso de Decisión

Ahora desarrollamos cada una de las fases del proceso de decisión sobre el problema de TDME que queremos resolver.

A. Vector de Preferencia Colectiva

Para obtener un valor colectivo para cada alternativa hay que hacer un proceso de agregación sobre la información lingüística multigranular. Para ello utilizaremos el proceso de agregación presentado en este Capítulo.

1. **Expresar de forma uniforme la información**

   En primer lugar hay que seleccionar el CBTL, $S_T = \{c_0, \ldots, c_g\}$. En este caso, existen dos conjuntos de etiquetas con máxima granularidad y con distinta semántica, por tanto, seleccionaremos como S_T el conjunto de términos de 15 etiquetas de la Figura 3.2. Todos los valores de preferencia dados por los expertos son convertidos a S_T usando las siguientes funciones de transformación multigranular $\{\tau_{AS_T}, \tau_{BS_T}\tau_{CS_T}, \tau_{DS_T}\}$. Obteniéndose los siguientes resultados:

$$
\begin{array}{ll}
r^{11} & (0,0,0,0,.05,.45,.8,.82,.48,.23,0,0,0,0,0) \\
r^{12} & (0,0,0,0,.11,.45,.65,.95,.68,.39,.1,0,0,0,0) \\
r^{13} & (0,0,0,.22,.35,.59,.8,.98,.75,.52,.32,.1,0,0,0) \\
r^{14} & (0,0,0,0,.3,.77,1,1,1,.51,0,0,0,0,0) \\
r^{21} & (0,0,0,0,0,0,0,0,.25,.99,.7,.31,.01,0,0) \\
r^{22} & (0,0,0,0,0,0,0,.35,.63,.94,.76,.46,.2,0,0) \\
r^{23} & (0,0,0,0,0,0,.01,.25,.5,.7,.9,.9,.65,.45,.2) \\
r^{24} & (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,.55,0,0) \\
r^{31} & (0,0,0,.18,.55,.95,.7,.35,0,0,0,0,0,0,0) \\
r^{32} & (0,0,0,0,.1,.45,.65,.95,.68,.39,.1,0,0,0,0) \\
r^{33} & (0,0,0,.22,.35,.59,.8,.98,.75,.52,.32,.1,0,0,0) \\
r^{34} & (0,0,.41,1,1,.99,0,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
r^{41} & (0,0,0,0,0,0,0,.36,.71,.91,.56,.22,0,0,0) \\
r^{42} & (0,0,0,0,0,0,0,0,0,.23,.54,.84,.86,.58,.3) \\
r^{43} & (.25,.4,.7,.9,.87,.65,.4,.2,0,0,0,0,0,0,0) \\
r^{44} & (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,.55,0,0).
\end{array}
$$

2. **Convertir los conjuntos difusos (r^{ij}) en 2-tuplas lingüísticas**

   Transformaremos cada uno de los conjuntos difusos obtenidos, (r^{ij}), en 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica utilizando las funciones Δ y χ:

$$\begin{array}{ll}
\Delta(\chi(r^{11})) = (s_7, -.32)^{11} & \Delta(\chi(r^{12})) = (s_7, -.05)^{12} \\
\Delta(\chi(r^{13})) = (s_7, -.16)^{13} & \Delta(\chi(r^{14})) = (s_7, -.32)^{14} \\
\Delta(\chi(r^{21})) = (s_9, .48)^{21} & \Delta(\chi(r^{22})) = (s_9, .28)^{22} \\
\Delta(\chi(r^{23})) = (s_{10}, .25)^{23} & \Delta(\chi(r^{24})) = (s_{10}, .3)^{24} \\
\Delta(\chi(r^{31})) = (s_5, .17)^{31} & \Delta(\chi(r^{32})) = (s_7, -.05)^{32} \\
\Delta(\chi(r^{33})) = (s_7, -.15)^{33} & \Delta(\chi(r^{34})) = (s_4, -.25)^{34} \\
\Delta(\chi(r^{41})) = (s_9, -.15)^{41} & \Delta(\chi(r^{42})) = (s_{12}, -.43)^{42} \\
\Delta(\chi(r^{43})) = (s_3, .44)^{43} & \Delta(\chi(r^{44})) = (s_{10}, .3)^{44}.
\end{array}$$

Ahora toda la información de entrada está expresada en un único dominio S_T mediante 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica.

3. **Cálculo de valores de preferencia colectivos**. (Agregación de 2-tuplas) Para cada alternativa x_i calcularemos su valor de preferencia colectiva utilizando un operador de agregación de 2-tuplas lingüísticas, en este caso utilizamos el operador extendido LOWA, ϕ_Q^e, guiado por por el cuantificador lingüístico Q (Apéndice A). Específicamente, usamos el cuantificador "Tantos como sea posible" cuyos parámetros son $(.5, 1)$, con un vector de pesos $W = (0, 0, .5, .5)$. Los valores colectivos para cada alternativa, x_i, serán:

$$\begin{array}{l}
x_1 \longrightarrow \phi_Q^e((s_7, -.32)^{11}, (s_9, .48)^{21}, (s_5, .17)^{31}, (s_9, -.15)^{41}) = (s_6, -.1)^1 \\
x_2 \longrightarrow \phi_Q^e((s_7, -.05)^{12}, (s_9, .28)^{22}, (s_7, -.05)^{32}, (s_{12}, -.43)^{42}) = (s_7, -.05)^2 \\
x_3 \longrightarrow \phi_Q^e((s_7, -.16)^{13}, (s_{10}, .25)^{23}, (s_7, -.15)^{33}, (s_3, .44)^{43}) = (s_5, .15)^3 \\
x_4 \longrightarrow \phi_Q^e((s_7, -.32)^{14}, (s_{10}, .3)^{24}, (s_4, -.25)^{34}, (s_{10}, .3)^{44}) = (s_5, .2)^4.
\end{array}$$

El vector de preferencia colectiva es:

$$((s_6, -.1)^1, (s_7, -.05)^2, (s_5, .15)^3, (s_5, .2)^4).$$

4. **La vuelta atrás**

Acabamos de obtener un vector de preferencia colectiva con el cuál podemos resolver el proceso de decisión, pero dicho vector está expresado en un dominio de expresión,

S_T, distinto de A, B, C, D que son los utilizados por las fuentes de información. Por tanto, si lo consideramos conveniente, podemos realizar el proceso de vuelta atrás para expresar el vector de preferencia colectiva en cada uno de los dominios iniciales. En primer lugar, transformamos cada 2-tupla basada en la traslación simbólica del vector de preferencia colectiva en dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia:

$$\delta(\Delta^{-1}((s_6,-.1)^1)) = \{(s_5,.1),(s_6,.9)\}^1$$
$$\delta(\Delta^{-1}((s_7,-.05)^2)) = \{(s_6,.05),(s_7,.95)\}^2$$
$$\delta(\Delta^{-1}((s_5,.15)^3)) = \{(s_5,.85),(s_6,.15)\}^3$$
$$\delta(\Delta^{-1}((s_5,.2)^4)) = \{(s_5,.8),(s_6,.2)\}^4.$$

A continuación, seguimos el proceso de vuelta atrás:

(a) Proceso de coincidencia. Aplicamos las funciones $\tau_{S_TA}, \tau_{S_TB}, \tau_{S_TC}, \tau_{S_TD}$ a las etiquetas de las 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia:

$$\begin{aligned}
\tau_{S_TA}(s_5) = &\quad \{(a_0,0)(a_1,0)(a_2,0)(a_3,.48)(a_4,.9)(a_5,.28)(a_6,0)(a_7,0)(a_8,0)\}\\
\tau_{S_TA}(s_6) = &\quad \{(a_0,0)(a_1,0)(a_2,0)(a_3,.08)(a_4,.74)(a_5,.67)(a_6,0)(a_7,0)(a_8,0)\}\\
\tau_{S_TA}(s_7) = &\quad \{(a_0,0)(a_1,0)(a_2,0)(a_3,0)(a_4,.38)(a_5,1)(a_6,.35)(a_7,0)(a_8,0)\}\\
\tau_{S_TB}(s_5) = &\quad \{(b_0,0)(b_1,.2)(b_2,.92)(b_3,.37)(b_4,0)(b_5,0)(b_6,0)\}\\
\tau_{S_TB}(s_6) = &\quad \{(b_0,0)(b_1,0)(b_2,.57)(b_3,.7)(b_4,0)(b_5,0)(b_6,0)\}\\
\tau_{S_TB}(s_7) = &\quad \{(b_0,0)(b_1,0)(b_2,.26)(b_3,1)(b_4,.3)(b_5,0)(b_6,0)\}\\
\tau_{S_TC}(s_5) = &\quad \{(c_0,0)(c_1,.63)(c_2,.63)(c_3,0)(c4,0)\}\\
\tau_{S_TC}(s_6) = &\quad \{(c_0,0)(c_1,.35)(c_2,.85)(c_3,0)(c4,0)\}\\
\tau_{S_TC}(s_7) = &\quad \{(c_0,0)(c_1,.2)(c_2,1)(c_3,.25)(c4,0)\}\\
\tau_{S_TD}(s_5) = &\quad \{(d_0,0)(d_1,0)(d_2,0)(d_3,1)(d_4,.65)(d_5,0)(d_6,0)(d_7,0)(d_8,0)\}\\
\tau_{S_TD}(s_6) = &\quad \{(d_0,0)(d_1,0)(d_2,0)(d_3,.4)(d_4,1)(d_5,0)(d_6,0)(d_7,0)(d_8,0)\}\\
\tau_{S_TD}(s_7) = &\quad \{(d_0,0)(d_1,0)(d_2,0)(d_3,0)(d_4,1)(d_5,.41)(d_6,0)(d_7,0)(d_8,0)\}.
\end{aligned}$$

(b) Transformación de los conjuntos difusos en valores numéricos:

$$\begin{array}{llllll}
\chi(\tau_{S_TA}(s_5)) = & 3.88 & \chi(\tau_{S_TA}(s_6)) = & 4.4 & \chi(\tau_{S_TA}(s_7)) = & 4.98\\
\chi(\tau_{S_TB}(s_5)) = & 2.12 & \chi(\tau_{S_TB}(s_6)) = & 2.55 & \chi(\tau_{S_TB}(s_7)) = & 3.06\\
\chi(\tau_{S_TC}(s_5)) = & 1.5 & \chi(\tau_{S_TC}(s_6)) = & 1.7 & \chi(\tau_{S_TC}(s_7)) = & 2.03\\
\chi(\tau_{S_TD}(s_5)) = & 3.39 & \chi(\tau_{S_TD}(s_6)) = & 3.71 & \chi(\tau_{S_TD}(s_7)) = & 4.29.
\end{array}$$

(c) Expresar el vector colectivo de preferencia en cada dominio original:

i. Dominio A:

$$\{(a_4, .34)^1, (a_5, -.05)^2, (a_4, -.05)^3, (a_4, -.02)^4\}.$$

donde el valor de preferencia colectiva de x_1 se obtiene como sigue:

$$\Delta((3.88 * .1) + (4.4 * .9)) = (a_4, .34)$$

ii. Dominio B:

$$\{(b_3, -.49)^1, (b_3, .03)^2, (b_2, .18)^3, (b_2, .2)^4\}.$$

iii. Dominio C:

$$\{(c_2, -.32)^1, (c_2, .01)^2, (c_2, -.47)^3, (c_2, -.46)^4\}.$$

iv. Dominio D:

$$\{(d_4, -.33)^1, (d_4, .05)^2, (d_3, .43)^3, (d_3, .45)^4\}.$$

B. Proceso de Explotación

Finalmente, aplicamos el grado de selección de dominancia al vector de preferencia colectiva para obtener el conjunto solución de alternativas. En este problema el conjunto solución es:

$$\{x_2\}$$

Por tanto la mejor alternativa para la compañía de distribución de acuerdo a la opinión de los expertos es el "Sistema Basado en Windows NT".

Hay que observar que si aplicamos el grado de selección de dominancia al vector de preferencia colectiva expresado en S_T la solución obtenida será exactamente la misma. Por lo tanto, resaltar que el proceso de vuelta atrás no cambia la solución sino que mejora la comprensión de los resultados.

3.4 Comentarios Finales

En este Capítulo hemos estudiado el problema de *operar con información lingüística multigranular*.

Utillizando el modelo de representación lingüística con 2-tuplas hemos desarrollado un proceso de normalización sobre este tipo de información, con lo que quedan solventados los problemas asociados a la agregación de información lingüística multigranular, ya que, hemos unificado toda la información en 2-tuplas lingüísticas valoradas en un único conjunto de términos lingüísticos. A continuación hemos presentado un proceso de agregación de información lingüística multigranular el cuál ha sido aplicado a un problema de TDME.

Con el proceso de normalización de información lingüística multigranular y el modelo computacional sobre la representación lingüística con 2-tuplas, hemos desarrollado una metodología que nos permite tratar con este tipo de información en cualquier problema.

Capítulo 4

Integración de Información Lingüística y Numérica

Los tipos de aspectos que puede presentar un problema los hemos clasificado en dos categorías:

- *Aspectos cuantitativos*: aquellos que son medidos o valorados mediante valores numéricos precisos (longitud, superficie,...).
- *Aspectos cualitativos*: son difíciles de valorar mediante un valor preciso (diseño, confort,...). Este tipo de aspectos se adaptan mejor a una valoración cualitativa mediante variables lingüísticas.

Habitualmente los problemas suelen presentar aspectos de un solo tipo, es decir, o bien cuantitativos o bien cualitativos. Sin embargo, también existen problemas que presentan ambos tipos de aspectos, es decir, presentan información numérica y lingüística. En estos casos tanto el enfoque lingüístico difuso como el enfoque numérico se presentan como ineficaces a la hora de combinar ambos tipos de información, ya que ninguno tiene definidos procesos de conversión estándares ni operadores de agregación sobre ambos tipos de información.

En este Capítulo utilizaremos el modelado lingüístico de preferencias basado en 2-tuplas para construir un método que facilita los procesos de agregación de información numérica y lingüística. Finalmente, utilizaremos dicho método de agregación sobre un problema de TDMC con información lingüística y numérica.

4.1 El Problema de la Integración de Información Numérica y Lingüística

Suponemos un contexto en el que la información de entrada se suministra utilizando escalas absolutas y compatibles, es decir, todos los valores de preferencia están valorados o en el dominio numérico $[0,1]$ o en un conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, ..., s_g\}$ con funciones de pertenencia sobre el intervalo $[0,1]$.

En la literatura encontramos un gran número de trabajos que nos proporcionan herramientas para resolver problemas que o bien, presentan únicamente aspectos cuantitativos [1, 32, 87] o bien, sólo presentan aspectos cualitativos [7, 28, 39, 60, 66, 67, 79, 93]. Sin embargo, existen pocos trabajos que se ocupen de proporcionar herramientas para resolver problemas que presenten aspectos cualitativos y cuantitativos a la vez [96, 25].

Cuando en un problema de Toma de Decisiones aparece información numérica y lingüística puede deberse a distintos motivos:

- En un problema de TDME, los expertos que participan en el problema provienen de áreas disciplinares muy diferentes y puede ser que unos prefieran expresar su conocimiento mediante valores numéricos, mientras que los otros lo hacen mediante valores lingüísticos.

- La naturaleza propia del problema incluya aspectos cualitativos y cuantitativos. Esto puede ocurrir en problemas de TDMC. En los que varios criterios sean cualitativos y otros sean cuantitativos.

En la literatura especializada encontramos dos aproximaciones para abordar la resolución de problemas de Toma de Decisiones en los que hay información lingüística y numérica:

- En [96] se utiliza la teoría de Dempster-Shafer. En él, se presenta un enfoque basado en la *Evidencia* que puede manejar problemas de decisión bajo "*incertidumbre*" que presentan tanto aspectos cualitativos como cuantitativos. Este enfoque se basa en un modelo de análisis de evaluación y en la regla de combinación de la evidencia de la teoría de Dempster-Shafer. Es similar a un enfoque de modelado de preferencias, que consta de un marco de razonamiento de evidencia para la evaluación y cuantificación de los aspectos cualitativos. Con este método se obtiene un orden basado en índices numéricos que ordena las distintas alternativas.

- En [25] se utiliza el Enfoque Lingüístico Difuso. En este trabajo se definen una serie de funciones de transformación de información entre los dominios numérico y lingüístico y una vez convertida toda la información a un único dominio se le aplica cualquiera de los procesos definidos sobre ese tipo de información para resolver el problema.

Nos centramos en la segunda aproximación y observamos que los procesos presentados en [25] presentan una serie de dificultades:

1. Pérdida de precisión a la hora de combinar la información.
2. Las funciones de transformación entre elementos de un dominio y otro no son biyectivas, por lo tanto, pierden información.

En este capítulo se presenta una propuesta que pretende solventar las dificultades de la aproximación presentada en [25].

4.2 Proceso de Agregación de Información Numérica y Lingüística Basado en el Modelo de Representación Lingüística con 2-tuplas

Para facilitar la combinación de información numérica y lingüística y solucionar los problemas que aparecen en los enfoques existentes desarrollamos un proceso de agregación basado en el modelo de representación lingüístico con 2-tuplas como sigue:

1. En primer lugar, presentamos un conjunto de funciones de transformación entre valores numéricos en $[0, 1]$ y 2-tuplas lingüísticas valoradas en un conjunto de etiquetas S. Para que estas funciones sean biyectivas, es decir, no tengan pérdida de información impondremos un conjunto de condiciones.

2. Una vez que tenemos estas funciones de transformación desarrollamos un proceso de agregación para información lingüística y numérica que sigue el siguiente esquema (ver Figura 4.1):

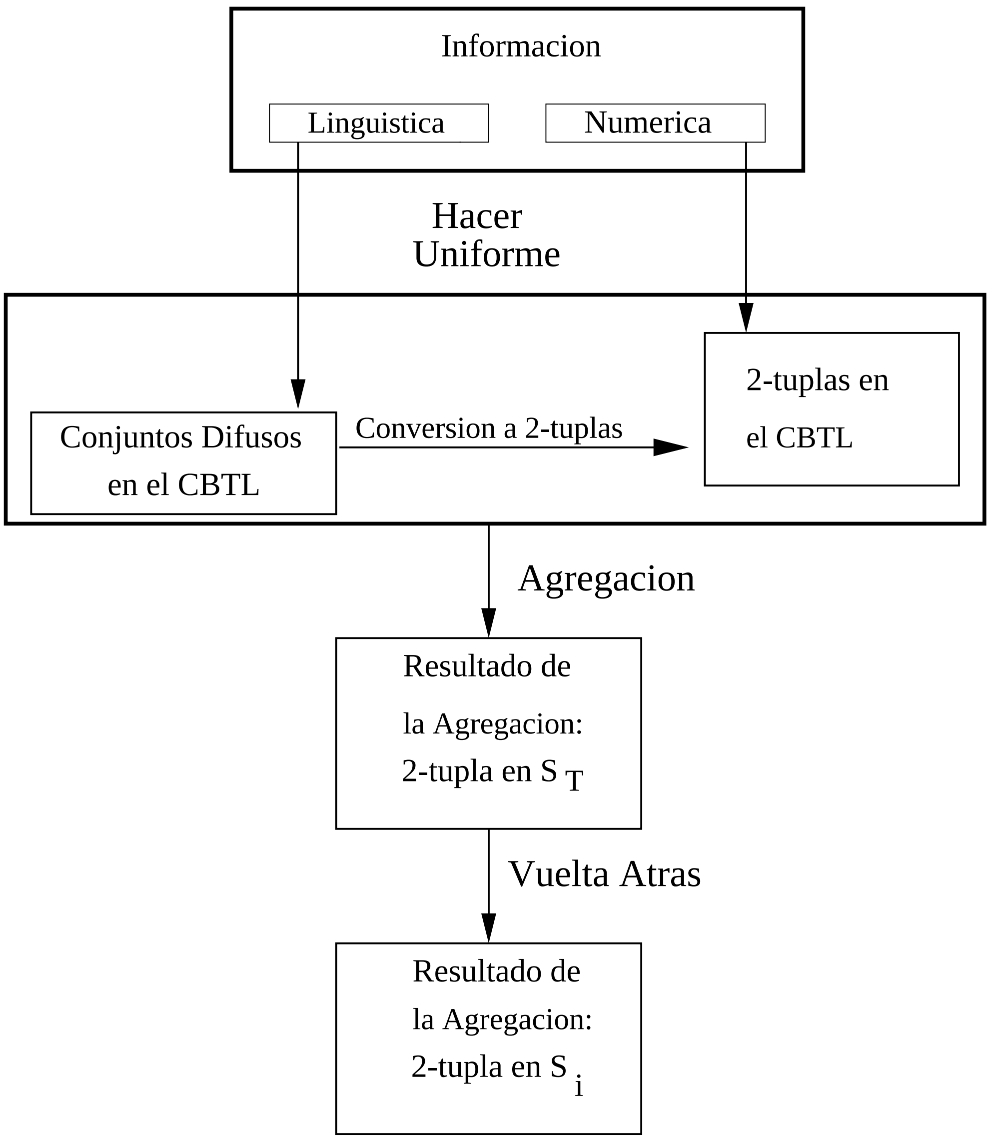

Figura 4.1: Esquema del proceso de agregación de información lingüística y numérica

(a) Hacer uniforme la información numérica y lingüística:

- Seleccionar el conjunto básico de términos lingüísticos (CBTL), sobre el que se unificará la información.
- Convertir los valores numéricos valorados en $[0,1]$ en 2-tuplas lingüísticas valoradas en el CBTL, S_T.
- Convertir las etiquetas lingüísticas de entrada valoradas en S en 2-tuplas valoradas en S_T.

(b) Agregación de las 2-tuplas obtenidas en el paso anterior.

(c) Vuelta Atrás. Esta fase del proceso de agregación lo que hace es convertir las 2-tuplas que expresan valores colectivos y que están valoradas en el conjunto de etiquetas S_T a los dominios de expresión iniciales, en caso de ser necesario. Este paso no es obligatorio, pero puede ser conveniente.

4.2.1 Funciones de Transformación entre Valores en [0,1] y 2-tuplas Lingüísticas

En esta sección vamos a definir funciones de transformación entre valores numéricos valorados en el intervalo $[0,1]$ y 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica valoradas en un conjunto de etiquetas S. Una vez definidas estas funciones de transformación impondremos una serie de condiciones al conjunto de etiquetas S para que dichas funciones de transformación sean biyectivas, es decir, sin pérdida de información.

4.2.1.1 Función de Transformación de un Valor en [0,1] a una 2-tupla en S

Sea $\vartheta \in [0,1]$ un valor numérico y $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. Nuestro objetivo es obtener una 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica valorada en S y que represente la misma información que ϑ. Para realizar esto, definiremos el siguiente proceso de transformación:

1. Convertir ϑ en un conjunto difuso sobre S.
2. Transformar el conjunto difuso anterior en una 2-tupla lingüística valorada en S.

Mostramos este proceso gráficamente en la Figura 4.2:

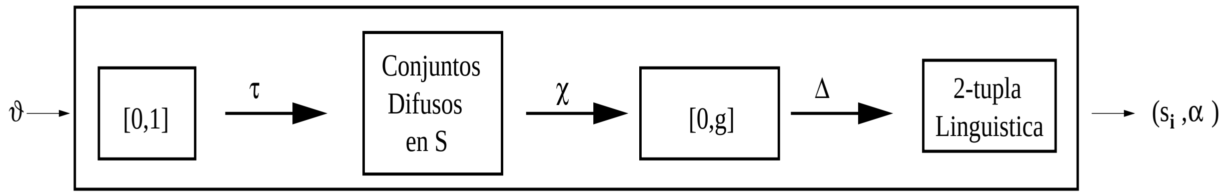

Figura 4.2: Transformación de un valor en $[0,1]$ a una 2-tupla linguistica

1. Conversión de ϑ a un Conjunto Difuso en S

Sea $F(S)$ el conjunto de conjuntos difusos en S, para transformar un valor numérico $\vartheta \in [0,1]$ en un conjunto difuso en $F(S)$ calcularemos el grado de emparejamiento de ϑ con las funciones de pertenencia de los términos lingüísticos de S.

Definición 4.1. *Sea $\vartheta \in [0,1]$ un número y $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. Transformaremos ϑ en un conjunto difuso en S utilizando la función τ definida como sigue:*

$$\tau : [0,1] \longrightarrow F(S)$$

$$\tau(\vartheta) = \{(s_0, \alpha_0), ..., (s_g, \alpha_g)\}, s_i \in S \ y \ \alpha_i \in [0,1], \ tal \ que,$$

$$\alpha_i = \mu_{s_i}(\vartheta) = \begin{cases} 0, & si \ \vartheta \notin Support(\mu_{s_i}(x)) \\ \frac{\vartheta - a_i}{b_i - a_i}, & si \ a_i \leq \vartheta \leq b_i \\ 1, & si \ b_i \leq \vartheta \leq d_i \\ \frac{c_i - \vartheta}{c_i - d_i}, & si \ d_i \leq \vartheta \leq c_i \end{cases}$$

No olvidemos que estamos considerando que la semántica de una función de pertenencia μ_{s_i} de una etiqueta s_i viene dada por una función paramétrica cuyos parámetros son (a_i, b_i, d_i, c_i).

Ejemplo. Sea $\vartheta = .78$ un valor numérico a convertir en un conjunto difuso en S. En este ejemplo calculamos cuatro conjuntos difusos de ϑ sobre cuatro conjuntos de términos lingüísticos distintos:

	S_1	S_2	S_3	S_4
B	$(0, 0, .3)$	$(0, 0, .25)$	$(0, 0, 0, .1)$	$(0, 0, .2)$
MB	$(0, .3, .5)$	$(0, .25, .5)$	$(0, .1, .3, .4)$	$(.1, .2, .4)$
M	$(.2, .5, .8)$	$(.25, .5, .75)$	$(.3, .4, .6, .7)$	$(.3, .5, .7)$
A	$(.5, .7, 1)$	$(.5, .75, 1)$	$(.6, .7, .9, 1)$	$(.6, .8, 1)$
MA	$(.7, 1, 1)$	$(.75, 1, 1)$	$(.9, 1, 1, 1)$	$(.8, 1, 1)$

$$\tau_{S_1}(.78) = \{(MB, 0), (B, .0), (M, .06), (A, .73), (MA, .26)\}$$
$$\tau_{S_2}(.78) = \{(MB, 0), (B, .0), (M, .0), (A, .88), (MA, .12)\}$$
$$\tau_{S_3}(.78) = \{(MB, 0), (B, .0), (M, 0), (A, 1), (MA, 0)\}$$
$$\tau_{S_4}(.78) = \{(MB, 0), (B, .0), (M, .0), (A, .9), (MA, .0)\}$$

La representación gráfica de los cálculos anteriores la podemos ver en la Figura 4.3,

2. Transformación de un Conjunto Difuso de S en una 2-tupla Lingüística Valorada en S

Hasta el momento, hemos convertido los valores numéricos en conjuntos difusos de S, nuestro objetivo es obtener una 2-tupla lingüística valorada en S. Para conseguir dicho objetivo utilizamos la función χ definida en el Capítulo 3 (Definición 3.2)

$$\chi(\tau(\vartheta)) = \chi(\{(s_j, \alpha_j),\ j = 0, ..., g\}) = \frac{\sum_{j=0}^{g} j\alpha_j}{\sum_{j=0}^{g} \alpha_j} = \beta$$

El valor β obtenido por χ es fácil de transformar directamente a una 2-tupla lingüística valorada en S usando la función Δ (Definición 2.4).

Ejemplo. Aplicando el proceso que acabamos de definir a los conjuntos difusos obtenidos en el anterior ejemplo, obtendremos:

$$\chi(\tau_{S_1}(.78)) = \chi((MB, 0), (B, 0), (M, .06), (A, .73), (MA, .26)) = 3.19$$
$$\chi(\tau_{S_2}(.78)) = \chi((MB, 0), (B, 0), (M, 0), (A, .88), (MA, .12)) = 3.12$$
$$\chi(\tau_{S_3}(.78)) = \chi((MB, 0), (B, 0), (M, 0), (A, 1), (MA, 0)) = 3$$
$$\chi(\tau_{S_4}(.78)) = \chi((MB, 0), (B, 0), (M, 0), (A, .9), (MA, 0)) = 2.7$$

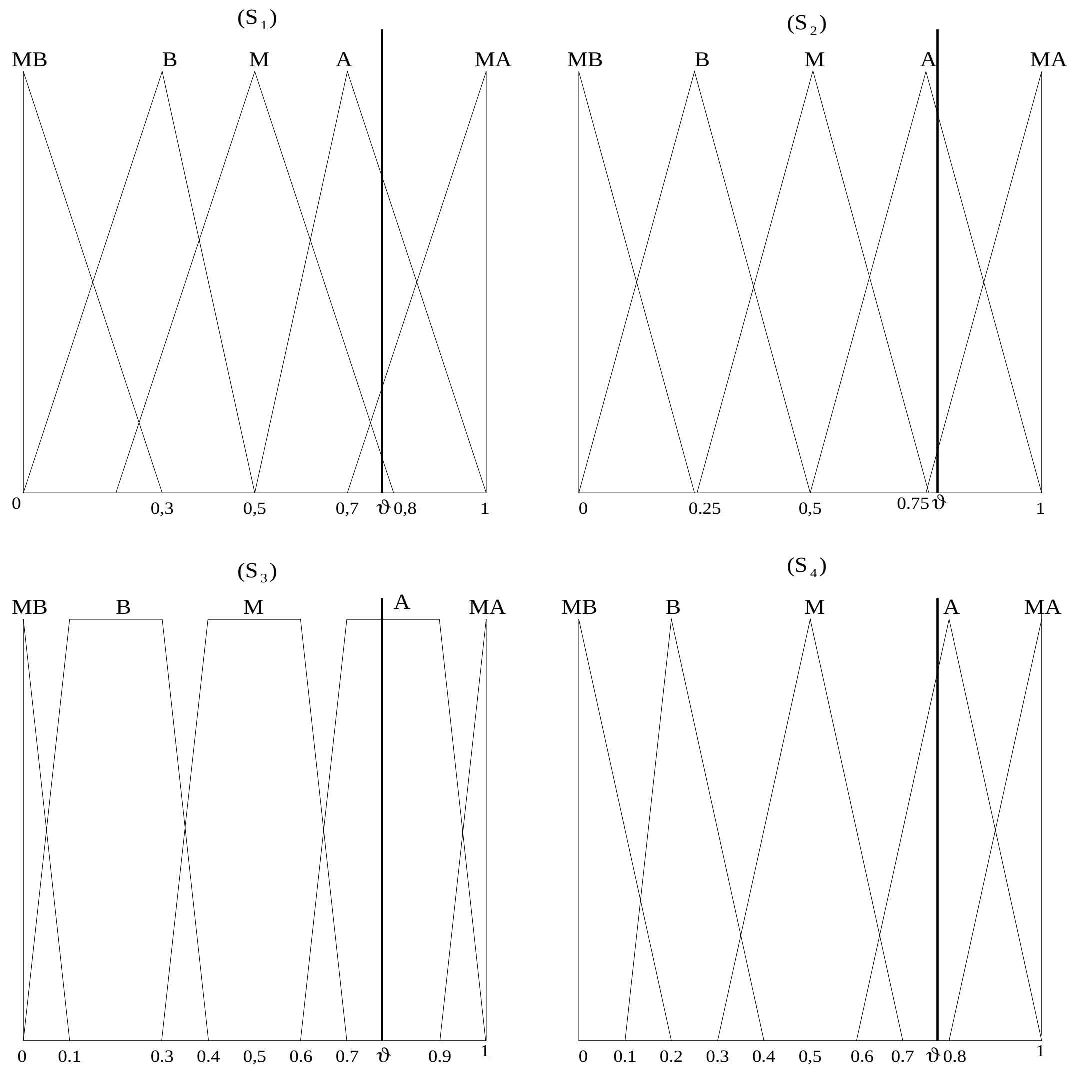

Figura 4.3: Coincidencia entre valores numéricos y lingüísticos

a partir de estos valores, las 2-tuplas que soportan la información de 0.78 en cada conjunto de términos lingüísticos S_i, son las siguientes:

$$S_1 \Longrightarrow \Delta(3.19) = (A, .19)$$
$$S_2 \Longrightarrow \Delta(3.12) = (A, .12)$$
$$S_3 \Longrightarrow \Delta(3) = (A, 0)$$
$$S_4 \Longrightarrow \Delta(2.7) = (A, -.3)$$

4.2.1.2 Función de Transformación de una 2-tupla Lingüística a un Valor en [0,1]

Sea (s_i, α) una 2-tupla lingüística, en este caso nuestro objetivo es obtener un valor $\vartheta \in [0, 1]$ que soporte la información representada por (s_i, α). Presentaremos un proceso de transformación acorde al esquema de la Figura 4.4:

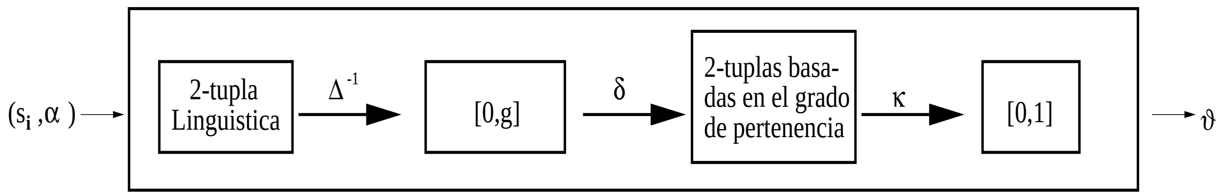

Figura 4.4: Transformación de una 2-tupla a un valor $[0, 1]$

Utilizaremos la función δ (Definición 3.3) que transforma una 2-tupla basada en la traslación simbólica en dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia:

$$\delta : [0, g] \longrightarrow \{S_T x[0, 1]\}x\{S_T x[0, 1]\}$$

$$\delta(\beta) = \{(s_h, 1 - \gamma), (s_{h+1}, \gamma)\}$$

Estas dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia las utilizaremos para obtener un valor numérico que soporte la misma información que la 2-tupla inicial y que pertenezca a $[0, 1]$.

Para conseguir nuestro objetivo utilizamos el concepto de *valor característico* asociado a un número difuso [21, 25] (Apéndice B).

Utilizando los valores característicos asociados a las funciones de pertenencia de las etiquetas y obtenidos por la función $FVC(\cdot)$, y haciendo uso de las dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia se obtiene un valor numérico en $[0, 1]$ a partir de la siguiente definición.

Definición 4.2. *Sean* $(s_h, 1-\gamma)$ *y* (s_{h+1}, γ) *dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia. Su valor numérico equivalente en* $[0, 1]$ *se obtiene a través de la función* κ*:*

$$\kappa : \{S_T x[0, 1]\}x\{S_T x[0, 1]\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$\kappa((s_h, 1-\gamma), (s_{h+1}, \gamma)) = FVC(\mu_{s_h}) \cdot (1-\gamma) + FVC(\mu_{s_{h+1}}) \cdot \gamma$$

Ejemplo. A partir de las 2-tuplas basadas en la traslación simbólica obtenidas en el ejemplo anterior, transformaremos cada una en dos 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia:

$$S_1 \Longrightarrow \delta((A, .19)) = (A, .81), (MA, .19)$$
$$S_2 \Longrightarrow \delta((A, .12)) = (A, .88), (MA, .12)$$
$$S_3 \Longrightarrow \delta((A, 0)) = (A, 1), (MA, 0)$$
$$S_4 \Longrightarrow \delta((A, -.3)) = (M, .7), (A, .3)$$

Una vez tenemos estas 2-tuplas basadas en el grado de pertenencia, calculamos los valores numéricos equivalentes utilizando la *función Máximo Valor* como valor característico,

$$S_1 \Longrightarrow \kappa((A, .81), (MA, .19)) = .75$$
$$S_2 \Longrightarrow \kappa((A, .88), (MA, .12) = .78$$
$$S_3 \Longrightarrow \kappa((A, 1), (MA, 0) = .8$$
$$S_4 \Longrightarrow \kappa((M, .7), (A, .3) = .6$$

Observamos que del mismo valor inicial $\vartheta = .78$, dependiendo del conjunto de etiquetas utilizado, el resultado de la transformación puede ser exacto o perder información. A continuación, estudiaremos cuáles son las condiciones que hay que imponer, para que las funciones de transformación sean biyectivas, es decir, no exista ninguna pérdida de información.

4.2.1.3 Condiciones para que las Transformaciones entre Valores [0,1] y 2-tuplas Lingüísticas en S Sean Biyectivas

Las condiciones que se han de cumplir para que en las transformaciones entre valores numéricos y lingüísticos no se pierda información, son aquellas que garanticen el cumplimiento de la siguiente expresión:

$$\kappa(\delta(\Delta^{-1}(\Delta(\chi(\tau(\vartheta)))))) = \vartheta,$$

y que se exponen en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de etiquetas verificando:

1. *S es una partición difusa.* Según Ruspini [76], una familia finita $\{s_0, ..., s_g\}$ de subconjuntos difusos en el universo del discurso X (en nuestro caso $X = [0, 1]$) se llama partición difusa si:
$$\sum_{i=0}^{g} \mu_{s_i}(x) = 1,\ \forall x \in X.$$

2. *Las funciones de pertenencia de sus términos lingüísticos sean triangulares*, es decir, $s_i = (a_i, b_i, c_i)$.

3. *La función valor característico, $FVC(\cdot)$, verifica que $FVC(s_i) = x/\mu_{s_i}(x) = 1$*, es decir, la función valor característico usada devuelve el valor con máximo grado de pertenencia, b_i.

Estas condiciones son necesarias y suficientes para que los procesos de transformación entre 2-tuplas lingüísticas y valores numéricos en $[0, 1]$ y viceversa se realicen sin pérdida de información, verificándose la expresión,

$$\kappa(\delta(\Delta^{-1}(\Delta(\chi(\tau(\vartheta)))))) = \vartheta$$

Demostración

1. *Condiciones Suficientes*.

   Sea $\vartheta \in [0, 1]$ un valor el cuál queremos transformar a una 2-tupla lingüística en $S = \{s_0, ..., s_g\}$. Vamos a probar que las tres condiciones enumeradas en la proposición son suficientes para que se cumpla la siguiente expresión

$$\kappa(\delta(\Delta^{-1}(\Delta(\chi(\tau(\vartheta)))))) = \vartheta,$$

   que es equivalente a,
$$\kappa(\delta(\chi(\tau(\vartheta)))) = \vartheta.$$

   Las condiciones 1 y 2 implican que, $\forall i \in \{0, g-1\}$:

$$\left.\begin{array}{l} s_i = (a_i, b_i, c_i) \\ s_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}) \end{array}\right\} \Longrightarrow b_i = a_{i+1} \text{ and } c_i = b_{i+1}.$$

Por otro lado,

$$\tau(\vartheta) = \{(s_i, \alpha_i), i = 0, ..., g\}$$
$$\alpha_i > 0 \Longleftrightarrow \vartheta \in Support(s_i).$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que, $\vartheta \in [b_i, c_i]$, entonces

$$\vartheta \in [b_i, c_i] \Longleftrightarrow \vartheta \in [a_{i+1}, b_{i+1}],\ \alpha_i > 0,\ \alpha_{i+1} > 0 \text{ and } \alpha_j = 0 \ \ \forall j \notin \{i, i+1\}.$$

En este momento, tenemos

$$\kappa(\delta(\chi((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})))),$$

y sabemos que

$$\chi((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})) = i\alpha_i + (i+1)\alpha_{i+1},$$

de aquí, obtenemos

$$\kappa(\delta(i\alpha_i + (i+1)\alpha_{i+1})).$$

Al ser S una partición difusa (Condición 1),

$$\mu_{s_i}(\vartheta) + \mu_{s_{i+1}}(\vartheta) = 1 \Longrightarrow \alpha_i + \alpha_{i+1} = 1,$$

entonces,

$$\delta(i\alpha_i + (i+1)\alpha_{i+1}) = \delta(i(1 - \alpha_{i+1}) + (i+1)\alpha_{i+1})) = \delta(i + \alpha_{i+1})$$

$$\delta(\beta) = \delta(h + \gamma) = \delta(i + \alpha_{i+1}) \text{ con } \begin{cases} h = i \\ \gamma = \alpha_{i+1}, \end{cases}$$

por tanto,

$$\delta(i + \alpha_{i+1}) = \{(s_i, (1 - \alpha_{i+1})), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})\} = \{(s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})\}.$$

El último paso que tenemos que probar es

$$\kappa((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})) = \vartheta,$$

donde

$$\kappa((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})) = FVC(s_i)\alpha_i + FVC(s_{i+1})\alpha_{i+1}.$$

De acuerdo a la condición 3, $FVC(s_j) = b_j \;/\; \mu_{s_j}(b_j) = 1$, y b_j es único según la condición 2, entonces

$$\kappa((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})) = \alpha_i b_i + (1 - \alpha_i) b_{i+1} = \alpha_i b_i + (1 - \alpha_i) c_i = \alpha_i (b_i - c_i) + c_i,$$

y,

$$\alpha_i = \frac{c_i - \vartheta}{c_i - b_i},$$

entonces,

$$\kappa((s_i, \alpha_i), (s_{i+1}, \alpha_{i+1})) = \alpha_i (b_i - c_i) + c_i = \frac{c_i - \vartheta}{c_i - b_i}(b_i - c_i) + c_i = \vartheta.$$

2. *Condiciones Necesarias*

   (a) Supongamos que S no es una partición difusa, es decir,

   $$\mu_{s_i}(\vartheta) + \mu_{s_{i+1}}(\vartheta) \neq 1,$$

   entonces, la expresión $\kappa(\cdot) = \vartheta$ es falsa, tal y como podemos ver con los procesos de transformación realizados sobre los conjuntos de etiquetas S_1 y S_4 en la sección anterior (ver Figura 4.3). Contradicción.

   (b) Si los términos de S no son triangulares la función valor característico $FVC(s_i)$ devuelve un valor, pero en este caso puede que exista más de un valor, x, tal que $\mu_{s_i}(x) = 1$, por lo que el valor obtenido por κ puede ser diferente del inicial, tal y como ocurre en el proceso de transformación sobre el conjunto de términos S_3 (ver Figura 4.3). Contradicción.

   (c) Si la función valor característico $FVC(s_i)$ no devuelve el valor donde se alcanza el máximo grado de pertenencia, ocurre como en (b) y el valor x obtenido por κ puede ser diferente de ϑ, tal y como puede verse en el siguiente ejemplo.

   Supongamos que usamos el centro de gravedad como función valor característico $FVC(\cdot)$, donde

   $$FVC(s_i) = \frac{\int_V v \mu_{y_{s_i}}(v) dv}{\int_V \mu_{y_{s_i}}(v) dv}.$$

Para números difusos con funciones de pertenencia trapezoidales, tenemos:

$$FVC(s_i) = \begin{cases} a^i, & \text{si } a_i = b_i = d_i = c_i \\ \frac{(c_i)^2+(d_i)^2-(b_i)^2-(a_i)^2+c_id_i-a_ib_i}{3(c_i+d_i-b_i-a_i)}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\vartheta = .78$ y el siguiente conjunto de etiquetas S_5:

	S_5
L	$(0, 0, .4)$
VL	$(0, .4, .5)$
M	$(.4, .5, .9)$
H	$(.5, .9, 1)$
VH	$(.9, 1, 1)$

Tenemos que,

$$\tau_{S_5}(.78) = \{(VL, 0), (L, .0), (M, .7), (H, .3), (VH, 0)\}$$
$$\chi(\tau_{S_5}(.78)) = \chi((VL, 0), (L, 0), (M, .7), (H, .3), (VH, 0)) = 2.3$$
$$\Delta(2.3) = (M, .3)$$
$$\delta(\Delta^{-1}((M, .3))) = \{(M, .7)(H, .3)\}$$
$$\kappa((M, .7)(H, .3)) = .66$$

Contradicción, ya que $\kappa(\cdot) \neq \vartheta$

Hemos probado la necesidad de las tres condiciones, ya que si eliminamos alguna encontramos una contradicción.

4.2.2 Agregación de Información Numérica y Lingüística

Una vez definidas las funciones de transformación entre información numérica y 2-tuplas lingüísticas presentamos un método de agregación sobre este tipo de información que actúa de acuerdo con las siguientes fases:

- *Unificación de la información de entrada.* Tanto la información lingüística valorada en S como la información numérica valorada en $[0, 1]$, se expresarán mediante 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica y valoradas en un CBTL notado como S_T. Existen dos posibilidades a la hora de seleccionar S_T:

1. Si S verifica la Proposición 1, entonces S_T puede ser el mismo S.
2. Si S no verifica la Proposición 1, debemos de transformar toda la información a 2-tuplas lingüísticas valoradas en un CBTL que si la verifique.

- *Combinación de la información.* Cuando toda la información de entrada está expresada mediante 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica, utilizamos un operador de agregación para 2-tuplas lingüísticas para obtener los valores colectivos.
- *Vuelta atrás.* Expresamos los resultados en los dominios iniciales de expresión.

Este proceso es descrito gráficamente en la Figura 4.5.

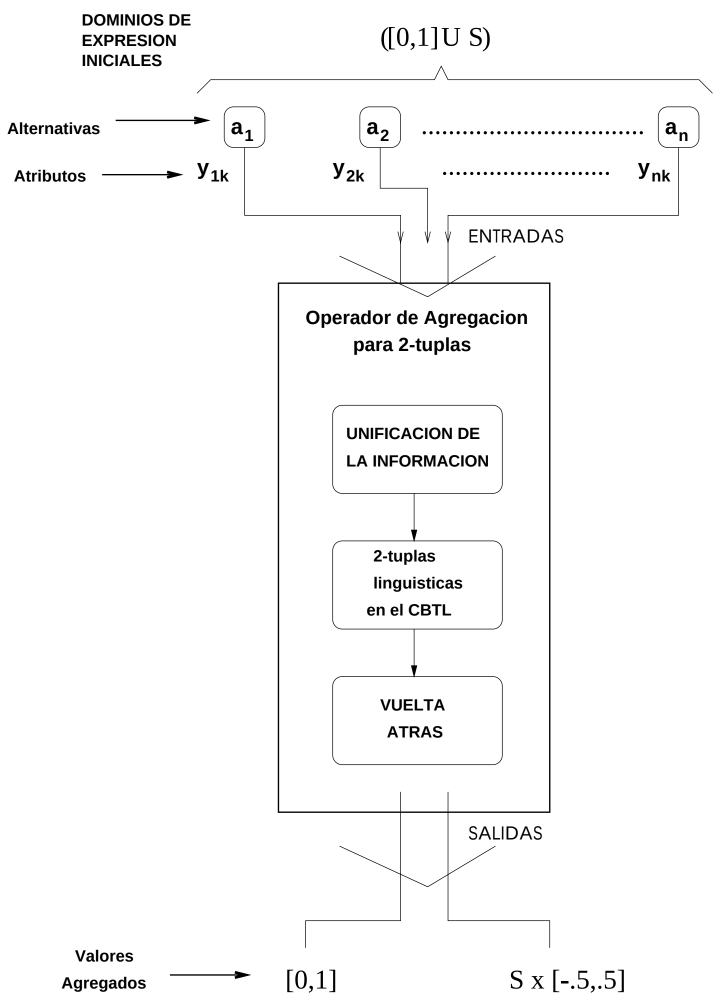

Figura 4.5: Proceso de Agregación de información lingüística y numérica

4.2.2.1 Unificación de Información Numérica y Lingüística en 2-tuplas Lingüísticas

Sin pérdida de generalidad, suponemos que los valores numéricos de entrada están valorados en el intervalo $[0,1]$, para convertir estos valores en 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica usaremos el proceso presentado en 4.2, (ver Figura 4.2).

En cuanto a los valores lingüísticos, en primer lugar tenemos que ver cúal será el conjunto S_T en el que estarán valoradas dichas 2-tuplas. Existen dos posibilidades:

a) S verifica la Proposición 1.

Sea $S = S_T = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos verificando la proposición 1. Para transformar las etiquetas de entrada en 2-tuplas basadas en la traslación simbólica utilizamos la función θ (Definición 2.3).

$$s_i \in S \Longrightarrow \theta(s_i) = (s_i, 0).$$

b) S no verifica la Proposición 1.

En este caso, debemos transformar la información lingüística de entrada valorada en S a 2-tuplas en un CBTL que verifique la Proposición 1. Antes de definir una función de transformación entre S y el CBTL, hay que decidir cómo seleccionar S_T.

Consideraremos que S_T debe ser un conjunto de etiquetas que permita mantener el grado de incertidumbre asociado a los términos de S, la capacidad de discriminación para expresar los valores de preferencia y verificar la Proposición 1. Teniendo en cuenta estas premisas, buscamos un CBTL con máxima granularidad, por lo tanto, S_T puede ser un conjunto de términos con una cardinalidad superior a la que una persona es capaz de discriminar (normalmente 11 ó 13, ver [70]). Por tanto, definimos un CBTL con 15 términos y la siguiente semántica:

s_0	$(0, 0, .07)$	s_1	$(0, .07, .14)$	s_2	$(.07, .14, .21)$
s_3	$(.14, .21, .28)$	s_4	$(.21, .28, .35)$	s_5	$(.28, .35, .42)$
s_6	$(.35, .42, .5)$	s_7	$(.42, .5, .58)$	s_8	$(.5, .58, .65)$
s_9	$(.58, .65, .72)$	s_{10}	$(.65, .72, .79)$	s_{11}	$(.72, .79, .86)$
s_{12}	$(.79, .86, .93)$	s_{13}	$(.86, .93, 1)$	s_{14}	$(.93, 1, 1)$

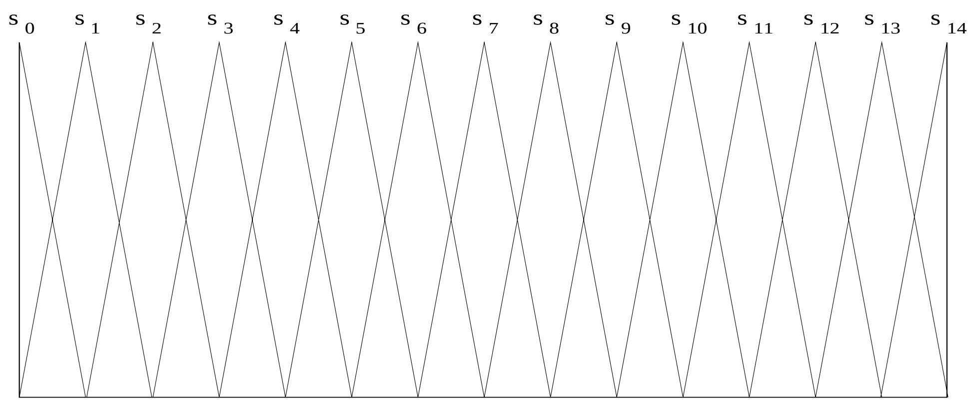

Figura 4.6: Conjunto de etiquetas de 15 términos

En este momento ya podemos definir el proceso de transformación de un término lingüístico valorado en S a una 2-tupla basada en la traslación simbólica valorada en S_T (Figura 4.7).

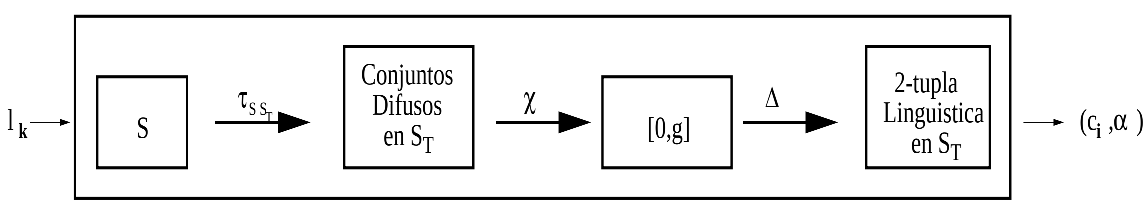

Figura 4.7: Transformación de S a una 2-tupla en S_T

En primer lugar utilizamos una función que representa cada valor de preferencia valorado en S como un conjunto difuso en el CBTL, S_T. Una función que realiza este proceso fue definida en el capítulo 3 y es la función τ_{SS_T} (Definición 3.1).

Por tanto, el resultado de $\tau_{SS_T}(l_i)$ para cualquier término de S es un conjunto difuso en el CBTL, S_T. A partir de este conjunto difuso obtendremos una 2-tupla en S_T utilizando las funciones χ (Definición 3.2) y Δ (Definición 2.4).

4.2.2.2 Agregación de 2-tuplas Lingüísticas

El objetivo último de los procesos de decisión es ordenar el conjunto de alternativas de acuerdo al conjunto de criterios que en él aparecen. Para realizar esta ordenación, el proceso de decisión en primer lugar agrega toda la información de entrada para obtener un valor colectivo de cada alternativa. En los problemas de TDMC la información de entrada son valores de preferencia (numéricos o lingüísticos) para todos los criterios de cada alternativa. Esta información se unificará usando los procesos de transformación que acabamos de presentar usando la representación de 2-tuplas lingüísticas valoradas en S_T. Por tanto, la información que hay que agregar para obtener los valores colectivos son estas 2-tuplas, para lo que se necesita un operador de agregación de 2-tuplas lingüísticas.

Formalmente, la expresión de esta operación de agregación sería:

$$FO((l_1, \alpha_1), ..., (l_{k_1}, \alpha_{k_1}), ..., (l_{k_1+k_2}, \alpha_{k_1+k_2})) = (l, \alpha),$$

donde FO es un operador de agregación de 2-tuplas, y (l, α) es el valor colectivo o agregado. En el Capítulo 2 hemos presentado una amplia gama de operadores de agregación para 2-tuplas lingüísticas, como la combinación convexa extendida, el operador LOWA extendido, el operdor extendido OR-LIKE S-OWA, etc.

4.2.2.3 Vuelta Atrás

La información de entrada está valorada o en $[0, 1]$, o en S, sin embargo los valores colectivos son 2-tuplas lingüísticas valoradas en S_T, por tanto en algunos casos puede ser conveniente para mejorar la comprensión de los resultados, expresar los valores colectivos en los dominios de expresión iniciales S y $[0, 1]$.

La conveniencia de realizar esta conversión de los valores colectivos depende de lo distante que esté S_T del dominio original. Existen varias posibilidades:

1. Si $S_T = S$, entonces las 2-tuplas lingüísticas en S están lo suficientemente cercanas a S. Por lo que en este caso no hace falta realizar ninguna conversión.

2. Si $S_T \neq S$, entonces S_T será un dominio distante de S y parece apropiado expresar las 2-tuplas valoradas en S_T mediante 2-tuplas equivalentes en S.

3. Si el dominio de expresión inicial era el numérico $[0,1]$, parece conveniente expresar los valores colectivos mediante valores numéricos en $[0,1]$ equivalentes a las 2-tuplas lingüísticas. Para realizar esto, utilizaremos el proceso de transformación presentado en 4.1.2 (ver Figura 4.4).

Transformación de una 2-tupla Valorada en S_T a una 2-tupla Valorada en S

Sean $S = \{l_0, \ldots, l_p\}$ y $S_T = \{c_0, \ldots, c_g\}$ dos conjuntos de etiquetas. De (c_i, α) queremos obtener una 2-tupla equivalente (l_i, α). Para ello realizamos el siguiente proceso.

1. A (c_i, α) le aplicamos las funciones Δ^{-1} (Definición 2.5) y δ (Definición 3.3), obteniendo,
$$\delta(\Delta^{-1}((c_i, \alpha))) = \{(c_h, 1-\gamma), (c_{h+1}, \gamma)\}.$$

2. Nuestro objetivo es obtener una 2-tupla basada en la traslación simbólica valorada en S. Para ésto, realizaremos los siguientes pasos:

   (a) Primero, realizamos un proceso de emparejamiento aplicando la función τ_{S_TS} (Definición 3.1) a c_h y c_{h+1} obteniendo dos conjuntos difusos en S.
$$\tau_{S_TS}(c_h) = \{(l_0, \alpha_0), ..., (l_p, \alpha_p)\}$$
$$\tau_{S_TS}(c_{h+1}) = \{(l_0, \alpha_0^{h+1}), ..., (l_g, \alpha_p)\}.$$

   (b) Los conjuntos difusos se convertirán a valores numéricos en $[0,p]$ mediante la función χ,
$$\chi(\tau_{S_TS}(c_h)) = \beta_h$$
$$\chi(\tau_{S_TS}(c_{h+1})) = \beta_{h+1}$$

(c) Para alcanzar nuestro objetivo necesitamos obtener un valor, $\beta \in [0, p]$ que soporte la misma información que $\{(c_h, 1-\gamma),\ (c_{h+1}, \gamma)\}$. En este momento tenemos β_h y $\beta_{h+1} \in [0, p]$, que representan la información soportada por c_h *y* c_{h+1}, sobre esta información aplicamos una combinación lineal utilizando los grados de pertenencia de estas etiquetas en sus respectivas 2-tuplas.

$$(\beta_h * (1-\gamma)) + (\beta_{h+1} * \gamma) = \beta,$$

donde $\beta \in [0, p]$ representa la misma información que (c_i, α). Entonces, aplicando Δ a β obtendremos la 2-tupla lingüística basada en la traslación simbólica valorada en S que estabamos buscando:

$$\Delta(\beta) = (l_k, \alpha),\ l_k \in S.$$

Gráficamente, este proceso se describe como sigue:

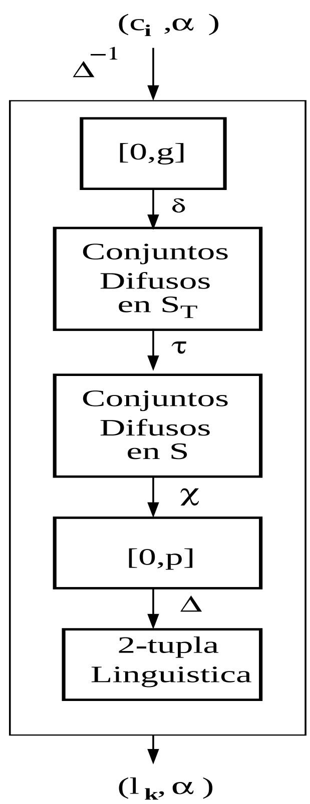

Figura 4.8: Obtención de una 2-tupla en S a partir de una 2-tupla en S_T

4.3 Problema de TDMC con Información Lingüística y Numérica

Consideremos un cliente que quiere comprar un coche. Está indeciso entre cuatro modelos distintos, "coche 1", "coche 2", "coche 3" y "coche 4". A la hora de comprar el coche el cliente tiene en cuenta seis criterios, en los que se incluyen aspectos cuantitativos y aspectos cualitativos, para decidir qué coche comprar.

1. Criterios Cuantitativos.
   - C_1, consumo de combustible.
   - C_2, grado aerodinámico.
   - C_3, precio.
2. Criterios Cualitativos.
   - C_4, confort del vehículo.
   - C_5, diseño exterior e interior.
   - C_6, nivel de seguridad.

Los criterios cuantitativos los valora entre $[0, 1]$ y los cualitativos en S (Figura 1.2), donde S verifica la Proposición 1 y por tanto S_T será el mismo S. Los valores de preferencia suministrados para los criterios de cada coche están descritos en la Tabla 4.1.

Tipo de Criterios	*Criterios Cuantitativos*			*Criterios Cualitativos*		
Alternativas	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
coche 1	.6	.9	.6	MA	A	MA
coche 2	.8	.7	.8	A	M	M
coche 3	.8	.6	.9	M	A	M
coche 4	.85	.8	.8	A	MA	A

Tabla 4.1. Valores de Preferencia

4.3.1 Proceso de Decisión

Para resolver este problema utilizaremos el siguiente proceso de decisión simple:

1. *Proceso de Agregación.* Calculamos el grado colectivo de preferencia de cada alternativa. Todos los valores de preferencia de los atributos de cada alternativa son agregados para obtener dicho valor colectivo.

   En este ejemplo usaremos el operador media aritmética extendido para agregar la información y en el dominio numérico usaremos el "valor máximo" como valor característico.

2. *Proceso de Explotación.* A estos valores colectivos se les aplicará un grado de selección para ordenar las alternativas, y seleccionaremos la mejor como solución del problema.

4.3.2 Aplicación del Proceso de Decisión

En primer lugar hay que obtener los valores colectivos, para ello, usaremos el método de agregación presentado en este Capítulo.

1. Hay que unificar la información de entrada en 2-tuplas lingüísticas basadas en la traslación simbólica. Como S verifica la Proposición 1, usaremos la función θ para transformar los valores lingüísticos en S y las funciones τ, χ y Δ para transformar los valores numéricos:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
coche 1	$(A, -.12)$	$(MA, .4)$	$(A, -.12)$	$(MA, 0)$	$(A, 0)$	$(VH, 0)$
coche 2	$(MA, -.25)$	$(A, .18)$	$(MA, -.25)$	$(A, 0)$	$(M, 0)$	$(M, 0)$
coche 3	$(MA, -.25)$	$(A, -.12)$	$(MA, .4)$	$(M, 0)$	$(A, 0)$	$(M, 0)$
coche 4	$(MA, 13)$	$(MA, -.25)$	$(MA, -.25)$	$(A, 0)$	$(MA, 0)$	$(H, 0)$

Tabla 4.2. Valores de preferencia expresados en 2-tuplas

Un ejemplo de cálculo de estos valores puede ser,

$$\tau(y_{11}) = \tau(.6) = \{(N,0),(MB,0),(B,0),(M,.42),(A,.58),(MA,0),(P,0)\}$$

$$\chi(\{(N,0),(MB,0),(B,0),(M,.42),(A,.58),(MA,0),(P,0)\}) = 3.78$$

$$\Delta(3.78) = (A,-.12)$$

2. Cálculo de los valores colectivos. Agregación de 2-tuplas.

   Para obtener el grado colectivo agregaremos las preferencias de todos los criterios para cada alternativa. Para ello usamos el operador media aritmética extendido (Definición 2.10). Obtenemos los siguientes valores colectivos

	coche 1	*coche* 2	*coche* 3	*coche* 4
$2 - tuplas$	$(MA,-.48)$	$(A,-.06)$	$(A,-.02)$	$(MA,-.4)$
Valores numéricos	.74	.65	.66	.76

Tabla 4.3. Valores Colectivos

   donde los valores numéricos de la Tabla 4.3 se obtienen de las 2-tuplas usando las funciones δ y κ. La función κ utiliza como valor característico el *Valor Máximo*.

$$\delta(MA,-.48) = \{(A,.52),(MA,.48)\}$$

$$\kappa((A,.52),(MA,.48)) = FVC(A) * .52 + FVC(MA) * .48 = .74$$

A partir de los valores obtenidos el proceso de decisión selecciona la mejor alternativa. En este caso seleccionamos como mejor alternativa aquella con máximo valor de preferencia colectiva.

Por tanto, de los resultados de la Tabla 4.3 la mejor alternativa es:

$$x_4$$

Vemos que la vuelta atrás no modifica los resultados, sólo facilita su compresión.

4.4 Comentarios Finales

En este Capítulo se ha abordado el problema de trabajar en contextos con información numérica y lingüística. Hemos utilizado el modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas para modelar la información en este tipo de problemas. Definimos un conjunto de funciones que nos permiten transformar valores numéricos, lingüísticos y 2-tuplas entre ellos sin pérdida de información. De esta forma podemos unificar la información numérica y lingüística en 2-tuplas y luego volver a expresar la información en los dominios originales. Como aplicación de estas funciones hemos desarrollado un proceso de agregación para contextos de este tipo y lo hemos aplicado sobre un problema de TDMC con criterios cuantitativos y cualitativos.

Con las herramientas presentadas en éste hemos desarrollado un método que nos permite trabajar sin pérdida de información en problemas definidos en contextos que tienen información numérica y lingüística.

Capítulo 5

Aplicación: Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en Biotecnología

En este Capítulo vamos a hacer un estudio comparativo entre el modelado de preferencias lingüísticas basado en el Principio de Extensión y el modelado de preferencias lingüísticas basado en 2-tuplas, con objeto de mostrar las ventajas que proporciona tanto en descripción como en precisión el modelado basado en 2-tuplas frente al modelo computacional lingüístico basado en el Principio de Extensión .

El problema sobre el que vamos a llevar a cabo el estudio, es un problema de *Toma de Decisión Multiexperto-Multicriterio* (TDME-MC) con información lingüística multigranular, *"Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en Biotecnología"* [15].

En primer lugar indicaremos en qué consiste la selección de una estrategía de transferencia de tecnología, y después definiremos el problema específico con el que vamos a trabajar presentado en [15]. A continuación presentamos un modelo de selección para resolver este problema, modelo a seguir tanto para la resolución que utiliza un modelado de preferencias lingüísticas clásico con un modelo computacional basado en el Principio de Extensión utilizado en [15], como la resolución basada en el modelado de preferencias lingüísticas con 2-tuplas presentado en esta memoria. Por último haremos un estudio comparativo entre ambos modelos indicando las ventajas del modelado de preferencias lingüísticas con 2-tuplas.

5.1 Estrategia de Transferencia de Tecnología

En [10] se presenta una técnica para controlar proyectos de I+D subvencionados por el Gobierno, que podría utilizarse para evaluar *innovaciones* durante su fase de precomercialización para identificar una estrategia apropiada de transferencia de tecnología. En dicho artículo se describen seis tipos de estrategias de comercialización, que se han llevado a cabo con éxito por parte de las agencias federales:

1. Encargar el I+D a compañías industriales,
2. trabajar con consorcios industriales,
3. autorizar patentes a la industria,
4. influenciar a los decisores clave,
5. trabajar con organizaciones bursátiles, y
6. fabricar según demanda de usuario.

Se proponen tres conjuntos de criterios para clasificar las distintas *innovaciones*:

1. *Criterios tecnológicos.* Examinan las innovaciones desde un punto de vista científico y tecnológico.
2. *Criterios de mercado.* Evalúan las innovaciones sobre distintos perfiles de mercado.
3. *Criterios políticos.* Estudian el grado de soporte que está dispuesto a asumir el gobierno.

En [10] se desarrolla una guía, que enlaza los criterios de evaluación con la estrategia de transferencia de tecnología, para seleccionar una estrategia de transferencia de evaluación apropiada, basada principalmente en cinco innovaciones totalmente comercializadas.

La transferencia de tecnología desde su origen hasta que se convierte en una aplicación comercial es un proceso muy complejo. Este es un problema de TDME-MC en situaciones deficientemente estructuradas. Debe de hacerse un análisis cuidadoso entre criterios, alternativas, pesos, y decisores (expertos) antes de tomar una decisión. Si se utiliza un método de decisión clásico, siempre tenemos que encontrar datos precisos, pero en muchas ocasiones no podemos obtener datos precisos porque los datos vienen de la experiencia y juicio del experto. Por ejemplo, en [10] se define el criterio de evaluación "naturaleza de la industria del mercado" como un criterio crisp. Se considera que una innovación bajo este criterio puede distinguirse entre *competitivo* y *concentrado* en un término exacto. Y se utiliza un sistema ternario (alto/a veces/no) para representar el grado de adecuación de la estrategia respecto al criterio. En este punto hay que hacer dos observaciones:

1. No hay un límite claro entre "competitivo" y "concentrado". Los datos de mercado como los datos económicos son imprecisos y difusos por naturaleza debido al tiempo, al espacio, a la medida de error o a un contexto incierto [16]. La utilización de enfoques crisp, ya sean procesos aleatorios o determinísticos, sesga la información si los conceptos de mercado son intrínsecamente imprecisos o difusos.

2. Una estrategia de transferencia de tecnología enfrentada a un criterio de evaluación, debería de admitir grados de adecuación imprecisos, sin ser valores aproximados excesivamente estrictos o no naturales. Las valoraciones de las alternativas enfrentadas a varios criterios y a la importancia de los criterios, dependen a veces de un juicio o una aproximación.

Debido a la presencia de este tipo de imprecisión en el problema de decisión, esperamos una transición gradual desde la pertenencia a la no pertenencia de una innovación en consonancia con unos criterios específicos también como con las ponderaciones de los distintos criterios.

5.2 Definición de un Problema de Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en Biotecnología

En esta sección presentamos el problema de selección de estrategias de transferencia de tecnología sobre biotecnología que aparece en [15] sobre el que vamos a realizar el estudio comparativo.

El Centro de Desarrollo para la Biotecnología (CDB), está parcialmente subvencionado por el gobierno de Taiwan, es un centro de investigación y desarrollo, cuya función es hacer avanzar y promover la industria biotecnológica. La biotecnología es una industria estratégica en Taiwan. Según su actual capacidad tecnológica y su demanda industrial, el CDB ha seleccionado la industria farmaceútica, química, agrícola y la protección ambiental como impulso de su tarea investigadora. Sin embargo, el CDB se enfrenta al problema de seleccionar la estrategia de transferencia de tecnología apropiada para asegurar el desarrollo de cada "innovación" en contra del fracaso comercial.

El ejemplo sobre el que vamos a trabajar discute sobre la estrategia de selección de transferencia de tecnología de la *"Vacuna de la hepatitis B"* a través de la observación y estudio del CDB y una empresa de Taiwan.

Con la ayuda de ejecutivos del CDB y de distintas empresas, utilizando entrevistas personales a los participantes se les inquirió a cerca de una lista de criterios y estrategias comunes que hubieran resultado exitosas en la transferencia de innovaciones subvencionadas por el Estado. Un comité de cuatro expertos, $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, se forma para decidir cuál es la estrategia de transferencia de tecnología más apropiada. Para ello se consideran cuatro criterios de selección:

1. *Disponibilidad tecnológica* (C_1). Este criterio describe la tecnología I+D reflejando su grado de difusión, incluyendo el proceso de innovación de producto, investigación general o aplicada, simplicidad o complejidad, propietario o no propietario, incertidumbre tecnológica alta o baja, tiempo deseado de transferencia y coste de transferencia.

2. *Mercado potencial* (C_2). Este criterio incluye consideraciones como la extensión a posibles aplicaciones, mercado competitivo o concentrado, tamaño del mercado, y ciclo de vida del producto.

3. *Apoyo político* (C_3). Se refiere al grado de apoyo del gobierno, incluyendo subvenciones, esención de impuestos, proyectos de infraestructura requeridos durante los años de desarrollo del proyecto I+D.

4. *Capacidad de Administración* (C_4). Refleja si las funciones de negocio y gestión del receptor (Empresa) son o no efectivas, incluyendo la capacidad productiva, recursos humanos y financieros, y sus técnicas de gestión comercial.

Las estrategias más comunes utilizadas con éxito en la transferencia de proyectos de I+D subvencionados por el gobierno son las siguientes:

1. $x_1 =$ *Compra* (Las empresas compran el resultado del proyecto I+D a las fuentes de investigación).

2. $x_2 =$ *Trabajar con un socio industrial* (ambos comparten el 50% de los recursos).

3. $x_3 =$ *Ceder derechos de explotación* (La licencia otorga los derechos para producir el producto en el mercado).

4. $x_4 =$ *I+D cooperativo* (La compañía carga con el 100% de los costes; la compañía es la encargada del proceso de comercialización como una forma de mejorar el esfuerzo de I+D).

En el problema de decisión que estamos definiendo, los expertos pueden expresar sus preferencias bien mediante números difusos triangulares o bien con variables lingüísticas. En principio, los expertos pueden utilizar un conjunto de etiquetas determinado, S, tanto, para expresar la importancia de los criterios como, para expresar la preferencia lingüística de cada alternativa evaluando lo apropiado de cada alternativa a los distintos criterios. Puede darse el caso de que algún experto no identifique claramente sus preferencias con el conjunto anterior, en este caso puede expresar sus preferencias utilizando sus propios números difusos triangulares o su propio conjunto de etiquetas. Por tanto vemos que se puede modelar como problema de TDME-MC que presenta información lingüística multigranular.

5.3 Método de Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología en un Problema de Biotecnología

Para resolver el problema definido en la sección anterior vamos a definir un análisis a dos niveles. El primer nivel evalúa la importancia de los criterios de decisión y el segundo nivel asigna preferencias con cada estrategia de acuerdo con cada criterio de evaluación.

Antes de desarrollar un proceso de selección para dicho problema, presentamos un esquema general de un problema de Toma de Decisión Multiexperto-Multicriterio. Supongamos n expertos $P = \{p_1, ..., p_n\}$ los cuáles son los encargados de valorar lo apropiadas que son m alternativas $X = \{x_1, ..., x_m\}$ según cada uno de k criterios $C = \{C_1, ..., C_k\}$ y la importancia de cada uno de ellos. Sea S_{itj} $(i = 1, 2, ..., m; t = 1, 2, ..., k; j = 1, 2, ..., n)$ la preferencia asignada a la alternativa x_i por el experto p_j de acuerdo con el criterio C_t. Sea W_{tj} el peso dado al criterio C_t por el experto p_j. El comité debe agregar las preferencias S_{itj} de los n expertos para cada alternativa x_i según el criterio C_t para obtener la preferencia colectiva S_{it}, también debe agregar los pesos, W_{tj}, dados por los expertos p_j a cada criterio, C_t, para obtener la importancia relativa, W_t, de cada criterio. Cada valor colectivo S_{it} será ponderado por el peso W_t. Entonces, lo apropiado de cada alternativa x_i se nota por, F_i, y se obtiene agregando S_{it} de acuerdo a la importancia de cada criterio, C_t, indicada por W_t. Para finalizar, se ordenan los resultados F_i $(i = 1, ..., m)$ con objeto de obtener la alternativa más apropiada.

Por tanto, el proceso de selección multiexperto multicriterio de una estrategia de transferencia de tecnología presentado en [15] está estructurado como sigue:

- **Proceso de Agregación**

  1. Constitución de un comité de expertos, que identifiquen los criterios de selección para las distintas estrategias de transferencia de tecnología.

2. Proporcionar los valores de importancia (pesos) de cada uno de los criterios de selección y las preferencias para las alternativas bajo cada criterio.

3. Evaluar la importancia de cada criterio y lo apropiado que es cada alternativa enfrentada a los diversos criterios.

4. Agregar los pesos de los criterios para obtener un peso agregado W_t; agregar las opiniones de los expertos para obtener preferencias S_{it} de la alternativa x_i bajo el criterio C_t. En este momento agregar S_{it} y W_t con respecto a cada criterio para obtener un índice de adecuación F_i para cada alternativa.

- **Proceso de Explotación**

1. Calcular un orden $U_T(F_i)$ asociado a los índices de adecuación F_i.

2. Seleccionar la estrategia de transferencia de tecnología con máximo valor en el orden calculado en el paso anterior.

5.4 Resolución del Problema de Selección de Transferencia de Tecnología en Biotecnología

En esta sección vamos a resolver el problema definido en este Capítulo de acuerdo al método de selección presentado en la sección anterior utilizando:

1. El modelado de preferencias lingüísticas clásico con un modelo computacional basado en el Principio de Extensión [15].

2. El modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas presentado en esta memoria.

5.4.1 Ejemplo para la Selección de Transferencia de Tecnología en Biotecnología

En el problema definido anteriormente tenemos cuatro expertos $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ que se basan en cuatro criterios $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ para seleccionar la estrategia más apropiada entre cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Las definiciones de las alternativas y de los criterios se dieron en 5.3.

Para describir la importancia de los criterios y la preferencia de cada alternativa, los expertos pueden utilizar distintos conjuntos de etiquetas, aunque normalmente lo que hacen es usar conjuntos con sintaxis diferente pero con igual semántica. Por simplificar en el ejemplo cada experto expresará la importancia de los criterios y la preferencia de cada alternativa utilizando un mismo conjunto de etiquetas. Cada experto puede utilizar su propio conjunto de etiquetas para dar sus preferencias en este caso:

- El experto p_1 utilizará el conjunto de etiquetas A:

$$A = \{N, MB, B, M, A, MA, P\} \equiv \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

- Los expertos p_2 y p_3 utilizarán el conjunto de etiquetas B:

$$B = \{MB, B, M, A, MA\} \equiv \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

- El experto p_4 utilizará el conjunto de etiquetas C:

$$C = \{N, MB, B, M, A, MA, P\} \equiv \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$$

Observamos que los expertos trabajan con conjuntos con sintaxis similar pero con semántica distinta, por lo que a la hora de referirnos a las etiquetas lo haremos por la sintaxis equivalente que indica a qué conjunto de términos pertenece. La semántica de las etiquetas de estos conjuntos es la siguiente:

	A		B		C
a_0	$(0, 0, 0)$	b_0	$(0, 0, .25)$	c_0	$(0, 0, .16)$
a_1	$(0, 0, .25)$	b_1	$(0, .25, .5)$	c_1	$(0, .16, .33)$
a_2	$(0, .25, .5)$	b_2	$(.25, .5, .75)$	c_2	$(.16, .33, .5)$
a_3	$(.25, .5, .75)$	b_3	$(.5, .75, 1)$	c_3	$(.33, .5, .67)$
a_4	$(.5, .75, 1)$	b_4	$(.75, 1, 1)$	c_4	$(.5, .67, .84)$
a_5	$(.75, 1, 1)$			c_5	$(.67, .84, 1)$
a_6	$(1, 1, 1)$			c_6	$(.84, 1, 1)$.

La definición del problema permite que los expertos den sus valores de preferencia utilizando otros conjuntos de etiquetas o números difusos triangulares.

El peso asignado a los cuatro criterios, según los expertos, lo podemos observar en la Tabla 5.1, mientras que lo apropiado de cada alternativa según cada criterio, dado por los expertos, puede verse en las Tablas 5.2-5.5.

Criterios	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
C_1	a_3	b_4	b_3	c_3
C_2	a_4	b_3	b_2	c_4
C_3	a_5	b_3	b_4	c_4
C_4	a_4	b_2	b_3	c_3

Tabla 5.1. Importancia de los criterios

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	a_4	b_4	b_3	c_4
x_2	a_2	b_2	b_1	c_2
x_3	a_2	b_1	b_1	c_3
x_4	a_3	b_2	b_2	c_1

Tabla 5.2. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_1

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	a_3	b_0	b_1	c_1
x_2	a_3	b_1	b_1	c_4
x_3	a_4	b_3	b_3	c_4
x_4	a_4	b_4	b_3	c_5

Tabla 5.3. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_2

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	a_2	b_0	b_1	c_1
x_2	a_1	b_1	b_0	c_3
x_3	a_3	b_2	b_3	c_4
x_4	a_2	b_2	b_3	c_2

Tabla 5.4. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_3

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	a_4	b_4	b_3	c_4
x_2	a_3	b_2	b_3	c_5
x_3	a_3	b_2	b_2	c_3
x_4	a_3	b_3	b_1	c_3

Tabla 5.5. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_4

5.4.2 Resolución con el Modelo Basado en el Principio de Extensión

Proceso de Agregación

Exiten muchos métodos para agregar las opiniones de los expertos. La media es la operación de agregación más común. En [15] utilizan el operador media para agregar las valoraciones de los expertos. Sean $\oplus$ y $\otimes$ los operadores de suma y producto de la artimética difusa [31].

$$S_{it} = (\frac{1}{n}) \otimes (S_{it1} \oplus S_{it2} \oplus ... \oplus S_{itm})$$

y

$$W_t = (\frac{1}{n}) \times (W_{t1} \oplus W_{t2} \oplus ... \oplus W_{tn}),$$

siendo S_{it} la medida de lo apropiado que es la alternativa x_i bajo el criterio C_t y W_t es la medida de la importancia del criterio C_t.

En este caso los valores obtenidos son:

Alt.	*Criterios*			
S_{it}	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	(.5625,.7925,.9600)	(.0625,.2275,.4575)	(0,.1650,.3950)	(.5625,.7925,.9600)
x_2	(.1025,.3325,.5625)	(.1875,.4175,.6475)	(.0825,.1875,.4175)	(.4175,.6475,.8750)
x_3	(.0825,.3125,.5425)	(.5000,.7300,.9600)	(.3750,.6050,.8350)	(.2700,.5000,.7300)
x_4	(.1875,.4150,.6450)	(.6050,.8350,1)	(.2275,.4575,.6875)	(.2700.5000,.7300)

Tabla 5.6. Apropiado de x_i bajo C_t (S_{it})

Criterios			
C_1	C_2	C_3	C_4
(.4575,.6875,.8550)	(.4375,.6675,.8975)	(.6250,.8550,.9600)	(.3950,.6250,.8550)

Tabla 5.7. Importancia de los criterios C_i (W_t)

Así, F_i que indica lo apropiado que es la alternativa i-ésima, se obtiene agregando S_{it} y W_t.

$$F_i = (\frac{1}{k}) \otimes [(S_{i1} \otimes W_1) \oplus ... \oplus (S_{ik} \otimes W_k)].$$

Sean $S_{itj} = (q_{itj}, o_{itj}, p_{itj})$ and $W_{tj} = (c_{tj}, a_{tj}, b_{tj})$ números difusos triangulares. Entonces, F_i puede obtenerse aproximadamente mediante,

$$F_i \cong (Y_i, Q_i, Z_i).$$

donde

$$Y_i = \sum_{t=1}^{k} q_{it}c_t/k, \quad Q_i = \sum_{t=1}^{k} o_{it}a_t/k, \quad Z_i = \sum_{t=1}^{k} p_{it}b_t/k$$

$$q_{it} = \sum_{j=1}^{n} q_{itj}/n, \quad o_{it} = \sum_{j=1}^{n} p_{itj}/n, \quad p_{it} = \sum_{j=1}^{n} p_{itj}/n$$

$$c_t = \sum_{j=1}^{n} c_{tj}/n, \quad b_t = \sum_{j=1}^{n} b_{tj}/n, \quad a_t = \sum_{j=1}^{n} a_{tj}/n,$$

con $i = 1...m$; $t = 1...k$; $j = 1, ..., n$.

Así obtenemos los índices, F_i, se muestran en la tabla 5.8.

Alternativas	*Indices* F_i
x_1	$F_1 = (.1267, .3332, .6078)$
x_2	$F_2 = (.0863, .2680, .5527)$
x_3	$F_3 = (.1493, .3829, .6877)$
x_4	$F_4 = (.1498, .3865, .6832)$

Tabla 5.8. Indices de lo apropiado que es cada alternativa

Proceso de Explotación

Debido al tipo de información de entrada y a la forma de operar con ella los resultados obtenidos, números difusos, no son directamente comparables ya que no coinciden con los valores del conjunto de etiquetas inicial. Entonces para comparar los índices F_i que son números difusos hay utilizar un método de comparación de números difusos. En [15] se utiliza una modificación del método de Kim y Park [56] para ordenar los valores difusos de los índices $U_T(F_i)$ que indican lo apropiado de cada alternativa según el grupo de expertos.

Los valores obtenidos en [15] utilizando dicho método son:

Alternativas	$U_T(F_i)$
x_1	.4540
x_2	.3828
x_3	.5132
x_4	.5151

Tabla 5.9. Valores $U_T(F_i)$ para crear un orden

A partir de los valores $U_T(F_i)$ creamos un orden para los índices F_i. Es evidente que la mejor selección de una estrategia de transferencia de tecnología para este problema es la alternativa "x_4", es decir *"Establecer un proyecto de I+D cooperativo"*. Por tanto, el comité de expertos recomendará la alternativa x_4 como la estrategia de transferencia de tecnología más adecuada.

5.4.3 Resolución Basada en el Modelo de Representación Lingüístico con 2-tuplas

Ahora resolvemos el mismo problema pero, esta vez vamos a utilizar el modelo de representación de información con 2-tuplas basado en la traslación simbólica y para agregar la información utilizaremos el proceso presentado en el Capítulo 3.

En primer lugar hay que hacer un paso previo antes de comenzar la resolución del problema, que es expresar la información de entrada mediante 2-tuplas basadas en la traslación simbólica. Este paso consiste en aplicar la función θ (Definición 2.3) a cada una de las etiquetas de entrada. Una vez convertida toda la información lingüística multigranular de entrada a 2-tuplas comenzamos la resolución del problema de TDME-MC propuesto.

Proceso de Agregación

Utilizaremos el proceso de agregación de información lingüística multigranular presentado en el Capítulo 3:

1. **Expresión de la información de forma uniforme**.
   (a) *Transformación de la información lingüística multigranular en conjuntos difusos.*
   (b) *Conversión de los conjuntos difusos a 2-tuplas lingüísticas.*
2. **Agregación de 2-tuplas**.
3. **Vuelta atrás**.

1. Expresión de la información de forma uniforme

La información de entrada que tenemos en este problema es lingüística multigranular, expresada en los conjuntos de etiquetas A, B, C definidos anteriormente. Para operar con esta información tenemos que unificarla sobre un conjunto básico de términos lingüísticos, S_T. En este caso, al estudiar A, B y C nos encontramos con dos conjuntos de máxima granularidad y distinta semántica por lo que el CBTL que usaremos será el conjunto de etiquetas de 15 términos presentado en 3.2.

Utilizando el proceso de unificación presentado en el Capítulo 3, nos queda la siguiente información de entrada expresada sobre el conjunto S_T seleccionado:

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
C_1	$(s_7, 0)$	$(s_{13}, -.22)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_7, 0)$
C_2	$(s_{10}, .5)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_7, 0)$	$(s_9, .36)$
C_3	$(s_{13}, -.22)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_{13}, -.22)$	$(s_9, .36)$
C_4	$(s_{10}, .5)$	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_7, 0)$

Tabla 5.10. Importancia de los criterios

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	$(s_{10}, .5)$	$(s_{13}, -.22)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_9, .36)$
x_2	$(s_3, .23)$	$(s_7, 0)$	$(s_3, .23)$	$(s_5, -.37)$
x_3	$(s_3, .23)$	$(s_3, .23)$	$(s_3, .23)$	$(s_7, 0)$
x_4	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_2, .36)$

Tabla 5.11. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_1

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	$(s_7, 0)$	$(s_1, .25)$	$(s_3, .23)$	$(s_2, .36)$
x_2	$(s_7, 0)$	$(s_3, .23)$	$(s_3, .23)$	$(s_9, .36)$
x_3	$(s_{10}, .5)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_9, .36)$
x_4	$(s_{10}, .5)$	$(s_{13}, -.22)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_{12}, -.37)$

Tabla 5.12. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_2

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	$(s_3, .23)$	$(s_1, .25)$	$(s_3, .23)$	$(s_2, .36)$
x_2	$(s_1, .25)$	$(s_3, .23)$	$(s_1, .21)$	$(s_7, 0)$
x_3	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_9, .36)$
x_4	$(s_3, .23)$	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_5, -.37)$

Tabla 5.13. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_3

Alternativas	*Expertos*			
	p_1	p_2	p_3	p_4
x_1	$(s_{10}, .5)$	$(s_{13}, -.22)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_9, .36)$
x_2	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_{12}, -.37)$
x_3	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$	$(s_7, 0)$
x_4	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_3, .23)$	$(s_7, 0)$

Tabla 5.14. Evaluación de las alternativas bajo el criterio C_4

2. Agregación de las 2-tuplas.

Una vez tenemos toda la información expresada mediante 2-tuplas en el conjunto básico de términos lingüísticos, S_T, podemos agregar la información utilizando el operador análogo en 2-tuplas al utilizado en el método anterior, es decir, utilizaremos la media aritmética extendida, $\overline{x}^e$, tanto para agregar las opiniones de los expertos como la importancia de los pesos.

$$S_{it} = \overline{x}^e((S_{it1}, \alpha_{it1}), ..., (S_{itn}, \alpha_{itn})) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{itj}) = (s_{it}, \alpha_{it}),\ \ s_{it} \in S_T$$

y

$$W_t = \overline{x}^e((W_{t1}, \alpha_{t1}), ..., (W_{tn}, \alpha_{t1})) = \Delta(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{tj}) = (w_t, \alpha_t),\ \ w_t \in S_T$$

al igual que antes S_{it} (Tabla 5.15) es la valoración de la alternativa x_i bajo el criterio C_t y W_t (Tabla 5.16) es la importancia colectiva del criterio C_t.

Alternativas	*Criterios*			
	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	$(s_{11}, -.21)$	$(s_3, .46)$	$(s_3, -.49)$	$(s_{11}, -.21)$
x_2	$(s_5, -.5)$	$(s_6, -.3)$	$(s_3, .17)$	$(s_9, .03)$
x_3	$(s_4, .17)$	$(s_{10}, .21)$	$(s_8, .46)$	$(s_7, 0)$
x_4	$(s_6, -.16)$	$(s_{11}, .35)$	$(s_6, .34)$	$(s_7, -.07)$

Tabla 5.15. Rendimiento de la alternativa x_i respecto al criterio C_t según los expertos: S_{it}

Criterios			
C_1	C_2	C_3	C_4
$(s_9, .32)$	$(s_9, .34)$	$(s_{11}, .35)$	$(s_9, -.25)$

Tabla 5.16. Importancia de los criterios C_t: W_t

Ahora calculamos los valores, F_i, que indican lo apropiado que es cada alternativa, x_i, y se obtienen agregando los valores S_{it} de acuerdo a la importancia W_t de cada criterio C_t. Para agregar esta información hay que utilizar un operador de 2-tuplas que opere con valores y pesos expresados mediante 2-tuplas. En el Capítulo 3 presentamos un operador que se adapta perfectamente a este tipo de información como es el operador media ponderada extendido con pesos lingüísticos, x_l^e, y que es equivalente al operador de agregación utilizado en el método anterior.

$$\overline{x}_l^e = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{w_i}}\right) \; con \; \beta_i = \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \; y \; \beta_{w_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i),$$

entonces, los valores F_i se calcularán como sigue:

$$F_i = \Delta\left(\frac{\sum_{t=1}^{k} \beta_{it} \cdot \beta_{W_t}}{\sum_{t=1}^{k} \beta_{W_t}}\right).$$

Usando este operador de agregación obtenemos los siguientes índices de adecuación para cada alternativa,

Alternativas	*Indices* F_i
x_1	$F_1 = (s_7, -.41)$
x_2	$F_2 = (s_5, .36)$
x_3	$F_3 = (s_8, -.48)$
x_4	$F_4 = (s_8, -.45)$

Tabla 5.17. Indices de lo apropiado que es cada alternativa

3. Vuelta Atrás.

Este paso del proceso no es obligatorio, es decir, con la información que tenemos ahora mismo podemos efectuar el proceso de explotación del proceso de decisión y obtener una solución. Pero la solución obtenida estaría expresada en un dominio lejano al utilizado por las fuentes de información, sin embargo, este proceso de agregación debido al modelo de representación que utiliza nos da la posibilidad de expresar los valores colectivos obtenidos en los dominios iniciales utilizados por cada experto.

Para realizar la vuelta atrás hay que realizar los pasos indicados en 3.2.3. De los que obtenemos la siguiente tabla:

Alternativas	F_i *en* A	F_i *en* B	F_i *en* C
x_1	$(a_3, -.15)$	$(b_2, -.15)$	$(c_3, -.2)$
x_2	$(a_3, -.43)$	$(b_2, -.43)$	$(c_2, .31)$
x_3	$(a_3, .17)$	$(b_2, .17)$	$(c_3, .24)$
x_4	$(a_3, .19)$	$(b_2, .19)$	$(c_3, .27)$

Tabla 5.18. Indices expresados en los dominios iniciales

Proceso de Explotación

Al contrario que en el método anterior, la información con la que operamos aquí, tiene un orden definido, por lo que obtenemos directamente sin ningún paso intermedio el conjunto solución del problema. En este caso se observa que se obtiene el mismo orden de alternativas y con unos valores que pueden interpretar cada uno de los expertos que ha participado en el proceso de selección.

La estrategia de transferencia de tecnología que se muestra como la mejor para el problema es la que representa la alternativa "x_4", es decir, *"Establecer un proyecto I+D cooperativo"*.

Otro punto importante a observar es que la solución no varía, ya se aplique sobre los resultados obtenidos en el proceso de agregación o se aplique sobre los resultados expresados en los dominios iniciales después de efectuar la vuelta atrás.

5.5 Estudio Comparativo

Hemos resuelto el problema de "Selección de una Estrategia de Transferencia de Tecnología" utilizando un modelo basado en el Principio de Extensión y un modelo basado en 2-tuplas lingüísticas obteniendo los siguientes resultados:

Alternativas	Mét. basado en el P.E.	Mét. basado en 2-tuplas
x_1	$F_1 = (.1267, .3332, .6078)$	$(s_7, -.41)$
x_2	$F_2 = (.0863, .2680, .5527)$	$(s_5, .42)$
x_3	$F_3 = (.1493, .3829, .6877)$	$(s_8, -.48)$
x_4	$F_4 = (.1498, .3865, .6832)$	$(s_8, -.45)$

Tabla 5.19. Comparativa de resultados con ambos métodos

Donde el orden dichos valores en ambos métodos es:

Alternativas	Mét. basado en el P.E.	Mét. basado en 2-tuplas
x_4	.5151	$(s_8, -.45)$
x_3	.5132	$(s_8, -.48)$
x_1	.4540	$(s_7, -.41)$
x_2	.3828	$(s_5, .42)$

Tabla 5.20. Comparativa de resultados con ambos métodos

Observamos que con ambos métodos obtenemos el mismo orden de alternativas por lo que llegamos al mismo resultado. A continuación, vamos a estudiar las ventajas del método de resolución basado en 2-tuplas.

5.5.1 Ventajas del método basado en 2-tuplas

Seguidamente, enumeramos una serie de mejoras que produce el método basado en 2-tuplas sobre el método basado en el Principio de Extensión.

1. *Robustez del Resultado.* Siempre que se trabaje con los mismos datos obtendrá los mismos resultados. Las 2-tuplas tienen un orden definido sobre ellas, mientras que los números difusos no lo tienen, por lo que dependiendo del método de ordenación utilizado podemos obtener un orden distinto de los mismos datos. Por ejemplo, tomando los números difusos obtenidos como índices de adecuación, F_i:

Alternativas	*Indices* F_i
x_1	$F_1 = (.1267, .3332, .6078)$
x_2	$F_2 = (.0863, .2680, .5527)$
x_3	$F_3 = (.1493, .3829, .6877)$
x_4	$F_4 = (.1498, .3865, .6832)$

Tabla 5.21. Indices difusos

aplicándoles el índice de Kim y Park [56] obtuvimos los siguientes valores de orden para cada alternativa:

Alternativas	$U_T(F_i)$
x_1	.4540
x_2	.3828
x_3	.5132
x_4	.5151

Tabla 5.22. Valores $U_T(F_i)$ para crear un orden

Sin embargo, si aplicamos el método de comparación, presentado por Chang en [14]:

$$C(\tilde{A}_i) = \frac{1}{6}(c_i - a_i)(a_i + b_i + c_i),$$

$$C(F_1) = C(.1267, .3332, .6078) = .0856$$

$$C(F_2) = C(.0863, .2680, .5527) = .0705$$

$$C(F_3) = C(.1493, .3829, .6877) = .1094$$

$$C(F_4) = C(.1498, .3865, .6832) = .1084$$

obtenemos la siguiente tabla de valores:

Alternativas	$U_T(F_i)$
x_1	.0856
x_2	.0705
x_3	.1094
x_4	.1084

Tabla 5.23. Valores $U_T(F_i)$ con $C(\tilde{A})$

por tanto, en este caso obtenemos $F_3 > F_4$, que podemos ver que no coincide con el resultado obtenido anteriormente.

2. *Inteligibilidad de los resultados.* Los valores obtenidos por el método de las 2-tuplas son fácilmente comprensibles por cualquier experto, mientras que los valores obtenidos en el método basado en el Principio de Extensión no indican ninguna información sobre lo apropiado de cada alternativa ya que son valores numéricos que resultan de cálculos sobre un dominio distinto del utilizado por las fuentes de información.

Conclusiones

A continuación, revisamos cúales han sido los resultados que hemos obtenido a lo largo de esta memoria, y qué desarrollos futuros nos planteamos construir a partir de estos resultados.

Resultados Obtenidos

El modelado lingüístico de preferencias se ha aplicado a un gran número de áreas, destacando por el número de aplicaciones el campo de la Toma de Decisiones. La resolución de problemas de decisión conlleva dos fases fundamentalmente:

1. *Proceso de Agregación.*

2. *Proceso de Explotación.*

Estos procesos en contextos lingüísticos implican operar con valoraciones lingüísticas. El modelo de representación lingüístico utilizado por los modelos computacionales clásicos (basado en el Principio de Extensión y Simbólico) presenta una serie de limitaciones a la hora de operar, como son: (i) la pérdida de información (ii) dificultad para operar en contextos con información lingüística multigranular y (iii) dificultad para operar en contextos con información lingüística y numérica. Atendiendo a estos aspectos, los resultados en esta memoria pueden resumirse en los siguientes apartados:

A. Un Nuevo Modelo de Representación para el Modelado Lingüístico de Preferencias

El principal problema que presenta la representación utilizada por el enfoque lingüístico difuso es la pérdida de información que se produce al operar con información lingüística. El modelo de representación de información lingüística con 2-tuplas soluciona este problema fundamentándose en:

- Ser un modelo de representación continuo, es decir, puede representar cualquier información del universo del discurso, mediante las 2-tuplas lingüísticas.
- Tener asociado un modelo computacional que permite operar con 2-tuplas lingüísticas sin pérdida de información.

Este modelo de representación nos permitirá utilizar la información lingüística en procesos de agregación sin pérdida de información.

B. Un Proceso de Agregación de Información Lingüística Multigranular

El problema de agregar información lingüística valorada en conjuntos de términos lingüísticos con distinta granularidad ha sido un problema complicado de resolver debido a la falta de procesos de normalización de este tipo de información y de operadores de agregación sobre este tipo de información.

Utilizando el modelo de representación lingüístico con 2-tuplas hemos diseñado:

1. Funciones que permiten normalizar la información lingüística multigranular en un único conjunto de términos lingüísticos.
2. Un proceso de agregación sobre la información expresada de forma uniforme.

Con estas herramientas la agregación de información lingüística multigranular es un proceso sencillo y sin pérdida de información, pudiéndose obtener los resultados en caso de ser necesario en los dominios iniciales de expresión de la información de entrada.

C. Un Proceso de Agregación de Información Lingüística y Numérica

Otro problema estudiado es el de operar en contextos en los que existe información lingüística y numérica. El problema residía en que las funciones de transformación que se definen entre ambos dominios no eran biyectivas, por lo que había una pérdida de información y falta de precisión en los resultados.

Utilizando el modelo lingüístico con 2-tuplas hemos diseñado:

1. Funciones de transformación biyectivas entre valores numéricos y 2-tuplas lingüísticas .

2. Un proceso de agregación sobre la información de entrada una vez que ha sido transformada.

Hemos conseguido que operar con información lingüística y numérica no suponga dificultad ya que una vez unificada toda la información sobre un único dominio se puede operar sobre ella con facilidad.

Trabajos Futuros

En el mundo real hay un gran número de situaciones que pueden considerarse dentro del ámbito de la Toma de Decisiones, por ejemplo, *el diagnóstico clínico, la gestión comercial, la planificación, predicciones económicas, etc.* En todos estos casos la utilización de la Toma de Decisiones asistida por ordenador sería altamente beneficiosa, tanto en aspectos económicos como sociales. Debido a esto, nuestros trabajos futuros se encaminan en las siguientes líneas de acción:

- *Teórica.*

    1. Desarrollar un mayor número de operadores sobre el modelo de representación con 2-tuplas, para poder reflejar cualquier comportamiento de una situación de un problema real.

2. Completar la integración de cualquier tipo de información mediante 2-tuplas lingüísticas, faltando en este momento la integración de la información intervalar y de los números difusos como tales.

- *Práctica.*

  Diseño y desarrollo de un Sistema de Soporte de Decisión (SSD), que implemente los desarrollos teóricos presentados en esta memoria.

  En esta segunda línea de actuación, pretendemos realizar un estudio de los distintos SSD y de las distintas metodologías de construcción de SSD que existen. Nuestra intención es construir un SSD que:

  1. Soporte cualquier tipo de información en el modelado de las preferencias que participen en el problema.
  2. Trabaje con los distintos clases de problemas de decisión que nos podemos encontrar, Toma de Decisiones Multiexperto, Toma de Decisiones Multicriterio, Toma de Decisiones en Grupo, etc.
  3. Integre diferentes modelos de consenso y selección existentes en la literatura.

  Para ello, queremos desarrollar un SSD con las siguientes características:

  1. El SSD sea multiplataforma, por lo que lo implementaremos en lenguaje JAVA.
  2. Su diseño se base en una arquitectura Cliente/Servidor, muy extendida en aplicaciones en red.
  3. La red sobre la que se trabaje esté basada en protocolos IP, de forma que el SSD pueda utilizarse en una Intranet, Extranet, o incluso a través de Internet, según sea la necesidad de cada caso.
  4. Su interfaz de comunicación debe ser sencilla, vistosa, flexible y fácilmente modificable. Para ello y debido a las anteriores características, una posibilidad muy adecuada para crear la interfaz sería el uso de la tecnología *http* y *HTML*, es decir, se utilizaría un servidor Web sobre el que con páginas HTML se diseñaría el interfaz del SSD.

Apéndice A

Cuantificadores Lingüísticos Difusos

Los *cuantificadores* se utilizan para representar la cantidad de elementos que satisfacen un predicado. La *Lógica Clásica* se restringe al uso de dos cuantificadores, *existe* ($\exists$) y *para todo* ($\forall$), los cuales se relacionan con los conectivos *or* y *and*, respectivamente.

Sin embargo, en el lenguaje natural se utilizan muchos y diversos cuantificadores, por ejemplo, *alrededor de 5, casi todos, pocos, muchos, la mayoría, tantos como sea posible, cerca de la mitad, al menos la mitad, etc.* Por tanto, sería bueno tener una técnica de representación del conocimiento que pudiera representar a este tipo de cuantificadores en los sistemas formales. Zadeh presentó el concepto de *cuantificadores lingüísticos difusos* como herramienta para conseguir dicho objetivo [100].

Zadeh sugirió que la semántica de un cuantificador lingüístico se puede representar mediante subconjuntos difusos. Distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüísticos, *cuantificadores absolutos* y *cuantificadores relativos o proporcionales.*

Los cuantificadores absolutos se usan para representar cantidades absolutas en sí mismas, como *alrededor de 2* o *más de 5.* Por tanto, ellos representan conceptos relativos a cantidades o número de elementos. Zadeh los define como subconjuntos difusos de números reales no negativos, $\mathcal{R}^+$. Con esta idea en mente, él los representa mediante un subconjunto difuso, Q, tal que, $\forall r \in \mathcal{R}^+$, el grado de pertenencia de r en Q, $Q(r)$ indica el grado de compatibilidad entre la cantidad r y el significado representado por el cuantificador, Q. Un cuantificador proporcional, como *la mayoría, al menos la mitad*, se representa mediante subconjuntos difusos del intervalo unidad, [0,1], de modo que, $\forall r \in [0,1]$, $Q(r)$

indica el grado de compatibilidad entre la proporción r y el significado representado por el cuantificador, Q. Cualquier cuantificador del lenguaje natural se puede representar bien mediante uno proporcional, o bien, si es conocida la cardinalidad del conjunto de elementos considerado, mediante uno absoluto.

Funcionalmente, los cuantificadores lingüísticos pueden ser de uno de estos tres tipos: *creciente, decreciente y unimodal.* Un cuantificador tipo creciente se caracteriza por la siguiente relación

$$Q(r_1) \geq Q(r_2) \quad \text{if } r_1 > r_2.$$

A ellos pertenecen cuantificadores como *la mayoría, al menos* α. Un cuantificador de tipo decreciente se caracteriza por la siguiente relación

$$Q(r_1) \leq Q(r_2) \quad \text{if } r_1 < r_2.$$

A ellos pertenecen cuantificadores como, *pocos, a lo sumo* α. Los cuantificadores unimodales cumplen la siguiente propiedad,

$$Q(r_1) \leq Q(r_2) \leq Q(r_3) = 1 \geq Q(r_4)$$

con $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$. Estos se usan para representar términos como *alrededor de q.*

En esta memoria de acuerdo con Yager [87, 90], para nuestros desarrollos utilizaremos *cuantificadores proporcionales crecientes*, los cuales satisfacen esta propiedad

$$Q(0) = 0, \text{ y } \exists\, r \in [0,1] \text{ tal que } Q(r) = 1,$$

y cuya función de pertenencia tiene la siguiente expresión:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{r-a}{b-a} & \text{si } a \leq r < b \\ 1 & \text{si } r \geq b \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0,1]$.

Algunos ejemplos de cuantificadores proporcionales crecientes se muestran en la figura A.1.

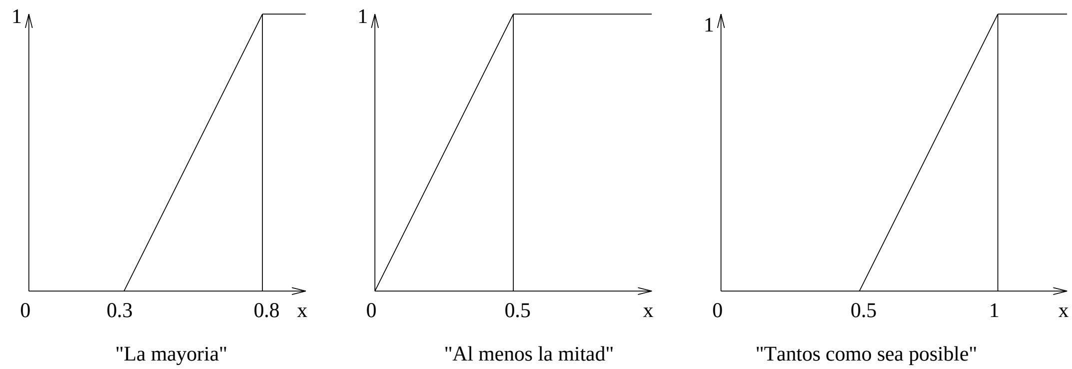

Figura A.1: Cuantificadores Lingüísticos difusos

cuyos parámetros, (a, b), son $(0.3, 0.8)$, $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$, respectivamente.

Los cuantificadores tradicionales, como hemos visto, evalúan la información cuantificada en el intervalo unidad, [0,1], es decir, de forma numérica.

Apéndice B

Valores Característicos

En este apéndice presentamos el concepto de *valor característico* asociado a un número difuso, que es un valor numérico valorado en $[0,1]$ y representa la información de un número difuso.

Sea $F(\mathcal{R})$ el conjunto de los números difusos definido sobre $\mathcal{R}$. Cada número difuso, y_i, tiene asociado una función de pertenencia,

$$\mu_{y_i} : F(\mathcal{R}) \longrightarrow [0,1].$$

Consideremos que para cada número difuso, y_i, conocemos un conjunto de valores característicos,

$$VC_{y_i} = \{C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^z\},$$

los cuáles son valores reales que resumen o soportan la información o el significado dado por y_i. Asumimos que estos valores satisfacen la siguiente propiedad:

$$C_i^j \in Support(y_i) = \{r\epsilon\mathcal{R} \mid \mu_{y_i}(r) > 0\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos definir un conjunto de *funciones características*, $FC = \{FVC_j(\cdot),\ j = 1, \ldots, z,\}$, de forma que cada función esté asociada a un valor caraterístico de cada número difuso, tal que,

$$FVC_j : F(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$FVC_j(\mu_{y_i}) = C_i^j.$$

Por tanto, cada conjunto de valores característicos, $\{C_i^j,\ \forall i\}$, simboliza una función característica particular, $FVC_j(\cdot)$, para un conjunto de números difusos, $\{y_i,\ \forall i\}$. Algunos ejemplos de funciones $FVC_j(\cdot)$ son: *los métodos de defuzzificación usados en control difuso* [21], *las funciones de ordenación* [9, 101], y el *valor* de un número difuso definido en [26]. Debido a que utilizamos funciones de pertenencia trapezoidales para representar las etiquetas linguisticas, los valores característicos se definirán según los cuatro parámetros usados para representar la función de pertenencia trapezoidal de una etiqueta, s_i, $\mu_{s_i} = (a^i, b^i, d^i, c^i)$. Presentamos los siguientes métodos para obtener las funciones de los valores característicos: el *valor* de un número difuso [26], el *valor máximo* y el *centro de gravedad* [21].

- *Valor.* El valor característico de una etiqueta s_i, $FVC_1(\mu_{s_i})$, de acuerdo a este método viene dado por:
$$FVC_1(\mu_{s_i}) = \int_0^1 s(r)(L_{y_{s_i}}(r) + R_{y_{s_i}}(r))dr,$$
donde $L_{y_{s_i}}(\cdot)$ y $R_{y_{s_i}}(\cdot)$ son las representaciones de los r-cortes de y_{s_i} y $s(r)$ es una función de reducción [26]. $FVC_1(s_i)$ puede ser visto como un valor central que representa desde un punto de vista global el valor de la magnitud que representa el número difuso asociado a s_i [26]. Su expresión usando las funciones de pertenencia trapezoidales y $s(r) = r$ es:
$$FVC_1(\mu_{s_i}) = \frac{(b^i + d^i)}{2} + \frac{[(c^i - d^i) - (b^i - a^i)]}{6} = \frac{2b^i + 2d^i + c^i + a^i}{6}.$$

- *Valor Máximo.* Dada una etiqueta linguistica, s_i, con función de pertenencia, $\mu_{y_{s_i}}(v), v \in V = [0,1]$, su altura se define como:
$$height(s_i) = \sup\{\mu_{y_{s_i}}(v),\ \forall v\}.$$
Este método puede obtener un valor representativo de una etiqueta de distintas formas [21]. Nosotros asumimos dos de las posibilidades, es decir, obtendremos dos valores característicos, $FVC_2(\mu_{s_i})$ y $FVC_3(\mu_{s_i})$, según las siguientes expresiones:
$$FVC_2(\mu_{s_i}) = min\{v \mid \mu_{y_{s_i}}(v) = height(s_i)\},$$

$$FVC_3(\mu_{s_i}) = max\{v \mid \mu_{y_{s_i}}(v) = height(s_i)\}.$$

Sus representaciones basadas en la notación trapezoidal son:

$$FVC_2(\mu_{s_i}) = b^i \text{ y } FVC_3(\mu_{s_i}) = d^i.$$

y para funciones triangulares:

$$FVC_2(\mu_{s_i}) = FVC_3(\mu_{s_i}) = b^i.$$

- *Centro de Gravedad.* Este método resume el significado de una etiqueta, s_i, en un número de acuerdo a esta expresión:

$$FVC_4(\mu_{s_i}) = \frac{\int_V v\mu_{y_{s_i}}(v)dv}{\int_V \mu_{y_{s_i}}(v)dv}.$$

Para números difusos trapezoidales, obtenemos la siguiente expresión:

$$FVC_4(\mu_{s_i}) = \begin{cases} a^i & \text{si } a^i = b^i = c^i = d^i \\ \frac{(c^i)^2+(d^i)^2-(b^i)^2-(a^i)^2+c^id^i-a^ib^i}{3(c^i+d^i-b^i-a^i)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Bibliografía

[1] J. Aczél, On Weighted Synthesis of Judgements, *Aequationes Math.* **27** (1984) 288-307.

[2] G.I. Adamopoulos, G.P. Pappis, A Fuzzy Linguistic Approach to a Multicriteria-sequencing Problem, *European Journal of Operational Research* **92** (1996) 628-636.

[3] A. Bardossy, L. Duckstein, Fuzzy Rule-Based Modeling With Application to Geophysical, *Biological and Engineering Systems*, (CRC Press, 1995).

[4] Bellman R.E., L. Zadeh, Decision Making in a Fuzzy Environment, *Man. Sci.* **17** 4 (1970) 141-164.

[5] P.P. Bonissone, A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, en: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, (North-Holland, 1982) 329-339.

[6] P.P. Bonissone, K.S. Decker, Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity, en: L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence* (North-Holland, 1986) 217-247.

[7] G. Bordogna, G. Passi, A Fuzzy Linguistic Approach Generalizing Boolean Information Retrieval: A Model and Its Evaluation, *J. of the American Society for Information Science* **44** (1993) 70-82.

[8] G. Bordogna, G. Passi, A Linguistic Modeling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA operators, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans* **27** (1997) 126-132.

[9] G. Bortolan, R. Degani, A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets, *Fuzzy Sets and Systems* **15** (1985) 1-19.

[10] M.A. Brown, L.G. Berry, R.K. Goel, Guidelines for Successfully Transferring Goverment-Sponsored Innovations, *Research Policy* **20** (1991) 121-143.

[11] J.J. Buckley, The Multiple Judge, Multiple Criteria Ranking Problem: A Fuzzy Set Approach, *Fuzzy Sets and Systems* **13** (1984) 23-37.

[12] C. Carlsson, R. Fullér, On Fuzzy Screening Systems, *Proc. of the Third European Congress on Intelligent Technologies and Soft Computing,* Aachen, (1995) 1261-1264.

[13] C. Carlsson, R. Fullér, Benchmarking and Linguistic Importance Weighted Aggregations, *Fuzzy Sets and Systems* (1999) Por aparecer.

[14] P. Chang, Y. Chen, Fuzzy Number in Business Conditions Monitoring Indicators: Fuzzy Set Methodologies in Economic Condition, en:*Fuzzy Engineeting toward Human Friendly Systems* (Proceedings of the International Fuzzy Engineering Symposium 91, Yokohama, Japan) **2** (1991) 1091-1100.

[15] P. Chang, Y. Chen, A Fuzzy Multicriteria Decision Making Method for Technology Transfer Strategy Selection in Biotechnology, *Fuzzy Sets and Systems* **63** (1994) 131-139.

[16] W. Chang, Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions, *Proc. of the International Conference on Policy Analisys and Information System*, (1981) 263-272.

[17] S.J. Chen, C.L. Hwang, Fuzzy Multiple Attribute Decision-Making Methods and Applications (*Springer-Verlag*, 1992).

[18] S.M. Chen, A New Method for Tool Steel Materials Selection under Fuzzy Environment, *Fuzzy Sets and Systems* **92** (1997) 265-274.

[19] C. Chen, M. Klein, An Efficient Approach to Solving Fuzzy MADM Problems, *Fuzzy Sets and Systems* **88** (1997) 51-67.

[20] C.H. Cheng, Evaluating Weapon Systems Using Ranking Fuzzy Numbers, *Fuzzy Sets and Systems* **107** (1999) 25-35.

[21] O. Cordon, F. Herrera, A. Peregrín, Applicability of the Fuzzy Operators in the Design of Fuzzy Logic Controllers, *Fuzzy Sets and Systems* **86** (1997) 15-41.

[22] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila, Linguistic Decision Making Models, *Int. J. of Intelligent Systems* **7** (1992) 479-492.

[23] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila, On Aggregation Operations of Linguistic Labels, *Int. J. of Intelligent Systems* **8** (1993) 351-370.

[24] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila, A Model for Linguistic Partial Information in Decision Making Problems, *Int. J. of Intelligent Systems* **9** (1994) 365-378.

[25] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, Combining Numerical and Linguistic Information in Group Decision Making, *Information Sciences* **107** (1998) 177-194.

[26] M.Delgado, M.A. Vila, W. Voxman, On a Canonical Representation of Fuzzy Numbers, *Fuzzy Sets and Systems* **93** (1999) 125-135.

[27] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, M.J. Martín, M.A. Vila, Combining Linguistic Information in a Distributed Intelligent Agent Model for Information Gathering, *Computing with Words*, en: P.P. Wang Ed., (John Wiley and Son, 1999).

[28] R. Degani, G. Bortolan, The problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making, *Int. Journal of Approximate Reasoning* **2** (1988) 143-162

[29] G.B. Devedzic, E. Pap, Multicriteria-Multistages Linguistic Evaluation and Ranking of Machine Tools, *Fuzzy Sets and Systems* **102** (1999) 451-461.

[30] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, An Introduction to Fuzzy Control, (*Springer-Verlag*, 1993).

[31] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, (*Academic*, New York, 1980).

[32] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized Means as Model of Compensative Connectives, *Fuzzy Sets and Systems* **14** (1984) 143-154.

[33] M. Fedrizzi, L. Mich, Rule Based Model for Consensus Reaching Group Decisions Support, *Proc. of the Third Conference on Information Processing and Management of Uncertainty,* Palma de Mallorca, (1992) 301-304.

[34] J. Fodor, M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support* (Kluwer Academic Publishers, 1994).

[35] F. Herrera, J.L. Verdegay, Linguistic Assessments in Group Decision, *Proc. of the First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen, (1993) 941-948.

[36] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment, *Information Sciences* **85** (1995) 223-239.

[37] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments, *Fuzzy Sets and Systems* **79** (1996) 73-87.

[38] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Linguistic Decision Process in Group Decision Making, *Group Decision and Negotiation* **5** (1996) 165-176.

[39] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems* **79** (1996) 175-190.

[40] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay. A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments. *Fuzzy Sets and Systems* **78** (1996) 73-87.

[41] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems* **27** (1997) 646-656.

[42] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Rational Consensus Model in Group Decision Making using Linguistic Assessments, *Fuzzy Sets and Systems* **88** (1997) 31-49.

[43] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Consensus Based on Fuzzy Coincidence for Group Decision Making in Linguistic Setting, en: J. Kacprzyk, H. Nurmi and M. Fedrizzi, Eds., *Consensus Under Fuzziness* (Kluwer Academic Publishers, 1997) 121-146.

[44] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Linguistic Measures Based on Fuzzy Coincidence for Reaching Consensus in Group Decision Making, *Int. J. Approximate Reasoning* **16** (1997) 309-334.

[45] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Choice Processes for Non-Homogeneous Group Decision Making in Linguistic Setting, *Fuzzy Sets and Systems* **94** (1998) 297-308.

[46] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, Un problema de Selección para Problemas de Decisión con Múltiples Expertos e Información Linguística Multi-Granular, *Actas del VIII Congreso ESTYLF*, Pamplona, (1998) 333-338.

[47] F.Herrera, E. López, C. Mendaña, M.A. Rodríguez, A Linguistic Decision Model for Personnel Management Solved with a Linguistic Biobjective Genetic Algorithm, *Fuzzy Sets and Systems* (1999) Por aparecer.

[48] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Terms Sets in Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems* (1999) Por aparecer.

[49] F.Herrera, E. López, C. Mendaña, M.A. Rodríguez, A Linguistic Decision Model for Suppliers Selection in International Purchasing, en: J. Kacprzyk, L. Zadeh (Eds.),*Computing with Words in Information/Intelligent Systems*, (Physica Verlag, 1999).

[50] F.Herrera, E. López, C. Mendaña, M.A. Rodríguez, A Linguistic Decision Model for Promotion Mix Management Solved with Genetic Algorithms, en: C. Carlsson and R. Fullér Eds., *Frontiers in Soft Decision Analysis*, (Physica Verlag, 1999).

[51] K. Hirota, Industrial Applications of Fuzzy Technology, (*Springer-Verlag*, 1993).

[52] U. Hohle, Mathematics of Fuzzy Sets, (*Kluwer Academic Publishers*, 1998).

[53] M. Ida, Possibility Valuation based on Ordinal Utility, *Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems* **7** (1995) 727-741.

[54] R. Jain, Tolerance Analysis Using Fuzzy Sets, *Int. J. Syst. Sci.* **7** (12) (1976) 1393-1401.

[55] J. Kacprzyk, Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority, *Fuzzy Sets and Systems* **18** (1986) 105-118.

[56] K. Kim, K.S. Park, Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set, *Fuzzy Sets and Systems* **35** (1990) 143-150.

[57] Y. Klein, G. Langholz, Multicriteria Scheduling Optimization Using Fuzzy Logic, *IEEE Int Conference on Systems, Man and Cybernetics*, (1998).

[58] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, (*Prentice Hall*, 1995).

[59] C.K. Law, Using Fuzzy Numbers in Educational Grading System, *Fuzzy Sets and Systems* **83** (1996) 311-323.

[60] H.M. Lee, Applying Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregative Risk in Software Development, *Fuzzy Sets and Systems* **79** (1996) 323-336.

[61] H.M. Lee, Group Decision Making Using Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregative Risk in Software Development, *Fuzzy Sets and Systems* **80** (1996) 261-271.

[62] H.M. Lee, Generalization of the Group Decision Making Using Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregative Risk in Software Development, *Informartion Sciences* **113** (1999) 301-311.

[63] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier, J. Bremont, Subjective Evaluation of Car Seat Comfort with Fuzzy Set Techniques, *Int. J. of Intelligent Systems* **12** (1997) 891-913.

[64] G.S. Liang, M.J.J. Wang, Personnel Placement in a fuzzy environment, *Comput. Oper. Res* **19** (1992) 107-121.

[65] G.S. Liang, Fuzzy MCDM based on Ideal and Anti-ideal Concepts, *European Journal of Operational Research* **112** (1998) 682-691.

[66] C.M. Liu, M.J. Wang, Y.S. Pang, A Multiple Criteria Linguistic Decision Model (MCLDM) for Human Decision Making, *European Journal of Operational Research* **76** (1994) 466-485.

[67] M. Marimin, M. Umano, I. Hatono, H. Tamura, Linguistic Labels for Expressing Fuzzy Preference Relations in Fuzzy Group Decision Making, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics* **28** (1998) 205-218.

[68] G. Mayor, J. Torrens, On a Class of Operators for Expert Systems, *Int. Journal of Intelligent Systems* **8** (1993) 771-778.

[69] L. Mich, L. Gaio, M. Fedrizzi, On Fuzzy Logic-Based Consensus in Group Decision, *Proc. of Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress*, Seoul, (1993) 698-700.

[70] G.A. Miller, The Magical Number Seven or Minus Two: Some limits On Our Capacity of Processing Information, *Psychological Rev.* **63** (1956) 81-97.

[71] J.N. Mordeson, P.S. Nair, Fuzzy Mathematics, (*Physica Verlag*, 1998).

[72] W. Pedrycz, Fuzzy Modeling: Paradigms and Practice, (*Kluwer Academic*, 1996).

[73] W. Pedrycz, F. Gomide, An Introduction to Fuzzy Sets, (*The MIT Press*, 1998).

[74] M. Roubens, Ph. Vincke, Preference Modelling, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 250 (Springer-Verlag, 1986).

[75] Roubens M., Fuzzy Sets and Decision Analysis, *Fuzzy Sets and Systems* **90** (1997) 199-206.

[76] E.H. Ruspini, A New Approach to Clustering, *Inform. Control* **15** (1969) 22-32.

[77] L.F. Sugianto, J. Kacprzyk, Linguistic Expressions in Decision Making with Uncertain Data, *Proc. EFDAN 98 Conference* (1998).

[78] B. Tisseyre, N.J.B. McFarlane, C. Sinfort, D. Tillett, F. Sevilla, A. Carbonneau, Fuzzy Multicriteria Decision-Making for Long Cane Puning: A System for Standard and Complex Vine Configurations, *Int. Journal of Intelligent Systems* **12** (1997) 877-889.

[79] M. Tong, P. P. Bonissone, A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **10** (1980) 716-723.

[80] M. Tong, P. P. Bonissone, Linguistic Solutions to Fuzzy Decision Problems, *Studies in the Management Sciences* **20** (1984) 323-334.

[81] V. Torra, U. Cortes, Towards an Automatic Consensus Generator Tool: EGAC, *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics* **25** (1995) 884-894

[82] V. Torra, Negation Functions Based Semantics for Ordered Linguistic Labels, *Int. J. of Intelligent Systems* **11** (1996) 975-988.

[83] V. Torra, The Weighted OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems* **12** (1997) 153-166.

[84] V. Torra, Linguistic Aggregation in Non-unified domains, *Proc. EUROFUSE-SIC 99*, Budapest (1999) 188-193.

[85] S.B. Yaakob, S. Kawata, Workers' Placement in an Industrial Environment, *Fuzzy Sets and Systems* **106** (1999) 289-297.

[86] R.R. Yager, A New Methodology for Ordinal Multiobjetive Decisions Based on Fuzzy Sets, *Decision Sciences* **12** (1981) 589-600.

[87] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **18** (1988) 183-190.

[88] R.R. Yager, Fuzzy Screening Systems, en: R. Lowen, Ed., *Fuzzy Logic: State of the Art* (Kluwer Academic Publishers, 1993) 251-261.

[89] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized And-Like and Or-Like OWA Operators, *Int. Journal General Systems* **22** (1993) 297-316.

[90] R.R. Yager, Families of OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems* **59** (1993) 125-148.

[91] R.R. Yager, Non-Numeric Multi-Criteria Multi-Person Decision Making, *Group Decision and Negotiation* **2** (1993) 81-93.

[92] R.R. Yager, L.S. Goldstein, E. Mendels, FUZMAR: An Approach to Aggregating Market Research Data Based on Fuzzy Reasoning, *Fuzzy Sets and Systems* **68** (1994) 1-11.

[93] R.R. Yager, An Approach to Ordinal Decision Making, *Int. J. of Approximate Reasoning* **12** (1995) 237-261.

[94] R.R. Yager, Protocol for Negotiations among Multiple Intelligent Agents, en: J. Kacprzyk, H. Nurmi and M. Fedrizzi Eds., *Consensus Under Fuzziness.* (Kluwer Academic Publishers, 1996) 165-174.

[95] R.R. Yager, Fusion of Ordinal Information Using Weighted Median Aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning* **18** (1998) 32-35.

[96] J. Yang, G. Mandan, An Evidential Reasoning Approach for Multiple Attribute Decision Making with Uncertainty, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **24** (1994) 1-17.

[97] A. Yazici, R. George, Fuzzy Database Modeling, (*Phisyca-Verlag*, 1999)

[98] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control* **8** (1965) 338-353.

[99] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning. Part I, *Information Sciences* **8** (1975) 199-249, Part II, *Information Sciences* **8** (1975) 301-357, Part III, *Information Sciences* **9** (1975) 43-80.

[100] L.A. Zadeh, A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages, *Computers and Mathematics with Applications* **9** (1983) 149-184.

[101] Q. Zhu, E.S. Lee, Comparison and Ranking of Fuzzy Numbers, en: Kacprzyk and M. Fedrizzi, Eds., *Fuzzy Regression Analysis* (Physica Verlag, 1992) 132-145.

[102] H.J. Zimmermann, Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems, (*Kluwer Academic*, 1987).

[103] H.J. Zimmermann, Fuzzy Sets: Theory and its Applications, (*Kluwer Academic*, 1996).