



UNIVERSIDAD DE JAÉN

# **Un Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo para Problemas de Toma de Decisiones en Grupo con Información Heterogénea.**

Memoria Investigadora del  
Segundo Año de Doctorado que presenta

**Juan Carlos Martínez Carmona**

Dirigida por el profesor

**D. Luís Martínez López**

Para la obtención del

**DIPLOMA DE ESTUDIOS AVANZADOS**



Departamento de Informática  
Universidad de Jaén  
Junio de 2007

## ÍNDICE

1. Introducción.....	5
2. Toma de Decisiones en Grupo en Contextos Heterogéneos.....	9
2.1. Los problemas de toma de decisiones en grupo (TDG) .....	9
2.2. Modelado de preferencias .....	9
2.2.1. Dominio numérico. ....	10
2.2.2. Dominio intervalar.....	11
2.2.3. Dominio lingüístico. ....	11
2.3. Problemas de toma de decisiones en grupo definidos en contextos heterogéneos .....	13
3. Un modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para problemas TDG con información heterogénea.....	15
3.1. Unificación de la información.....	16
3.1.1. Transformación de valores numéricos definidos en $[0,1]$ en $F(S_T)$ .....	17
3.1.2. Transformación de los términos lingüísticos de $S$ en $F(S_T)$ .....	17
3.1.3. Transformación de valores intervalares en $F(S_T)$ .....	18
3.1.4. Resultados del proceso de unificación.....	18
3.2. Cálculo del grado de consenso .....	19
3.2.1. Interpretación del grado de consenso.....	20
3.3. Comprobación del acuerdo alcanzado.....	21
3.4. Generación de recomendaciones .....	21
3.4.1. Cálculo e interpretación de la Medida de Proximidad.....	22
3.4.1.1. Cálculo de la Medida de Proximidad .....	22
3.4.1.2. Interpretación de la Medida de Proximidad .....	23
3.4.2. Generador guiado de recomendaciones .....	24
3.4.2.1. Reglas de identificación (RI).....	24
3.4.2.2. Reglas de dirección (DR) .....	25
3.5. Ejemplo de aplicación del modelo de SAC no adaptativo .....	26
3.5.1. Descripción del problema .....	26
4. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo para TDG con información heterogénea.....	37
4.1. Descripción del modelo.....	39
4.2. Generación adaptativa de recomendaciones.....	39
4.2.1. PBp cuando el grado de consenso es bajo .....	40
4.2.2. PBp cuando el grado de consenso es medio .....	41
4.2.3. PBp cuando el grado de consenso es alto .....	43
4.2.4. Generación adaptativa de recomendaciones .....	44
4.2.4.1. Reglas de Dirección.....	44
4.3. Ejemplo de Aplicación del modelo de SAC Adaptativo.....	45
5. Resumen de resultados .....	57
6. Conclusiones y trabajos futuros.....	59
Anexo A. Cursos de Doctorado.....	61
Anexo B. Publicaciones.....	63
Bibliografía.....	71

## **Un sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo para Problemas de Toma de Decisiones en Grupo con Información Heterogénea.**

**Resumen.** Un problema de Toma de Decisiones en Grupo (TDG) es un proceso de decisión donde varias personas (llamados comúnmente *expertos*) tienen que tomar una decisión conjunta con respecto a un problema que es conocido por todos ellos. Estos problemas se han solucionado tradicionalmente mediante un proceso de selección de alternativas a partir de las preferencias expresadas por estos expertos. Sin embargo, puede ocurrir que algunos expertos consideren que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución, y por tanto pueden estar en desacuerdo con ella. Para evitar esto es recomendable que los expertos lleven a cabo un proceso de consenso antes de realizar el proceso de selección en sí. Durante este proceso, los expertos iterativamente discuten y cambian sus preferencias para intentar conseguir un mayor grado de acuerdo en sucesivas *rondas de discusión*. Por otra parte, los expertos pueden proceder de ambientes de investigación muy distintos, con distintas áreas de conocimiento, etc., por lo que es posible que puedan expresar sus preferencias mediante distintos dominios de información. Además, en este tipo de problemas es frecuente que al principio las preferencias de los expertos puedan ser muy diferentes, y por tanto se necesitará que hagan muchos cambios al principio con el propósito de acercar las posiciones. Es normal también que esta tendencia a hacer cambios vaya disminuyendo a medida que el grupo avanza en el acuerdo, hasta llegar a un número mínimo de cambios cuando el consenso está próximo. Un modelo que tuviera en cuenta esta característica, a la que llamaremos *adaptatividad*, ayudaría a aumentar la velocidad de convergencia hacia el nivel de acuerdo buscado, reduciendo el número de rondas de consenso necesarias. En este trabajo proponemos un modelo de sistema de apoyo al consenso para problemas de TDG definidos en contextos heterogéneos, donde los expertos expresan sus preferencias por medio de valoraciones numéricas, lingüísticas o intervalares, teniendo en cuenta además el número de cambios que serían recomendables según el grado de consenso alcanzado en cada momento, es decir, un modelo adaptativo.



## 1. Introducción

Los problemas de Toma de Decisiones en Grupo (TDG) pueden definirse como situaciones de decisión donde dos o más expertos intentan alcanzar una solución común sobre un problema, teniendo en cuenta sus opiniones o preferencias.

En la literatura podemos ver numerosas propuestas para resolver problemas de decisión donde los expertos usan el mismo dominio de información para expresar sus preferencias [5, 21, 27]. Sin embargo, en muchas ocasiones puede resultar aconsejable que los expertos expresen sus opiniones mediante diferentes dominios de expresión más acordes con su área de conocimiento o con la naturaleza de las alternativas. Por ejemplo, en el campo de la investigación Histórica es frecuente encontrar expertos con diferentes ámbitos de conocimiento (arqueología, toponimia, epigrafía,...), y estos pueden preferir expresar sus opiniones usando un dominio de información más cercano a sus campos de conocimiento. Además, en un problema de decisión podemos tratar con alternativas cuya naturaleza es cuantitativa y permite valoraciones precisas como números reales [27, 46], y otras alternativas cuya naturaleza es cualitativa y la incertidumbre típica de este tipo de situaciones puede ser expresada usando valoraciones menos precisas como los intervalos [31, 42], o mediante un enfoque lingüístico [21, 44]. En estas situaciones, podemos decir que el problema de decisión está definido en un contexto heterogéneo.

Tradicionalmente los problemas de TDG han sido resueltos mediante procesos de selección donde los expertos obtienen el mejor conjunto de alternativas a partir de las preferencias expresadas por ellos mismos [17, 38]. Sin embargo puede ocurrir que algunos expertos consideren que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución, y por tanto pueden estar en desacuerdo con ella. Para evitar esta situación, es recomendable llevar a cabo un proceso de consenso (Figura 1) donde los expertos discuten y cambian sus preferencias para alcanzar un acuerdo suficiente antes de realizar el proceso de selección [22, 19, 29].

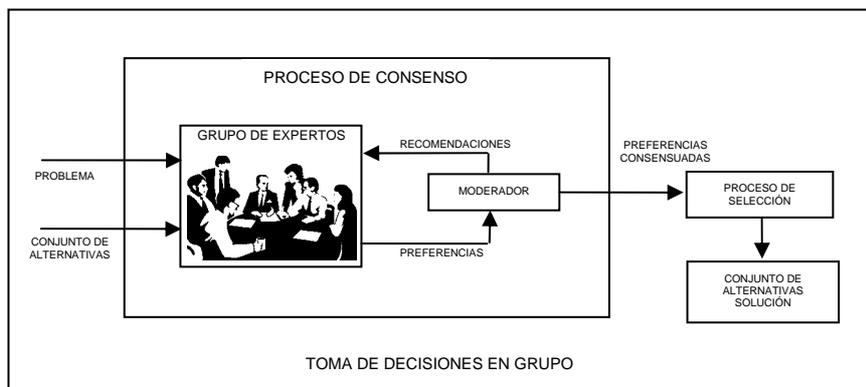


Figura 1. Proceso de resolución en un problema de TDG.

El consenso es un área de investigación importante en TDG [3, 4, 16, 18, 28, 41, 45, 6]. El consenso se define como el estado de mutuo acuerdo entre los miembros de un grupo donde todas las opiniones han sido expresadas y escuchadas a satisfacción de todos los miembros del grupo [40]. El proceso de obtención del consenso se define como un proceso dinámico e iterativo compuesto de varias rondas, donde los expertos expresan y discuten sus opiniones. Tradicionalmente este proceso está coordinado por un moderador humano, que calcula el acuerdo entre los expertos en cada ronda usando diferentes medidas de consenso [20, 32]. Si el acuerdo no es suficiente, el moderador recomienda a los expertos que cambien sus preferencias más alejadas de la opinión del grupo en un esfuerzo para conseguir un acercamiento en la siguiente ronda de consenso [4, 39].

En otro orden de cosas, en cualquier problema de decisión en el que participan varios expertos, inicialmente las preferencias de estos suelen ser bastante diferentes y por tanto el grado de consenso bajo. En esta situación es lógico pensar que todos los expertos deberían cambiar sus posiciones con el propósito de acercar sus opiniones. Asumiendo que los expertos siguen esta pauta de comportamiento, conforme se van desarrollando las diferentes rondas de consenso el grado de acuerdo se irá incrementando, y el número de cambios reduciendo, consiguiéndose finalmente alcanzar el nivel de acuerdo deseado. Por tanto, es fácil pensar que el número de cambios ha de estar en función del grado de acuerdo obtenido hasta ese momento. Sería bueno pues, que el proceso de búsqueda de consenso vaya cambiando conforme el grado de consenso va mejorando. Esta característica, a la que llamaremos adaptatividad, supondrá una optimización del proceso, debido a que:

- Aumenta la velocidad de convergencia hacia el nivel de acuerdo buscado.
- Reduce el número de rondas necesarias para alcanzarlo.
- Disminuye el número de cambios de preferencias en las rondas finales del proceso de consenso.

Diferentes métodos se han propuesto en la literatura para trabajar con *procesos de selección* en problemas de TDG heterogéneos [10, 26, 49], pero no hay definidos procesos de consenso para este tipo de problemas. También se han propuesto modelos para procesos de consenso definidos sobre un único dominio [19, 13], pero ninguno de ellos aborda el problema de trabajar con información de distinta naturaleza de forma conjunta.

En esta contribución proponemos un modelo de consenso para trabajar en contextos con información heterogénea, que además adapta el proceso de consenso al nivel de acuerdo conseguido en cada ronda de discusión. De este modo, en aquellas rondas en las que el grado de consenso sea bajo, será un indicador de que el acuerdo está aún muy lejano y el modelo propondrá que todos los expertos cambien sus preferencias. Por el contrario, cuando el grado de consenso haya mejorado aunque sin alcanzar el nivel deseado, propondremos que sólo los expertos más discrepantes cambien las preferencias en las que no haya suficiente acuerdo.

El trabajo se estructura como sigue. Inicialmente, introduciremos los problemas de TDG definidos sobre contextos heterogéneos en la Sección 2. En la Sección 3 describiremos un Modelo de Apoyo al Consenso para problemas TDG con información heterogénea, sobre el que construiremos nuestro modelo adaptativo, que

desarrollaremos en la sección 4. En la sección 5 analizaremos los resultados de la aplicación de ambos modelos sobre un ejemplo, y finalmente expondremos nuestras conclusiones y trabajos futuros en la sección 6.



## 2. Toma de Decisiones en Grupo en Contextos Heterogéneos

Empezaremos esta sección introduciendo los problemas de Toma de Decisiones en Grupo (TDG) con información numérica. Después continuaremos revisando brevemente diferentes enfoques propuestos en la literatura para expresar las preferencias de los expertos, abordando el problema de la unificación de la información, para finalizar describiendo las características de los problemas de TDG heterogéneos.

### 2.1. Los problemas de toma de decisiones en grupo (TDG)

Los problemas de TDG son situaciones de decisión en las que dos o más individuos o expertos  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $m \geq 2$ ), expresan sus preferencias sobre un conjunto de alternativas,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 2$ ), para obtener una solución (una alternativa o conjunto de alternativas). Dependiendo de la naturaleza o del conocimiento sobre las alternativas, los expertos pueden expresar sus preferencias usando diferentes enfoques. Las preferencias de los expertos se expresan usualmente por medio de relaciones de preferencia numéricas [27]. Una relación de preferencia puede definirse como una matriz  $\mathbf{P}_{e_i} \subset X \times X$ ,

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \dots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ p_i^{n1} & \dots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

Donde el valor  $\mu_{p_{e_i}} = p_i^{lk}$  se interpreta como el grado de preferencia de la alternativa  $x_l$  sobre  $x_k$  expresada por el experto  $e_i$ .

Supongamos que  $p^{ij} \in [0,1]$ , entonces:

- $p^{ij} = 1$  indica el máximo grado de preferencia de  $x_i$  sobre  $x_j$ .
- $0.5 \leq p^{ij} \leq 1$  indica una preferencia definitiva de  $x_i$  sobre  $x_j$ .
- $p^{ij} = 0.5$  indica la indiferencia entre  $x_i$  y  $x_j$ .

### 2.2. Modelado de preferencias

El modelado de preferencias es una de las actividades inevitables en los problemas de TDG, independientemente del área en el que se esté trabajando. Los expertos en base a su conocimiento, experiencias y creencias han de emitir sus valoraciones sobre el conjunto de alternativas y establecer un orden de preferencia sobre la idoneidad de cada una de ellas como solución al problema.

En los problemas de decisión entendemos por dominio de expresión de preferencias el dominio de información utilizado por los expertos para expresar sus preferencias. En la literatura podemos encontrar problemas de toma de decisión en los que todos los expertos expresan sus preferencias en mismo dominio de información, hablándose de problemas definidos en contextos homogéneos [3, 7, 11, 14, 21, 23, 31, 33, 35, 36, 37, 43], o bien problemas en los que los expertos utilizan dominios de información diferentes, conocidos como problemas definidos en contextos heterogéneos [10, 15, 24, 25, 49].

En este tipo de problemas definidos en contextos heterogéneos, los expertos pueden decidir sobre la utilización de modelos de representación de preferencias que les resulten cercanos a sus disciplinas o campos de trabajo. Por ejemplo, expertos que pertenecen a áreas técnicas se pueden sentir cómodos representando sus preferencias mediante valores numéricos. Sin embargo, expertos que pertenecen a otro tipo de disciplinas menos técnicas (Historia, Sociología,...), o cuando la información disponible es demasiado imprecisa, pueden preferir expresar sus preferencias utilizando expresiones más cercanas al lenguaje humano, tales como palabras o etiquetas lingüísticas. También puede ocurrir que, incluso sintiéndose cómodos con valores numéricos, los expertos tengan que valorar alternativas sobre las que no tienen un conocimiento lo suficientemente preciso para asignarles valores numéricos exactos, pudiendo preferir entonces el uso de valores intervalares.

Adaptar el modelado de preferencias al contexto en el que se desarrolla el problema de decisión consigue que los expertos se sientan más seguros a la hora de valorar sus preferencias, y por tanto que la solución final tenga mayor garantía de éxito [12].

En la literatura [10, 14, 25, 31, 49] encontramos que los expertos utilizan principalmente tres tipos de dominios de información para expresar sus preferencias.

- Dominio Numérico.
- Dominio Intervalar.
- Dominio Lingüístico.

Ejemplos, características y una breve justificación de las circunstancias en las que es adecuado utilizar un dominio u otro se presentan en los siguientes apartados.

### **2.2.1. Dominio numérico.**

El uso del dominio numérico para modelar las preferencias implica que los expertos expresen sus preferencias mediante valores numéricos exactos.

Una relación de preferencia numérica  $R$  sobre  $X$  se define como un subconjunto difuso del producto cartesiano  $X \times X$ , es decir,  $R: X \times X \rightarrow [0,1]$ . El valor,  $R(x_i, x_k) = p^{ik}$  indica el grado en el que una alternativa  $x_i$  se prefiere a la alternativa  $x_k$ .

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} 0.5 & \dots & 0.7 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.3 & \dots & 0.5 \end{pmatrix}$$

Estas fueron el primer tipo de relaciones de preferencia usadas en la toma de decisiones [27], pero pronto aparecieron otros enfoques para tratar contextos con incertidumbre, que serán estudiados en las siguientes secciones.

### 2.2.2. Dominio intervalar.

El hecho de considerar la incertidumbre en los problemas de decisión ha originado la necesidad de definir modelados de preferencias más flexibles capaces de recoger dicha incertidumbre, siendo el modelado intervalar uno de ellos. La valoración de alternativas por medio de intervalos  $[\underline{a}, \bar{a}]$  ( $\underline{a} \leq \bar{a}$ ) se ha mostrado como una técnica eficaz para tratar la incertidumbre en ciertos problemas de decisión [1, 31, 42].

Una relación de preferencia intervalar  $R$  sobre  $X$  se define como:

$$R: X \times X \rightarrow I([0,1]).$$

Donde  $R(x_i, x_k) = p^{lk}$  denota el grado de preferencia intervalar de la alternativa  $x_i$  sobre  $x_k$ . En estos enfoques, las preferencias proporcionadas por los expertos son intervalos definidos sobre  $I([0,1])$ , donde la preferencia se expresa como  $[\underline{a}, \bar{a}]^k$ , con  $\underline{a} \leq \bar{a}$ .

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} [0.5,0.5] & \dots & [0.7,0.9] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0.1,0.3] & \dots & [0.5,0.5] \end{pmatrix}$$

De este modo los expertos pueden valorar alternativas sobre las que no tienen un conocimiento suficiente como para asignarles valores exactos mediante un valor preciso.

### 2.2.3. Dominio lingüístico.

Los expertos pueden utilizar un modelado de preferencias lingüístico en aquellas situaciones de decisión en las que la información disponible es demasiado imprecisa o se valoran aspectos cuya naturaleza recomienda el uso de valoraciones cualitativas [8, 9, 21, 47, 48]. En estas situaciones el experto puede considerar más adecuado utilizar una palabra o término lingüístico para expresar sus preferencias, antes que un valor numérico más o menos preciso.

Una relación de preferencia lingüística difusa se define como:

$$R: X \times X \rightarrow S$$

Siendo  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de etiquetas.

El enfoque lingüístico difuso representa la información como valores lingüísticos por medio de variables lingüísticas [47]. Este enfoque es adecuado para cualificar fenómenos relativos a la percepción humana que normalmente valoramos usando palabras en lenguaje natural. Esto puede surgir por diferentes razones. Hay algunas situaciones donde la información puede ser no cuantificable debido a su naturaleza, y por tanto, puede ser expresada solamente mediante términos lingüísticos (por ejemplo cuando evaluamos el “comfort” o el “diseño” de un coche, pueden usarse términos como términos como “malo”, “pobre”, “tolerable”, “intermedio”, “bueno” [34]). En otros casos [48], hay cierta tolerancia para la imprecisión que puede ser explotada para conseguir extensibilidad, robustez, costes de solución bajos, y mejor correspondencia con la realidad (por ejemplo cuando evaluamos la velocidad de un coche, se usan términos lingüísticos como “rápido”, “muy rápido”, “lento”, en lugar de valores numéricos).

Tenemos que elegir los descriptores lingüísticos apropiados para el conjunto de términos y su semántica. Una posibilidad de generar el conjunto lingüístico de términos consiste en suministrar directamente el conjunto de términos considerando que todos los términos están distribuidos en una escala en la que está definido un orden total. Por ejemplo, un conjunto de siete términos  $S$ , puede darse como:

$$S = \{s_0 = \text{nulo}, s_1 = \text{muy bajo}, s_2 = \text{bajo}, s_3 = \text{medio}, \\ s_4 = \text{alto}, s_5 = \text{muy alto}, s_6 = \text{perfecto}\}$$

En estos casos, normalmente se requiere que exista:

1. Un operador de negación  $Neg(s_i) = s_j$  tal que  $j = g - i$  ( $g + 1$  es la cardinalidad del conjunto de términos).
2. Un operador de maximización:  $Max(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \geq s_j$ .
3. Un operador de minimización:  $Min(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \leq s_j$ .

La semántica de los términos se da mediante números difusos, definidos en el intervalo  $[0,1]$ . Una forma de caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de sus funciones de pertenencia [2]. Por ejemplo, podemos asignar la siguiente semántica al conjunto de siete términos mediante números difusos triangulares:

$$\begin{aligned}
 P &= \text{Perfecto} = (0.83, 1, 1) & MA &= \text{Muy Alto} = (0.67, 0.83, 1) \\
 A &= \text{Alto} = (0.5, 0.67, 0.83) & M &= \text{Medio} = (0.33, 0.5, 0.67) \\
 B &= \text{Bajo} = (0.17, 0.33, 0.5) & MB &= \text{Muy bajo} = (0, 0.17, 0.33) \\
 N &= \text{Nulo} = (0, 0, 0.17).
 \end{aligned}$$

Que se muestra gráficamente en la Figura 2.

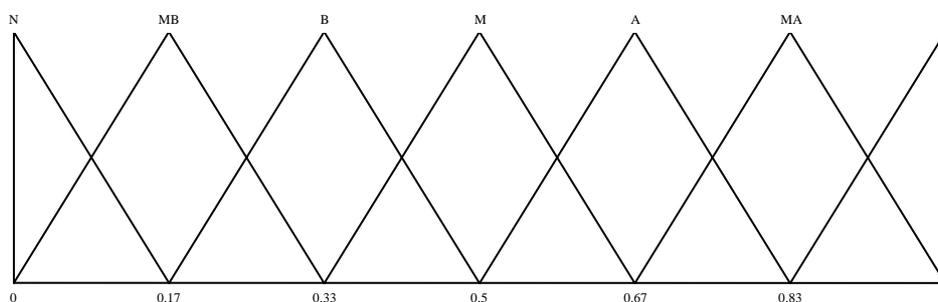


Figura 2. Un conjunto de siete términos lingüísticos con su semántica asociada.

Por tanto una relación de preferencia lingüística  $R(x_l, x_k)$  denota el grado de preferencia lingüística de la alternativa  $x_l$  sobre  $x_k$ . Usando el conjunto de términos lingüísticos mostrado en la Figura 2, una relación de preferencia lingüística podría ser:

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} M & \dots & MA \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ MB & \dots & M \end{pmatrix}$$

### 2.3. Problemas de toma de decisiones en grupo definidos en contextos heterogéneos

La situación ideal en un problema TDG es que todos los expertos tengan un conocimiento extenso sobre las alternativas y proporcionen sus opiniones en una escala numérica precisa. Sin embargo, en algunos casos, los expertos pueden pertenecer a distintas áreas de investigación y tener diferentes niveles de conocimiento sobre las alternativas. Debido a esto pueden preferir expresar sus preferencias por medio de diferentes dominios de información. En estos casos, podemos considerar que el problema está definido en un contexto heterogéneo.

Nos centraremos pues en este tipo de problemas, donde los expertos expresan sus preferencias usando diferentes dominios de expresión (numéricos, intervalares o

lingüísticos)  $D_i \in \{N | I | L\}$ . Cada experto expresa sus opiniones por medio de una relación de preferencia definida sobre un único dominio de expresión,  $\mathbf{P}_{e_i}$ :

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \dots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ p_i^{n1} & \dots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

Donde  $p_i^{lk} \in D_i$  representa la preferencia de la alternativa  $x_l$  sobre la alternativa  $x_k$  dada por el experto  $e_i$ .

### 3. Un modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para problemas TDG con información heterogénea

En esta sección presentamos un modelo de Sistema de Apoyo al Consenso (SAC) para problemas TDG con información heterogénea, tomando como base el modelo descrito en [19]. A su vez, este nuevo modelo nos servirá de punto de partida para desarrollar un modelo de SAC Adaptativo en la siguiente Sección. El modelo tiene dos características principales:

- Es capaz de llevar a cabo el proceso consenso en problemas TDG en contextos heterogéneos con valoraciones numéricas, intervalares y lingüísticas.
- Incluye un generador de recomendaciones que asume el papel del moderador y recomienda cambios a las preferencias de los expertos con el fin de obtener un alto grado de consenso.

Este modelo además, ha sido construido usando:

- Una metodología para unificar la información heterogénea en un único dominio de expresión.
- Dos medidas para trabajar con el consenso: grado de consenso y medida de proximidad. La primera se usa para evaluar el acuerdo entre los expertos, mientras que la segunda se usa para medir la distancia entre la preferencia colectiva y las preferencias individuales de los expertos.
- En base a estas medidas se usa un conjunto de reglas de recomendación para guiar la dirección de los cambios en las opiniones de los expertos.

Así mismo, el modelo está formado por las siguientes fases:

1. *Unificación de la información.* En esta fase, las preferencias heterogéneas de los expertos se unifican en un único dominio.
2. *Cálculo del grado de consenso.* En esta fase se calcula el grado de consenso entre los expertos. Para hacer esto se define una función de similaridad para calcular la coincidencia entre las preferencias de los expertos.
3. *Comprobación del acuerdo.* En esta fase el SAC controla el nivel de acuerdo conseguido ente los expertos. Si el acuerdo es mayor que un umbral de consenso especificado ( $\gamma$ ) entonces el proceso de consenso acaba y se aplicará el proceso de selección para obtener la solución del problema. En otro caso, en la siguiente fase deben modificarse las preferencias de los expertos.
4. *Generación de recomendaciones.* Para ayudar a los expertos a cambiar sus preferencias, el SAC genera un conjunto de recomendaciones ayudándose de una medida de proximidad y del grado de consenso, para construir un generador de recomendaciones guiado con objeto de identificar las preferencias que deben ser cambiadas, y mediante un mecanismo de realimentación recomendar a los expertos como deben hacer los cambios para incrementar el acuerdo en la siguiente ronda de

consenso.

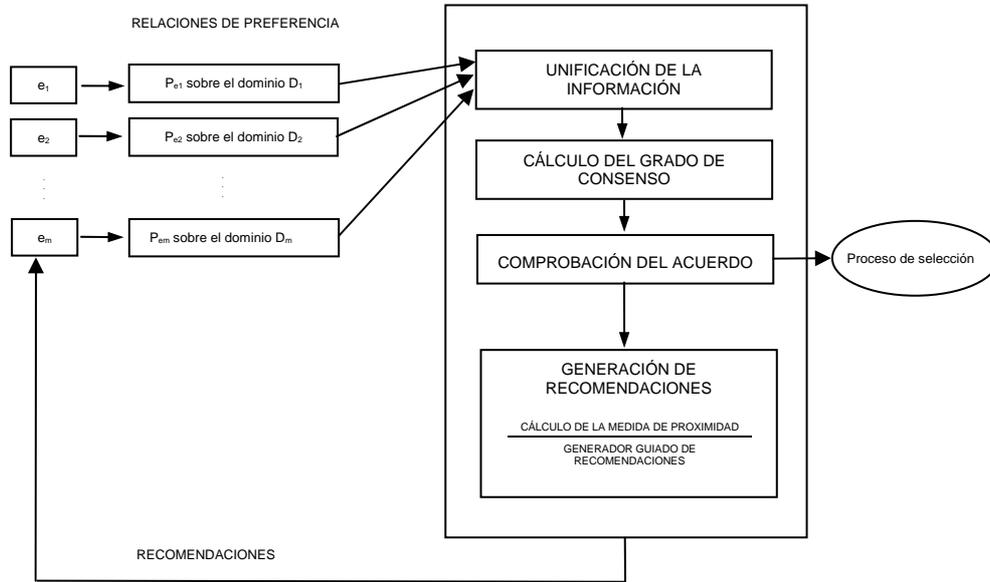


Figura 3. Un modelo de SAC que trabaja con información heterogénea.

### 3.1. Unificación de la información

Considerando que estamos tratando con problemas de TDG definidos en contextos heterogéneos con información numérica, intervalar y lingüística y como no hay operadores estándares para manipular directamente información heterogénea, necesitamos unificarla en un espacio de utilidad común que llamaremos conjunto básico de términos lingüísticos (CBTL),  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  (figura 4). Para hacer esto, como se propone en [26], definimos una función de transformación diferente para transformar cada valor de preferencia numérica, intervalar y lingüística en un conjunto difuso definido sobre el CBTL,  $F(S_T)$  :

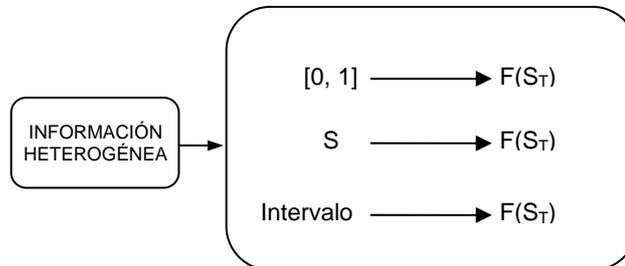


Figura 4. Proceso de unificación de información heterogénea

### 3.1.1. Transformación de valores numéricos definidos en $[0,1]$ en $F(S_T)$

Para transformar un valor numérico en un conjunto difuso sobre  $S_T$ , usamos la siguiente función. Sea  $\mathcal{G}$  un valor numérico,  $\mathcal{G} \in [0,1]$  y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  el CBTL. La función  $\tau_{NS_T}$  que transforma un valor numérico  $\mathcal{G}$  en un conjunto difuso sobre  $S_T$  se define como [26]:

$$\tau_{NS_T} : [0,1] \rightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{NS_T}(\mathcal{G}) = \{(s_0, \gamma_0), \dots, (s_g, \gamma_g)\}, s_i \in S_T, \gamma_i \in [0,1]$$

$$\gamma_i = \mu(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{G} \notin \text{Soporte}(\mu_{s_i}(x)) \\ \frac{\mathcal{G} - a_i}{b_i - a_i}, & \text{si } a_i \leq \mathcal{G} \leq b_i \\ 1, & \text{si } b_i \leq \mathcal{G} \leq d_i \\ \frac{c_i - \mathcal{G}}{c_i - d_i}, & \text{si } d_i \leq \mathcal{G} \leq c_i \end{cases}$$

**Nota 1:** Consideramos las funciones de pertenencia,  $\mu_{s_i}(\cdot)$ , para las etiquetas lingüísticas  $s_i \in S_T$ , representadas por una función paramétrica  $(a_i, b_i, d_i, c_i)$ . Un caso particular son las valoraciones lingüísticas cuyas funciones de pertenencia son triangulares, en cuyo caso  $b_i = d_i$ .

### 3.1.2. Transformación de los términos lingüísticos de $S$ en $F(S_T)$

Para transformar un valor lingüístico en un conjunto difuso sobre  $S_T$ , usamos la siguiente función. Sean  $S = \{l_0, \dots, l_p\}$  y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  dos conjuntos de términos lingüísticos, tales que  $g \geq p$ . Entonces, la función  $\tau_{SS_T}$  que transforma  $l_i \in S$  en un conjunto difuso sobre  $S_T$  se define como:

$$\tau_{SS_T} : S \rightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{SS_T}(l_i) = \{(s_k, \gamma_k^i) / k \in \{0, \dots, g\}, \forall l_i \in S$$

$$\gamma_k^i = \max_y \min\{\mu_{l_i}(y), \mu_{s_k}(y)\}$$

Donde  $F(S_T)$  es el conjunto de conjuntos difusos definidos en  $S_T$ , y  $\mu_{l_i}(\cdot)$  y  $\mu_{s_k}(\cdot)$  son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos asociados con los términos  $l_i$  y  $s_k$ , respectivamente.

Por tanto, el resultado de  $\tau_{SS_T}$  para cualquier valor lingüístico de  $S$  es un conjunto difuso definido en  $S_T$ .

**Nota 2:** En el caso de que el conjunto de términos lingüísticos  $S$  de los contextos no homogéneos sea elegido como  $S_T$ , el conjunto difuso que representa un término lingüístico será todo 0 excepto el valor correspondiente al ordinal de la etiqueta lingüística, que será 1.

### 3.1.3. Transformación de valores intervalares en $F(S_T)$

Para transformar un valor intervalar en un conjunto difuso sobre  $S_T$ , usamos la siguiente función. Sea  $I = [\underline{i}, \bar{i}]$  un valor intervalar en  $[0,1]$  y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  el CBTL. Entonces, la función  $\tau_{IS_T}$  que transforma el valor intervalar  $I$  en un conjunto difuso sobre  $S_T$  se define como:

$$\begin{aligned} \tau_{IS_T} : I &\rightarrow F(S_T) \\ \tau_{IS_T}(I) &= \{(s_k, \gamma_k^i) / k \in \{0, \dots, g\}\} \\ \gamma_k^i &= \max_y \min\{\mu_I(y), \mu_{s_k}(y)\} \end{aligned}$$

Donde la función  $F(S_T)$  es el conjunto de conjuntos difusos definidos en  $S_T$ , y  $\mu_I(\cdot)$  y  $\mu_{s_k}(\cdot)$  son las funciones de pertenencia asociadas con el valor intervalar  $I$  y los términos  $s_k$ , respectivamente.

**Nota 3:** Asumimos que el valor intervalar tiene una representación inspirada en la función de pertenencia de los conjuntos difusos [30]:

$$\mu_I(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{G} < \underline{i} \\ 1, & \text{si } \underline{i} \leq \mathcal{G} \leq \bar{i} \\ 0, & \text{si } \bar{i} < \mathcal{G} \end{cases}$$

Donde  $\mathcal{G}$  es un valor en  $[0,1]$ .

### 3.1.4. Resultados del proceso de unificación

Una vez que hemos introducido en las subsecciones previas cada una de las diferentes funciones de transformación, observamos que aplicando las funciones de unificación, y asumiendo que cada conjunto difuso se mostrará por medio de sus grados de

pertenencia  $(\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ , las preferencias de todos los expertos se expresan mediante matrices de conjuntos difusos,  $\tilde{\mathbf{P}}_{e_i}$ , definidos en el CBTL:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{e_i} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_{i0}^{11}, \dots, \alpha_{ig}^{11}) & \dots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_{i0}^{1n}, \dots, \alpha_{ig}^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_{i0}^{n1}, \dots, \alpha_{ig}^{n1}) & \dots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_{i0}^{nn}, \dots, \alpha_{ig}^{nn}) \end{pmatrix}$$

### 3.2. Cálculo del grado de consenso

El grado de consenso evalúa el nivel de acuerdo entre los expertos. Para calcular el nivel de acuerdo es necesario calcular una matriz de consenso que representa las preferencias de todos los expertos y que se obtiene agregando las distancias entre las preferencias de los expertos.

Dado que la información con la que trabajamos son conjuntos difusos, la distancia entre dos preferencias  $\tilde{p}_i^{lk}$  y  $\tilde{p}_j^{lk}$  se calcula por medio de la función de similitud  $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$  medida en el intervalo unitario  $[0,1]$  [19]:

$$s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk}) = 1 - \left| \frac{cv_i^{lk} - cv_j^{lk}}{g} \right| \quad (1)$$

El valor  $cv_i^{lk}$  es el valor central del conjunto difuso:

$$cv_i^{lk} = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}} \quad (2)$$

y representa el valor central o centro de gravedad de la información contenida en el conjunto difuso  $p_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ , siendo  $index(s_h^i) = h$ . El rango de este valor central es el intervalo cerrado  $[0, g]$ .

Un valor de  $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$  más cercano a 1 indica que las preferencias  $p_i^{lk}$  y  $p_j^{lk}$  son similares, mientras que un valor de  $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$  más cercano a 0 indica que las preferencias  $p_i^{lk}$  y  $p_j^{lk}$  son más distantes.

Una vez que hemos definido la función para evaluar la similitud, el grado de consenso se calcula mediante los siguientes pasos:

Se calculan los valores centrales de todos los conjuntos difusos:

$$cv_i^{lk}; \forall i = 1, \dots, m; l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k. \quad (3)$$

Para cada pareja de expertos  $e_i$  y  $e_j$  ( $i < j$ ), se calcula una matriz de similaridad  $SM_{ij} = (sm_{ij}^{lk})$ , donde

$$sm_{ij}^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk}) \quad (4)$$

Se obtiene una *matriz de consenso*  $CM$ , agregando todas las matrices de similaridad.

$$CM = \begin{pmatrix} cm^{11} & \dots & cm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cm^{n1} & \dots & cm^{nn} \end{pmatrix}$$

Esta agregación es llevada a cabo a nivel de pares de alternativas:

$$cm^{lk} = \phi(sm_{ij}^{lk}); i, j = 1, \dots, m \wedge \forall l, k = 1, \dots, n \wedge i < j.$$

En nuestro caso, usaremos la media aritmética como función de agregación  $\phi$ , aunque podrían usarse diferentes operadores de agregación, de acuerdo con las propiedades particulares que se quieran implementar.

### 3.2.1. Interpretación del grado de consenso

A partir de la matriz de consenso, podemos analizar el grado de consenso a tres niveles diferentes: pares de alternativas, alternativas y relaciones. De esta forma, tenemos la posibilidad de saber de forma precisa la situación del consenso y, por ejemplo, podemos identificar aquellos pares de alternativas en los que existe mayor desacuerdo.

Nivel 1. *Consenso sobre pares de alternativas*. El grado de consenso sobre un par de alternativas  $(x_l, x_k)$ , llamado  $cp^{lk}$ , mide el grado de consenso entre todos los expertos sobre ese par en concreto. En nuestro caso, esto se expresa por el elemento  $(l, k)$  de la matriz de consenso  $CM$ , o sea,

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k.$$

Valores de  $cp^{lk}$  cercanos a 1 denotan un mayor acuerdo. Esta medida permitirá la identificación de aquellos pares de alternativas con un bajo nivel de consenso.

Nivel 2. *Consenso sobre alternativas*. El grado de consenso sobre una alternativa  $x_l$ , llamado  $ca^l$ , mide el grado de consenso entre todos los expertos sobre esa alternativa. Se calcula como la media de cada fila  $l$  de la matriz de consenso  $CM$ , o sea,

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1} \quad (5)$$

Estos valores serán usados para proponer la modificación de preferencias asociadas a aquellas alternativas con un grado de consenso menor que un umbral mínimo de consenso  $\gamma$ , es decir,  $ca^l < \gamma$ .

Nivel 3. Consenso sobre relaciones o consenso global. El grado de consenso sobre relaciones, llamado  $cr$  mide el grado de consenso global entre las preferencias de los expertos. Se calcula como la media de todos los grados de consenso sobre alternativas, es decir,

$$cr = \frac{\sum_{l=1}^n ca^l}{n} \quad (6)$$

El SAC usa este valor para comprobar el nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda de consenso.

### 3.3. Comprobación del acuerdo alcanzado

En esta fase el SAC controla el nivel de acuerdo alcanzado en la actual ronda de consenso. Antes de aplicar el modelo de consenso, debe ser fijado un umbral mínimo de consenso,  $\gamma \in [0,1]$ , que dependerá del problema particular con el que estemos tratando. Cuando las consecuencias de la decisión son de importancia trascendental, el mínimo nivel de consenso requerido para tomar esta decisión lógicamente debería ser alto, por ejemplo  $\gamma = 0.8$  o superior. En el otro extremo, cuando las consecuencias no son tan trascendentales (pero no dejan de ser importantes) o cuando es urgente la obtención de una solución al problema, podría requerirse un umbral de consenso cercano a 0.5.

En cualquier caso, independientemente del valor  $\gamma$ , cuando el consenso global  $cr$  alcanza el valor  $\gamma$ , el SAC se detendrá y se aplicará el proceso de selección para obtener la solución. Sin embargo, existe la posibilidad de que el consenso global no converja al umbral de consenso y el proceso quede bloqueado. Con objeto de evitar esta circunstancia, el modelo incorpora un parámetro, *Maxcycles*, para limitar el número de rondas de consenso a realizar.

### 3.4. Generación de recomendaciones

El proceso de obtención del consenso se define como un proceso dinámico e iterativo compuesto de varias rondas, donde los expertos expresan y discuten sus opiniones. Tradicionalmente este proceso está coordinado por un moderador humano, que calcula el acuerdo entre los expertos en cada ronda usando diferentes medidas de consenso [20, 32]. Si el acuerdo no es suficiente, el moderador recomienda que los expertos cambien las preferencias más alejadas de la opinión del grupo en un esfuerzo para acercar posturas en la siguiente ronda de consenso [4, 39].

El moderador es normalmente una figura polémica, ya que los expertos pueden estar descontentos con su grado de objetividad. Además, en contextos heterogéneos el moderador puede tener problemas para comprender de forma adecuada los distintos dominios y escalas en que los expertos expresan sus opiniones. Para evitar esto, el modelo de SAC incorpora un generador guiado de recomendaciones, de manera que cuando el acuerdo no es suficiente (es decir,  $cr < \gamma$ ) los expertos deben modificar sus preferencias para intentar un acercamiento e incrementar el consenso en la siguiente ronda de consenso. Para hacer esto, usamos medidas de proximidad para identificar las preferencias de los expertos más alejadas de la opinión colectiva. Una vez que estas preferencias han sido identificadas, el generador guiado de recomendaciones es el encargado de sugerir como cambiarlas para incrementar el consenso en la siguiente ronda de consenso. Ambos procesos se describen detalladamente a continuación:

### 3.4.1. Cálculo e interpretación de la Medida de Proximidad

#### 3.4.1.1. Cálculo de la Medida de Proximidad

La medida de proximidad evalúa la distancia entre las preferencias de los expertos individuales y la preferencia colectiva del grupo de expertos. Para calcularla, primeramente necesitamos obtener una relación de preferencia colectiva  $\tilde{\mathbf{P}}_c$ ,

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \begin{pmatrix} \tilde{p}_c^{11} & \dots & \tilde{p}_c^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_c^{n1} & \dots & \tilde{p}_c^{nn} \end{pmatrix}$$

Que representa la opinión del grupo de expertos.  $\tilde{\mathbf{P}}_c$  se calcula agregando el conjunto de relaciones de preferencia individuales unificadas  $\{\tilde{\mathbf{P}}_{e_1}, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{e_m}\}$ :

$$\tilde{p}_c^{lk} = \psi(\tilde{p}_1^{lk}, \dots, \tilde{p}_m^{lk}) = (\alpha_{c_0}^{lk}, \dots, \alpha_{c_g}^{lk})$$

Donde

$$\alpha_{c_j}^{lk} = \psi(\alpha_{1j}^{lk}, \dots, \alpha_{mj}^{lk})$$

Siendo  $\psi$  un “operador de agregación”.

Una vez que el SAC ha obtenido la relación de preferencia colectiva, se calcula la matriz de proximidad,  $PM_i$ , para cada experto  $e_i$ ,

$$PM_i = \begin{pmatrix} pm_i^{11} & \dots & pm_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pm_i^{n1} & \dots & pm_i^{nn} \end{pmatrix}$$

Para evaluar la proximidad entre las preferencias individuales de los expertos  $\tilde{\mathbf{P}}_{e_i}$ , y las preferencias colectivas  $\tilde{\mathbf{P}}_c$ , usamos la función de similaridad definida en la expresión (1),

$$pm_i^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_c^{lk})$$

Estas matrices contienen la información necesaria para saber la posición de las preferencias de cada experto con respecto a la posición del grupo.

### 3.4.1.2. Interpretación de la Medida de Proximidad

Las matrices de proximidad se estudian a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones. De esta forma es fácil identificar los expertos más alejados en aquellas valoraciones donde no hay suficiente consenso:

Nivel 1. *Proximidad sobre pares de alternativas.* Dado un experto  $e_i$ , su medida de proximidad sobre un par de alternativas,  $(x_l, x_k)$ , llamado  $pp_i^{lk}$ , mide la proximidad entre su valor de preferencia y el valor de preferencia colectivo en ese par. En nuestro caso, este valor coincide con el elemento  $(l, k)$  de la matriz de proximidad  $PM_i$ , es decir

$$pp_i^{lk} = pm_i^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k.$$

Nivel 2. *Proximidad sobre alternativas.* Dado un experto  $e_i$ , su medida de proximidad sobre una alternativa  $x_l$ , llamada  $pa_i^l$ , mide la proximidad entre sus valores de preferencia en esa alternativa y los valores colectivos. Se calcula como la media de las proximidades sobre pares de alternativas de  $x_l$ ,

$$pa_i^l = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^n pp_i^{lk}}{n-1} \quad (7)$$

Nivel 3. *Proximidad sobre la relación.* Dado un experto  $e_i$ , su medida de proximidad sobre la relación, llamada  $pr_i$ , mide la proximidad global entre sus valores de preferencia sobre todas las alternativas y el correspondiente valor colectivo. Se

calcula como la media de todos los valores de proximidad sobre alternativas, es decir,

$$pr_i = \frac{\sum_{l=1}^n pa_i^l}{n} \quad (8)$$

Si  $pr_i$  está próximo a 1 entonces  $e_i$  contribuye positivamente al consenso, mientras que si  $pr_i$  está próximo a 0  $e_i$  contribuye negativamente al consenso.

### 3.4.2. Generador guiado de recomendaciones

El objetivo del generador orientado de recomendaciones es identificar las preferencias de los expertos más alejadas y sugerir como cambiarlas con objeto de incrementar el consenso. Para conseguir este propósito el generador guiado de recomendaciones usa dos tipos de reglas de recomendación: reglas de identificación y reglas de dirección.

#### 3.4.2.1. Reglas de identificación (RI)

Estas reglas identifican qué expertos, alternativas y pares de alternativas deben cambiarse. De esta forma, el modelo sólo se centra en las preferencias en desacuerdo y no recomendará cambiar aquellas preferencias donde el acuerdo es suficiente. El modelo usa tres reglas:

1. *Una regla de identificación de expertos.* Identifica aquellos expertos que deberían cambiar algunas de sus valores de preferencias. Previamente deberíamos haber decidido el número de expertos ( $ne$ ) que deberían modificar sus preferencias. La elección del valor de  $ne$  puede depender del tipo de problema y/o de la cantidad de tiempo disponible para alcanzar el consenso. Si se desea una rápida consecución del consenso, entonces el valor de  $ne$  podría ser alto (por ejemplo  $ne = 75\%$ ), mientras que si  $ne$  es bajo (por ejemplo  $ne = 25\%$ ) se necesitará más tiempo para alcanzar el consenso. Una vez decidido el número de expertos, los  $ne$  expertos con los valores de proximidad más bajos deben cambiar sus preferencias. Llamaremos a este conjunto de expertos *EXPCH*. Por tanto, la regla de identificación de expertos es la siguiente:

**IR.1.**  $\forall e_i \in E \cap EXPCH$ , entonces  $e_i$  debe cambiar sus preferencias, siendo

$$EXPCH = \{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(ne)}\}$$

Donde  $\sigma$  es una permutación sobre el conjunto de proximidades sobre la relación definida como  $pr_{\sigma(j)} \leq pr_{\sigma(i)} \quad \forall j \leq i$ .

2. *Una regla de identificación de alternativas.* Esta identifica aquellas alternativas donde no hay suficiente consenso y por tanto deben ser cambiadas. Llamaremos a este conjunto de alternativas *ALT* y estará compuesto por todas aquellas

alternativas cuyo grado de consenso  $ca^l$  es menor que el umbral de consenso  $\gamma$ , es decir,

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < \gamma\}$$

La regla de identificación de alternativas es la siguiente:

**IR.2.**  $\forall e_i \in EXPCH$ ,  $e_i$  debe cambiar algunas valoraciones asociadas con los pares que pertenecen a la alternativa  $x_l$ , tal que  $x_l \in ALT$ .

3. *Una regla de identificación de pares de alternativas.* Esta identifica particularmente aquellos pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  de las alternativas en desacuerdo  $x_l \in ALT$  que deben cambiarse. Llamaremos a este conjunto de pares de alternativas  $PALT_i$ . Para hacer esto usamos las medidas de proximidad sobre pares de alternativas, siendo la regla de identificación la siguiente:

**IR.3.**  $\forall (x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH)$ , si  $(x_l, x_k) \in PALT_i$  entonces  $e_i$  debe cambiar  $p_i^{lk}$ , siendo el conjunto de pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  cuyos valores de proximidad a nivel de pares,  $pp_i^{lk}$ , son menores que un umbral mínimo de proximidad,  $\beta$ , es decir,

$$PALT_i = \{(x_l, x_k) \mid x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH \wedge pp_i^{lk} < \beta\}.$$

Claramente, un valor alto en  $\beta$  supone un mayor número de cambios necesarios.

### 3.4.2.2. Reglas de dirección (DR)

Una vez que el modelo ha identificado los expertos y los pares de alternativas que deben cambiarse,  $(x_l, x_k) \in PALT_i$ , este usa un conjunto de reglas de dirección para sugerir a los expertos como cambiar las valoraciones actuales con objeto de incrementar el acuerdo en la siguiente ronda de consenso. Antes de continuar, recordemos que las preferencias de los expertos han sido transformadas en conjuntos difusos sobre  $S_T$ ,

$$\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_0^{lk}, \dots, \alpha_g^{lk})$$

Y que agregando todas las preferencias individuales

$$\tilde{p}_c^{lk} = \psi(\tilde{p}_1^{lk}, \dots, \tilde{p}_m^{lk})$$

se obtienen las preferencias colectivas  $\tilde{p}_c^{lk}$  que representan la opinión del grupo de expertos.

El proceso de aproximación consiste en acercar las preferencias individuales más alejadas a las preferencias colectivas. Para ello se necesita conocer la posición actual de ambas preferencias. Estas posiciones se obtienen calculando los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. Tal como comentamos en la subsección 2.2, el valor central se define como la posición o el centro de gravedad de la información contenida en el conjunto difuso  $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_0^{lk}, \dots, \alpha_g^{lk})$  y se calcula según la expresión (2):

$$cv_i^{lk} = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}},$$

Donde  $index(s_h^i) = h$ .

Una vez conocidas las posiciones de las preferencias individuales y colectivas, ya es posible definir un conjunto de reglas que permitan identificar la dirección en la que han de cambiar las preferencias individuales para aproximarlas a las colectivas. Estas reglas comparan los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. El resultado de esta comparación será recomendar incrementar o decrementar las valoraciones individuales dadas por los expertos para acercarlas a las valoraciones colectivas.

Proponemos tres reglas de dirección que se aplicarán sobre los conjuntos de preferencias a modificar devueltos generados por las reglas de identificación  $PALT_i$ :

**DR.1.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) < 0$ , el experto  $e_i$  debería incrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

**DR.2.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) > 0$ , el experto  $e_i$  debería decrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

**DR.3.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) = 0$ , el experto  $e_i$  no modificará la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

### 3.5. Ejemplo de aplicación del modelo de SAC no adaptativo

En esta sección usaremos el modelo de SAC propuesto para llevar a cabo un proceso de búsqueda de consenso sobre un ejemplo problema de TDG.

#### 3.5.1. Descripción del problema

Imaginemos que un equipo de investigación sobre Historia Antigua debate sobre uno de los grandes dilemas arqueológicos que hay en la actualidad en el sur de España: la ubicación del escenario de la batalla de Baecula, que enfrentó a cartagineses y romanos durante la II Guerra Púnica en este territorio. Previamente al debate se han estudiado los

textos de los historiadores romanos de la antigüedad que escribieron sobre este acontecimiento con objeto de extraer la descripción geográfica y topológica del lugar donde se desarrolló la batalla. Con esta información, se ubican en la zona los posibles enclaves que concuerdan con estas descripciones, dando lugar al siguiente conjunto de alternativas:

- Bailén:  $x_1$
- Santo Tomé:  $x_2$
- Úbeda la Vieja:  $x_3$
- El Molar:  $x_4$

El grupo de investigación ha seleccionado a cuatro expertos para que expongan sus preferencias sobre las diferentes alternativas, y alcancen a ser posible un alto grado de acuerdo antes de que el grupo tome la decisión. Estos cuatro expertos pertenecen a diferentes ámbitos de conocimiento (arqueología, toponimia, epigrafía y topografía, respectivamente) y además expresan sus preferencias en un dominio de información diferente:

- El experto  $e_1$  pertenece al área de arqueología, y da sus preferencias mediante valores numéricos en  $[0,1]$ ,  $\mathbf{P}_{e_1}$ .
- El experto  $e_2$  pertenece al área de toponimia y decide dar sus preferencias mediante valores sobre el conjunto de términos lingüísticos expuesto en la página 6,  $\mathbf{P}_{e_2}$ .
- El experto  $e_3$  pertenece al área de epigrafía y dará sus preferencias mediante valores intervalares definidos en  $[0,1]$ ,  $\mathbf{P}_{e_3}$ .
- Por último el experto en topografía,  $e_4$ , al igual que  $e_2$  dará sus preferencias mediante valores sobre el mismo conjunto de términos lingüísticos descrito,  $\mathbf{P}_{e_4}$ .

Las preferencias de tipo  $p_i^{||}$  no serán tenidas en cuenta porque representan el grado de preferencia de una alternativa sobre sí misma.

$$\mathbf{P}_{e_1} = \begin{pmatrix} - & .9 & .1 & .1 \\ .1 & - & .9 & .2 \\ .8 & .1 & - & .4 \\ .9 & .9 & .8 & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & MB & MB & M \\ MA & - & MA & MA \\ N & MB & - & B \\ M & MB & N & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{e_3} = \begin{pmatrix} - & [.85,.95] & [.8,.95] & [.5,.65] \\ [.2,.35] & - & [.2,.3] & [.85,1] \\ [.3,.35] & [.8,9] & - & [.8,.1] \\ [.3,.4] & [.2,.4] & [.8,.9] & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_4} = \begin{pmatrix} - & B & A & MA \\ A & - & M & MB \\ B & M & - & A \\ MB & A & B & - \end{pmatrix}$$

Así mismo, antes de poner en marcha el modelo será conveniente fijar los parámetros necesarios:

- El umbral de consenso mínimo deseado para dar por finalizado el proceso de consenso,  $\gamma = 0.8$ .
- El número de expertos que deben cambiar sus preferencias en cada ronda es del 50%, es decir  $ne = 2$ .
- Umbral mínimo de proximidad, utilizado para seleccionar los pares de alternativas de las alternativas en desacuerdo,  $\beta = 0.8$ .
- Fijaremos el número máximo de rondas de consenso en  $Max\_rondas = 10$ .

## PRIMERA RONDA

### 1. Unificación de la información

En esta fase la información heterogénea se unifica en un dominio común  $S_T$ . Como se indicó en la Sección 3.1, una vez que se ha elegido un  $S_T$  apropiado, que en este caso es el conjunto de etiquetas lingüísticas usado por los expertos  $e_2$  y  $e_4$ , el modelo aplica las diferentes funciones de transformación  $\tau_{DS_T}$  para transformar cada preferencia de experto en un conjunto difuso definido sobre  $S_T$ , obteniendo los siguientes conjuntos difusos:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & (0,0,0,0,.59,.41) & (.41,.59,0,0,0,0) & (.41,.59,0,0,0,0) \\ (.41,.59,0,0,0,0) & - & (0,0,0,0,.59,.41) & (0,.81,.19,0,0,0) \\ (0,0,0,0,.19,.81) & (.41,.59,0,0,0,0) & - & (0,0,.59,.41,0,0) \\ (0,0,0,0,.59,.41) & (0,0,0,0,.59,.41) & (0,0,0,0,.19,.81) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_2} = \begin{pmatrix} - & (0,1,0,0,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,0,1,0) & - & (0,0,0,0,1,0) & (0,0,0,0,1,0) \\ (1,0,0,0,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & - & (0,0,1,0,0,0) \\ (0,0,0,1,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & (1,0,0,0,0,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_3} = \begin{pmatrix} - & (0,0,0,0,0,.88,.71) & (0,0,0,0,.19,1,.71) & (0,0,0,1,.88,0,0) \\ (0,.81,1,.12,0,0,0) & - & (0,.81,.81,0,0,0,0) & (0,0,0,0,0,.88,1) \\ (0,.19,1,.12,0,0,0) & (0,0,0,0,.19,1,.41) & - & (0,0,0,0,.19,1,.41) \\ (0,.19,1,.41,0,0,0) & (0,.81,1,.12,0,0,0) & (0,0,0,0,.19,1,.41) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_4} = \begin{pmatrix} - & (0,0,1,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) & (0,0,0,0,1,0) \\ (0,0,0,1,0,0) & - & (0,0,0,1,0,0) & (0,1,0,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) & - & (0,0,0,0,1,0) \\ (0,1,0,0,0,0) & (0,0,0,0,1,0) & (0,0,1,0,0,0) & - \end{pmatrix}$$

## 2. Cálculo del grado de consenso

1. *Valores centrales.* Aplicando (2), el modelo calcula los valores centrales de los conjuntos difusos:

$$cv(e_1) = \begin{pmatrix} - & 5.41 & 0.59 & 0.59 \\ 0.59 & - & 5.41 & 1.19 \\ 4.81 & 0.59 & - & 2.41 \\ 5.41 & 5.41 & 4.81 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_2) = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 3 \\ 5 & - & 5 & 5 \\ 0 & 1 & - & 2 \\ 3 & 1 & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$cv(e_3) = \begin{pmatrix} - & 5.45 & 5.27 & 3.47 \\ 1.64 & - & 1.50 & 5.53 \\ 1.95 & 5.14 & - & 5.37 \\ 2.14 & 1.64 & 5.14 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_4) = \begin{pmatrix} - & 2 & 4 & 5 \\ 4 & - & 3 & 1 \\ 2 & 3 & - & 4 \\ 1 & 4 & 2 & - \end{pmatrix}$$

2. *Matrices de similitud.* El modelo calcula una matriz de similitud entre cada par de expertos usando la función distancia (1):

$$\begin{aligned}
 SM_{12} &= \begin{pmatrix} - & 0.27 & 0.93 & 0.60 \\ 0.27 & - & 0.93 & 0.37 \\ 0.20 & 0.93 & - & 0.93 \\ 0.60 & 0.27 & 0.20 & - \end{pmatrix} & SM_{13} &= \begin{pmatrix} - & 0.99 & 0.22 & 0.52 \\ 0.82 & - & 0.35 & 0.28 \\ 0.52 & 0.24 & - & 0.55 \\ 0.45 & 0.37 & 0.95 & - \end{pmatrix} \\
 SM_{14} &= \begin{pmatrix} - & 0.43 & 0.43 & 0.27 \\ 0.43 & - & 0.60 & 0.97 \\ 0.53 & 0.60 & - & 0.74 \\ 0.27 & 0.77 & 0.53 & - \end{pmatrix} & SM_{23} &= \begin{pmatrix} - & 0.26 & 0.29 & 0.92 \\ 0.44 & - & 0.42 & 0.91 \\ 0.68 & 0.31 & - & 0.48 \\ 0.86 & 0.89 & 0.14 & - \end{pmatrix} \\
 SM_{24} &= \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.50 & 0.67 \\ 0.83 & - & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.67 & - & 0.67 \\ 0.67 & 0.50 & 0.67 & - \end{pmatrix} & SM_{34} &= \begin{pmatrix} - & 0.43 & 0.79 & 0.74 \\ 0.61 & - & 0.75 & 0.24 \\ 0.99 & 0.64 & - & 0.81 \\ 0.81 & 0.61 & 0.48 & - \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. *Matriz de consenso.* El modelo calcula la matriz de consenso agregando las matrices de similitud:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.53 & 0.53 & 0.62 \\ 0.57 & - & 0.62 & 0.52 \\ 0.60 & 0.57 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.57 & 0.49 & - \end{pmatrix}$$

4. *Grados de consenso.* El modelo calcula el grado de consenso a diferentes niveles:  
 Nivel 1. *Consenso sobre pares de alternativas.* El elemento  $(l, k)$  de CM representa el grado de consenso sobre el par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

Nivel 2. *Consenso sobre alternativas.*

$$ca^1 = 0.56 \quad ca^2 = 0.57, \quad ca^3 = 0.62, \quad ca^4 = 0.56$$

Nivel 3. *Consenso sobre las relaciones o consenso global.*

$$cr = 0.58$$

### 3. Comprobación del acuerdo

En esta fase el valor de consenso global  $cr$  se compara con el umbral de consenso  $\gamma$ . En este ejemplo, hemos decidido usar un umbral de consenso alto,  $\gamma = 0.8$ . Como  $cr = 0.58 < \gamma$ , el consenso actual está lejos de ser suficiente como para dar por finalizado el proceso de consenso, y por tanto el proceso debe continuar.

#### 4. Generación de recomendaciones

En esta fase el SAC identifica qué preferencias deberían cambiarse y como llevar a cabo estos cambios.

##### 4.1 Cálculo de medidas de proximidad

En primer lugar el modelo calcula la relación de preferencia colectiva  $\mathbf{P}_c$ , agregando todas las relaciones de preferencia individuales usando la media aritmética como operador de agregación.

1. *Matrices de proximidad.* Se obtiene una matriz de proximidad para cada experto:

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & .72 & .57 & .58 \\ .67 & - & 0.67 & 0.60 \\ 0.56 & 0.63 & - & 0.80 \\ 0.56 & 0.56 & 0.74 & - \end{pmatrix} \quad PM_2 = \begin{pmatrix} - & .55 & .64 & .98 \\ .60 & - & .74 & .77 \\ .64 & .70 & - & .73 \\ .96 & 0.71 & .46 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_3 = \begin{pmatrix} - & .71 & .65 & .94 \\ .84 & - & .68 & .68 \\ .96 & .61 & - & .75 \\ .89 & .81 & .69 & - \end{pmatrix} \quad PM_4 = \begin{pmatrix} - & .71 & .86 & .68 \\ .76 & - & .93 & .57 \\ .97 & .96 & - & .94 \\ .70 & .79 & .79 & - \end{pmatrix}$$

2. *Medidas de proximidad.* El modelo calcula la proximidad a diferentes niveles:  
Nivel 1. Proximidad sobre pares de alternativas. Estos valores son iguales a los valores de las matrices de proximidad.

Nivel 2. Proximidad sobre alternativas.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$pa_1^1 = 0.62$	$pa_1^2 = 0.64$	$pa_1^3 = 0.66$	$pa_1^4 = 0.62$
$pa_2^1 = 0.72$	$pa_2^2 = 0.70$	$pa_2^3 = 0.69$	$pa_2^4 = 0.71$
$pa_3^1 = 0.77$	$pa_3^2 = 0.73$	$pa_3^3 = 0.77$	$pa_3^4 = 0.80$
$pa_4^1 = 0.75$	$pa_4^2 = 0.75$	$pa_4^3 = 0.96$	$pa_4^4 = 0.76$

Nivel 3. Proximidad en la relación.

$$pr_1 = 0.64, pr_2 = 0.71, pr_3 = 0.77, pr_4 = 0.81$$

#### 4.2. Generador de recomendaciones guiado

El modelo aplica las reglas de identificación para identificar los expertos y las preferencias que deben cambiarse, y las reglas de dirección para sugerir como hacer los cambios.

##### 4.2.1. Reglas de identificación

1. *Conjunto de expertos que deben cambiar sus preferencias, EXPCH*. El ranking de expertos de acuerdo con su proximidad es  $e_4, e_3, e_2, e_1$ , siendo  $e_2$  y  $e_1$  los expertos más alejados. En este ejemplo recomendamos que sean el 50% de los expertos los que deban cambiar sus preferencias en cada ronda, es decir,  $ne = 2$ . Por tanto:

$$EXPCH = \{e_1, e_2\}$$

2. *Conjunto de alternativas cuya valoración debe cambiarse, ALT*. En este caso, como hemos fijado el umbral de consenso en  $\gamma = 0.8$ , tenemos que

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.8\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

3. *Conjunto de pares de alternativas cuya valoración asociada debe cambiarse, PALT<sub>i</sub>*. En este punto, el modelo identifica los pares de alternativas que tienen que cambiarse. Teniendo en cuenta el umbral de proximidad  $\beta = 0.8$ , se seleccionan los siguientes pares de alternativas:

$$PALT_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

$$PALT_2 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

### 4.2.2. Reglas de dirección

En esta fase, el modelo recomienda la dirección que deben seguir los expertos a la hora de modificar sus preferencias en esta ronda de consenso. Dado que el modelo ha calculado los valores centrales de las preferencias individuales y colectivas, estamos en disposición de aplicar las reglas de dirección:

- Según la regla DR1, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las preferencias de la forma que se indica a continuación:

$$e_1 \rightarrow p_1^{13}, p_1^{14}, p_1^{21}, p_1^{24}, p_1^{32}, p_1^{34}$$

$$e_2 \rightarrow p_2^{12}, p_2^{13}, p_2^{31}, p_2^{32}, p_2^{34}, p_2^{42}, p_2^{43}$$

- Y según la regla DR2, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las preferencias:

$$e_1 \rightarrow p_1^{12}, p_1^{23}, p_1^{31}, p_1^{41}, p_1^{42}, p_1^{43}$$

$$e_2 \rightarrow p_2^{21}, p_2^{22}, p_2^{23}$$

## SEGUNDA RONDA

Siguiendo la recomendación previa proporcionada por el modelo de SAC, los expertos  $e_1$  y  $e_2$  cambian sus preferencias. En esta ronda, como sólo cambian las preferencias de  $e_1$  y  $e_2$  omitiremos repetir la relación de preferencia de los demás expertos.

$$\mathbf{P}_{e_1} = \begin{pmatrix} - & .8 & .2 & .2 \\ .2 & - & .8 & .3 \\ .7 & .2 & - & .5 \\ .8 & .8 & .7 & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & B & B & M \\ A & - & A & A \\ MB & B & - & M \\ M & B & MB & - \end{pmatrix}$$

Como el SAC lleva a cabo las mismas operaciones en todas las rondas de consenso, en las siguientes rondas sólo mostraremos los resultados que nos proporcionan mayor información sobre el funcionamiento del modelo.

### 1. Unificación de la información

Las operaciones en esta fase son las mismas que en la primera ronda.

### 2. Cálculo del grado de consenso

#### 1. Matriz de consenso.

$$CM = \begin{pmatrix} - & .63 & 0.60 & 0.67 \\ 0.70 & - & 0.70 & 0.56 \\ 0.73 & 0.64 & - & 0.79 \\ 0.66 & 0.68 & 0.59 & - \end{pmatrix}$$

2. *Grados de consenso.* El modelo calcula el grado de consenso a diferentes niveles:  
 Nivel 1. Consenso sobre pares de alternativas. El elemento  $(l, k)$  de CM representa el grado de consenso sobre el par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

Nivel 2. Consenso sobre alternativas.

$$ca^1 = 0.64 \quad ca^2 = 0.65, \quad ca^3 = 0.72, \quad ca^4 = 0.64$$

Nivel 3. Consenso sobre las relaciones o consenso global.

$$cr = 0.66$$

### 3. *Comprobación del acuerdo*

En esta fase el valor de consenso global  $cr$  se compara nuevamente con el umbral de consenso  $\gamma$ . Como  $cr = 0.66 < \gamma = 0.8$ , el consenso actual no es lo suficientemente grande para dar por finalizado el proceso, y por tanto el proceso debe continuar.

### 4. *Generación de recomendaciones*

#### 4.1. *Cálculo de la medida de proximidad*

El modelo calcula la proximidad a diferentes niveles:

Nivel 1. Proximidad sobre pares de alternativas. Para el experto  $e_i$  son las dadas en

$$PM_i.$$

Nivel 2. Proximidad sobre alternativas.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$pa_1^1 = 0.70$	$pa_1^2 = 0.74$	$pa_1^3 = 0.73$	$pa_1^4 = 0.72$
$pa_2^1 = 0.80$	$pa_2^2 = 0.84$	$pa_2^3 = 0.81$	$pa_2^4 = 0.80$
$pa_3^1 = 0.80$	$pa_3^2 = 0.75$	$pa_3^3 = 0.81$	$pa_3^4 = 0.81$
$pa_4^1 = 0.77$	$pa_4^2 = 0.77$	$pa_4^3 = 0.98$	$pa_4^4 = 0.77$

Nivel 3. Proximidad en la relación.

$$pr_1 = 0.72, pr_2 = 0.82, pr_3 = 0.79, pr_4 = 0.82$$

## 4.2. Generador de recomendaciones guiado

### 4.2.1. Reglas de identificación

1. Conjunto de expertos que deben cambiar sus preferencias,  $EXPCH$ .

$$EXPCH = \{e_1, e_3\}$$

2. Conjunto de alternativas cuya valoración debe cambiarse,  $ALT$ . Igual que antes, dado que el umbral de consenso es  $\gamma = 0.8$ , tenemos que

$$ALT = \{x_i \in X \mid ca^i < 0.8\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

3. Conjunto de pares de alternativas cuya valoración asociada debe cambiarse,  $PALT_i$ .

$$PALT_1 = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$$

$$PALT_3 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$$

### 4.2.2. Reglas de dirección

- Según la regla DR1, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las preferencias de la forma que se indica a continuación:

$$e_1 \rightarrow p_1^{13}, p_1^{14}, p_1^{21}, p_1^{24}, p_1^{32}$$

$$e_3 \rightarrow p_3^{23}$$

- Y según la regla DR2, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las preferencias:

$$e_1 \rightarrow p_1^{23}, p_1^{31}, p_1^{41}, p_1^{42}$$

$$e_3 \rightarrow p_3^{12}, p_3^{13}, p_3^{24}, p_3^{32}, p_3^{43}$$

## RESTO DE RONDAS

Dada la naturaleza mecánica del proceso, resumiremos la aplicación del modelo en la Tabla 1, donde se puede observar que han sido necesarias cinco rondas de discusión, en las que los expertos necesitaron hacer 56 cambios en sus preferencias antes de conseguir un acuerdo satisfactorio ( $cr = 0.8 = \gamma$ ).

Ronda	$cr$	Nº de cambios
1ª	0.58	22
2ª	0.66	15
3ª	0.73	11
4ª	0.76	8
5ª	0.81	

Tabla 1. Resumen de la aplicación del modelo.

#### 4. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo para TDG con información heterogénea

En cualquier problema de TDG, inicialmente las preferencias de los mismos suelen ser bastante diferentes y por tanto el grado de consenso suele ser bajo. En esta situación es lógico pensar que el generador de recomendaciones intentará que se hagan muchos cambios con el propósito de acercar las opiniones. Asumiendo que los expertos siguen las recomendaciones del modelo, conforme se van desarrollando las diferentes rondas de consenso, el grado de consenso se irá incrementando y el número de cambios reduciendo, consiguiéndose finalmente alcanzar el acuerdo deseado. Por otra parte parece lógico pensar que las operaciones que se realicen para buscar el consenso han de depender del nivel de acuerdo existente en cada ronda. Esto significa que el proceso de búsqueda del consenso podría adaptarse conforme el grado de consenso vaya mejorando. En esta sección proponemos un modelo de consenso que adaptará su funcionamiento al acuerdo alcanzado en cada ronda de discusión. De este modo, en aquellas rondas en las que el grado de consenso sea bajo, será un indicador de que el grado de acuerdo está aún muy lejano y propondremos que un número alto de expertos cambien todas las preferencias en las que no hay consenso. Por el contrario, cuando el grado de consenso haya mejorado pero sin ser aún lo suficientemente alto para finalizar el proceso de consenso, propondremos que sólo los expertos más discrepantes cambien las preferencias en las que no haya suficiente acuerdo.

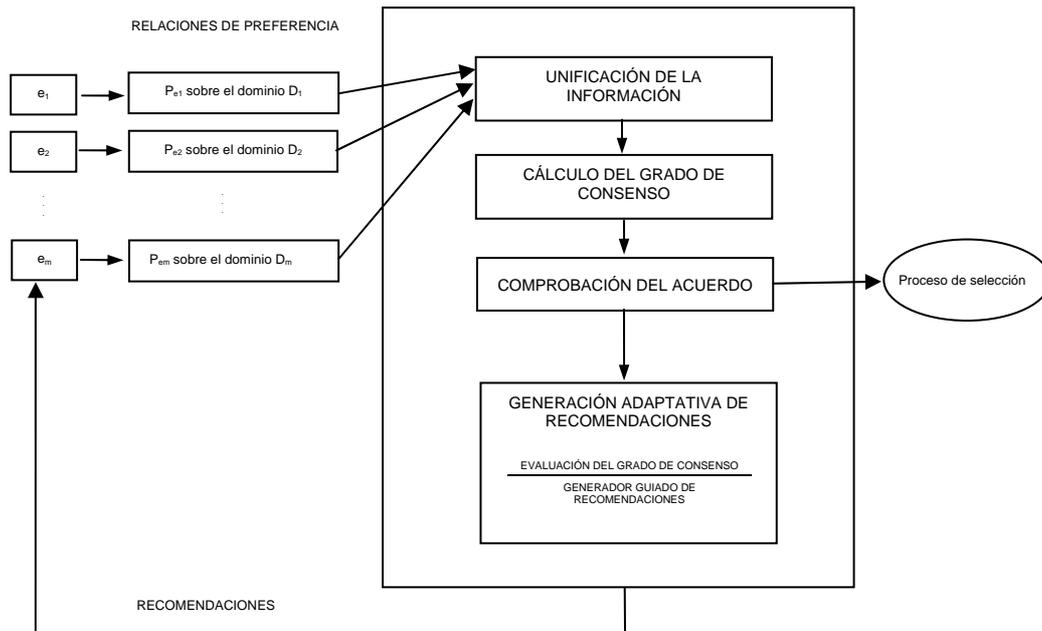
El hecho de utilizar diferentes criterios para buscar las preferencias a cambiar puede interpretarse como una optimización del proceso de consenso con el cual se consiguen tres objetivos:

- i) Aumentar la velocidad de convergencia hacia el nivel de acuerdo buscado.
- ii) Reducir el número de rondas necesarias para alcanzarlo.
- iii) Disminuir el número de cambios de preferencias en las rondas finales del proceso de consenso.

Las fases propuestas para este modelo de SAC adaptativo (al que llamaremos SACA) son las siguientes (Figura 5):

1. *Unificación de la información.* En esta fase, al igual que en el modelo propuesto en la sección 3, las preferencias heterogéneas de los expertos se unifican en un único dominio.
2. *Cálculo del grado de consenso.* En esta fase se calcula el grado de consenso entre los expertos. De forma similar al modelo propuesto en la sección 3, se define una función de similaridad para calcular la coincidencia entre las preferencias de los expertos.
3. *Comprobación del acuerdo.* En esta fase el SACA controla el nivel de acuerdo conseguido entre los expertos. Si el acuerdo es mayor que un umbral de consenso especificado ( $\gamma$ ) entonces el proceso de consenso debe parar y se aplicará el proceso de selección para obtener la solución del problema. En otro caso, en la siguiente ronda deben modificarse las preferencias de los expertos.

4. *Generación adaptativa de recomendaciones.* Para ayudar a los expertos a cambiar sus preferencias, el SACA genera un conjunto de recomendaciones dirigidas, que pueden ser distintas en función del grado de consenso obtenido.



**Figura 5.** Modelo de SAC Adaptativo para problemas de TDG con información heterogénea

Como puede comprobarse, las tres primeras fases son similares al modelo de SAC propuesto en la sección 3, por lo que en esta sección nos centraremos en la descripción de la cuarta fase (Generación Adaptativa de Recomendaciones).

El nuevo modelo se caracteriza por proponer tres procesos diferentes para llevar a cabo la búsqueda de las preferencias que el sistema recomendará cambiar a los expertos. La ejecución de cada uno de estos procesos dependerá del grado de consenso alcanzado en cada una de las rondas de consenso y devolverá un conjunto diferente de preferencias.

La descripción básica de estos tres procesos es la siguiente:

- Generación de recomendaciones cuando el acuerdo está muy lejano.* Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso es bajo. Identifica los pares de alternativas en los que no hay suficiente consenso y recomienda a todos los expertos (sin excepción) que las cambien.
- Generación de recomendaciones cuando el acuerdo es medio.* Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso toma un valor que se considera intermedio. Identifica las alternativas y pares de alternativas pertenecientes a estas alternativas en las que no hay suficiente consenso. recomienda que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en dichas alternativas se encuentren más alejados de la opinión colectiva del grupo de expertos.

c) *Generación de recomendaciones cuando el acuerdo está próximo.* Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso es alto y está cercano al umbral de consenso buscado. Identifica las alternativas y pares de alternativas en las que no hay suficiente consenso y recomienda que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esas alternativas y pares concretos se encuentren más alejados de la opinión colectiva.

Cada uno de estos procesos realiza un análisis del consenso desde un punto de vista diferente, vinculándolo a los tres niveles de representación de la información en las relaciones de preferencia, de forma que:

- Cuando el acuerdo esté muy lejano, se analizará el consenso a nivel de pares de alternativas.
- Cuando el acuerdo sea medio, se analizará el consenso a nivel de alternativas.
- Cuando el acuerdo esté próximo, se analizará el consenso a nivel de expertos.

#### **4.1. Descripción del modelo**

Como se ha dicho, el propósito del modelo de SACA es optimizar el proceso de consenso en problemas de TDG definidos en cualquier dominio, de ahí que lo hayamos utilizado para perfeccionar el modelo de SAC presentado en la sección 3, y así tratar de mejorar su comportamiento. La optimización se consigue mejorando el ritmo de convergencia hacia el consenso y reduciendo el número de rondas necesarias para alcanzar el consenso. También se consigue reducir el número de cambios de preferencias cuando el acuerdo está próximo. El modelo está compuesto por las cuatro fases, de las cuales las tres primeras son similares a las expuestas en el modelo anterior, y por lo tanto no les dedicaremos más atención. En cambio la cuarta fase es diferente, y será explicada con detalle en los siguientes apartados.

#### **4.2. Generación adaptativa de recomendaciones**

Esta fase es la que imprime un carácter adaptativo al modelo al ajustar el proceso de búsqueda de preferencias a cambiar el grado de consenso existente en cada ronda de consenso. Si el grado de consenso es bajo significa que existen bastantes discrepancias entre las preferencias de los expertos y por lo tanto estos deberán acometer muchos cambios para acercar sus opiniones. Sin embargo, si el grado de consenso es alto significa que existe bastante coincidencia entre sus opiniones y por lo tanto sólo los expertos más discrepantes deberán cambiar sus opiniones.

La idea de disminuir el número de cambios conforme el nivel de acuerdo se va incrementando la hemos recogido desarrollando tres procedimientos de búsqueda de preferencias a modificar (PBp) diferentes. Estos tres procedimientos desarrollan las ideas de los procesos descritos al principio de la sección. Cada PBp se ejecutará dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda.

Las operaciones de esta fase se agrupan en dos tareas principales.

1. *Elección del PBp más apropiado.* El modelo de SACA establece una serie de condiciones en las que se tiene en cuenta el grado de consenso general alcanzado en

la ronda actual  $cr$  y dos umbrales de consenso  $\theta_1$  y  $\theta_2$  utilizados para diferenciar tres posibles situaciones en las que se encuentra el acuerdo: muy lejano, lejano y próximo. El algoritmo que implementa estas condiciones se muestra en la Figura 6. Los umbrales de consenso  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son acordados por los expertos y dependerán del tipo de problema que se esté abordando.

```

inputs:  $cr, \theta_1, \theta_2$ 
begin
  if  $cr \leq \theta_1$  then
    Ejecutar PBp cuando el grado de
    consenso es bajo
  else if  $cr \leq \theta_2$  then
    Ejecutar PBp cuando el grado de
    consenso es medio
  else
    Ejecutar PBp cuando el grado de
    consenso es alto
  end-if
End

```

Figura 6. Algoritmo para la selección del PBp.

2. *Ejecución del PBp.* Según el grado de consenso  $cr$  el modelo recomendará ejecutar uno de los tres PBps. Cada PBp analiza el consenso desde un punto de vista diferente:

- El PBp cuando el grado de consenso es bajo analiza el consenso desde el punto de vista de los pares de alternativas.
- El PBp cuando el grado de consenso es medio analiza el consenso desde el punto de vista de las alternativas.
- El PBp cuando el grado de consenso es alto analiza el consenso desde el punto de vista de las relaciones de preferencia de los expertos.

Además, para cada experto  $e_i$ , cada PBp devuelve un conjunto de preferencias a cambiar que llamaremos respectivamente  $PREFECH_i^B$ ,  $PREFECH_i^M$  y  $PREFECH_i^A$ .

El modelo recomendará cambiar las preferencias contenidas en estos conjuntos sugiriendo la dirección en la que se han de hacer los cambios para conseguir aproximar las preferencias y aumentar el acuerdo en la siguiente ronda de consenso.

En las siguientes subsecciones se describen las características y el funcionamiento de cada uno de estos procedimientos.

#### 4.2.1. PBp cuando el grado de consenso es bajo

El modelo de SACA lleva a cabo este procedimiento en situaciones en las que el grado de consenso es considerado como bajo y el acuerdo está aún muy lejano, es decir  $cr \leq \theta_1$ .

El propósito de este procedimiento es identificar los pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  en los que existe menor grado de consenso y proponer que todos los expertos cambien dichos pares. El resultado de este procedimiento es el conjunto de preferencias de cada experto  $e_i$  deberá cambiar para la siguiente ronda de consenso y que hemos convenido en llamar  $PREFECH_i^B$ . Todos los expertos deberían ser afectados por los cambios.

Para buscar las preferencias a cambiar este procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. *Identificación de los pares de alternativas en los que no hay consenso.* A partir de la matriz de consenso  $CM$ , y teniendo en cuenta que

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k$$

Se identifican todos los pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  en los que el grado de consenso es menor que un determinado umbral de consenso  $\rho$  definido a nivel de pares, dando origen al conjunto  $P$ :

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \rho, l, k = 1, \dots, n\}$$

El valor de este umbral  $\rho$  puede ser estático y fijado antes de comenzar el proceso de consenso o bien dinámico y que se vaya actualizando y adaptando al nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda. Si se opta por la primera opción es necesario prestar mucha atención al valor que se le asigne porque un valor demasiado alto puede implicar que los expertos tengan que cambiar todas sus preferencias mientras que un valor demasiado bajo puede implicar no hacer apenas cambios, situaciones ambas no deseables. En caso de optar por un valor dinámico, una buena alternativa sería considerar como umbral de consenso la media aritmética del consenso a nivel de pares de alternativas,  $\rho = \overline{cp^{lk}}$ .

2. *Obtención del conjunto de alternativas a cambiar.* Se obtiene el conjunto de preferencias que el sistema recomendará cambiar a todos los expertos  $e_i \in E$ , sin excepción:

$$PREFECH_i^B = \{(l, k) \mid (l, k) \in P\}, \forall e_i \in E$$

#### 4.2.2. PBp cuando el grado de consenso es medio

El modelo propone ejecutar este procedimiento en situaciones en las que el acuerdo está todavía lejano y el grado de consenso ha alcanzado un valor intermedio, es decir,  $\theta_1 < cr \leq \theta_2$ .

Antes de llegar a esta situación podemos suponer que ya se han realizado una o varias rondas de consenso en las que todos los expertos han cambiado sus preferencias y han acercado sus opiniones.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas  $x_l$  y pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  pertenecientes a estas alternativas en las que no hay suficiente consenso y proponer que sean cambiadas sólo por los expertos con menor proximidad al acuerdo colectivo en las mismas.

El resultado de este procedimiento es el conjunto de preferencias que cada experto  $e_i$  deberá cambiar en la siguiente ronda de consenso, y que llamaremos  $PREFECH_i^M$ , como convenimos. Sólo los expertos más alejados en las alternativas en desacuerdo se verían afectados por los cambios.

Para identificar los expertos y las preferencias a cambiar, el procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. *Identificación de las alternativas en las que no hay consenso.* A partir de la matriz de consenso  $CM$ , se obtienen todos los grados de consenso a nivel de pares de alternativas

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k$$

y se calculan los grados de consenso a nivel de alternativas:

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1}$$

Se identifican las alternativas en las que el grado de consenso es menor que el umbral de consenso  $\rho$ . Al igual que en el procedimiento anterior, el umbral puede ser un valor fijo o un valor dinámico. Una buena alternativa de umbral dinámico podría ser el valor medio del grado de consenso a nivel de alternativas,  $\rho = \overline{ca^l}$ .

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \rho\}.$$

2. *Identificación de los pares de alternativas en los que no hay consenso.* Se identifican los pares pertenecientes a estas alternativas en las que no hay consenso,

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \rho\}.$$

3. *Identificación de los expertos que deben cambiar sus preferencias.* A continuación hay que identificar los expertos que deben cambiar sus preferencias. Utilizando la matriz de proximidad de cada experto  $PM_i$ ,

$$PM_i = \begin{pmatrix} pm_i^{11} & \dots & pm_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pm_i^{n1} & \dots & pm_i^{nn} \end{pmatrix}$$

Y teniendo en cuenta que la proximidad a nivel de pares coincide con la posición  $(l, k)$  de  $PM_i$ ,

$$pp_i^{lk} = pm_i^{lk}, \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k.$$

Se calcula la proximidad de cada experto a nivel de alternativas de las alternativas donde no hay consenso,

$$\{pa_i^l \mid pa_i^l = \frac{\sum_{i=1, k \neq l}^m pp_i^{lk}}{n-1}, l \in X^{ch}\}, \forall e_i \in E.$$

4. *Obtención de las preferencias a modificar.* Finalmente, obtenemos el conjunto de preferencias que cada experto debe cambiar según la siguiente expresión:

$$PREFECH_i^M = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \overline{pa}^l\}.$$

Teniendo en cuenta las nuevas restricciones que afectan al número de preferencias y número de expertos a cambiar, es fácil comprobar que la cardinalidad de este conjunto es menor o igual que el obtenido cuando el grado de consenso es bajo, es decir,  $\#(\bigcup_i PREFECH_i^M) \leq \#(\bigcup_i PREFECH_i^B)$ .

### 4.2.3. PBp cuando el grado de consenso es alto

Este procedimiento se ejecuta en situaciones en las que el acuerdo está próximo y por lo tanto el grado de consenso está cercano al umbral de consenso  $\gamma$  considerado para que el modelo finalice el proceso de consenso, es decir  $\theta_2 < cr < \gamma$ .

Llegado este punto, un número relativamente pequeño de cambios de opinión puede hacer que se alcance el consenso en la siguiente ronda. Esto se consigue añadiendo una nueva restricción a las ya existentes en el procedimiento anterior cuyo resultado es la deducción del número de expertos que han de cambiar sus preferencias.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas  $x_l$  y pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  en los que no existe suficiente consenso y proponer que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esos pares se encuentren más alejados. Este procedimiento se centra por tanto en los expertos, y los expertos afectados serían precisamente aquellos más alejados en cuanto a pares de alternativas y alternativas en desacuerdo.

Para conseguir su propósito lleva a cabo los siguientes pasos:

1. Realiza las mismas operaciones numeradas del 1-3 descritas en el PBp cuando el grado de consenso es medio.
2. *Selección de los expertos más alejados.* El modelo calcula el umbral de proximidad  $\overline{pp}^{lk}$  utilizado para seleccionar los expertos más alejados en los pares de alternativas en las que no hay consenso,

$$\{\overline{pp}^{lk} \mid \overline{pp}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m pp_i^{lk}}{m}, (l, k) \in P\}.$$

Siendo  $pp_i^{lk} = pm_i^{lk}$ .

Utilizando como umbrales de proximidad los valores  $\beta_1^l = \overline{pp}^l$  y  $\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk}$ , el procedimiento recomendará que cambien sus preferencias aquellos expertos cuya proximidad a nivel de alternativas y a nivel de pares en los que no hay consenso sea inferior a la media, es decir,

$$pa_i^l < \overline{pa}^l \wedge pp_i^{lk} < \overline{pp}^{lk}.$$

3. *Obtención de los conjuntos de preferencias a modificar.* Finalmente se obtiene para cada experto el conjunto de preferencias a cambiar,  $PREFECH_i^A$ ,

$$PREFECH_i^A = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \beta_1^l \wedge pp_i^{lk} < \beta_2^{lk}\}.$$

Con esta nueva condición se puede comprobar que  $\#(\bigcup_i PREFECH_i^A) \leq \#(\bigcup_i PREFECH_i^M)$ , y dado que  $\#(\bigcup_i PREFECH_i^M) \leq \#(\bigcup_i PREFECH_i^B)$ , podemos asumir que nuestra propuesta adapta su funcionamiento al grado de consenso existente en cada momento, reduciendo el número de cambios conforme el grado de consenso va aumentando.

#### 4.2.4. Generación adaptativa de recomendaciones

Para conseguir que en cada nueva ronda de consenso el acuerdo entre los expertos sea mayor y el número de cambios a realizar por los expertos menor, es necesario que estos cambien sus preferencias más alejadas en la dirección correcta. En caso contrario, si los cambios se realizan de forma arbitraria, el modelo de SACA no puede garantizar el grado de consenso mejor.

Al igual que ocurría con su predecesor, el mecanismo contemplado en la fase de generación de recomendaciones del modelo adaptativo tiene como propósito generar una serie de recomendaciones en las que se sugiere a los expertos la dirección en la que han de cambiar las preferencias obtenidas por los PBps, con el objetivo de aproximar las preferencias más alejadas y así mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda.

##### 4.2.4.1. Reglas de Dirección.

El nuevo modelo adaptativo no se diferencia de su predecesor a la hora de decidir la dirección en que los expertos han de cambiar sus preferencias. Al igual que antes, las reglas de dirección comparan los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. El resultado de esta comparación

será recomendar incrementar o decrementar las valoraciones individuales dadas por los expertos para acercarlas a las valoraciones colectivas.

Recordemos, no obstante cuales eran tales reglas:

**DR.1.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) < 0$ , el experto  $e_i$  debería incrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

**DR.2.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) > 0$ , el experto  $e_i$  debería decrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

**DR.3.** Si  $(cv_i^{lk} - cv_c^{lk}) = 0$ , el experto  $e_i$  no modificará la valoración dada al par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

### 4.3. Ejemplo de Aplicación del modelo de SAC Adaptativo

En la sección 3.5 estudiamos un ejemplo para ilustrar el funcionamiento de un modelo de consenso no adaptativo en un problema de toma de decisión real relacionado con la investigación histórica. En esta sección se volverá a reproducir el proceso de consenso, pero aplicando el modelo de SACA presentado a lo largo de la presente sección.

Recordemos que inicialmente las opiniones de los expertos expresadas mediante relaciones de preferencia eran estas:

$$\mathbf{P}_{e_1} = \begin{pmatrix} - & .9 & .1 & .1 \\ .1 & - & .9 & .2 \\ .8 & .1 & - & .4 \\ .9 & .9 & .8 & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & MB & MB & M \\ MA & - & MA & MA \\ N & MB & - & B \\ M & MB & N & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{e_3} = \begin{pmatrix} - & [.85,.95] & [.8,.95] & [.5,.65] \\ [.2,.35] & - & [.2,.3] & [.85,1] \\ [.3,.35] & [.8,9] & - & [.8,.1] \\ [.3,.4] & [.2,.4] & [.8,.9] & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_4} = \begin{pmatrix} - & B & A & MA \\ A & - & M & MB \\ B & M & - & A \\ MB & A & B & - \end{pmatrix}$$

Así mismo, antes de poner en marcha el proceso sería conveniente fijar los parámetros necesarios:

- El umbral de consenso mínimo deseado para dar por finalizado el proceso de consenso,  $\gamma = 0.8$ .

- Respecto a los dos umbrales de consenso  $\theta_1$  y  $\theta_2$  utilizados para diferenciar las tres situaciones de consenso, consideraremos que el grado de consenso es bajo si  $cr$  es inferior a  $\theta_1 = 0.6$ , medio si es inferior a  $\theta_2 = 0.7$  y alto si es superior a este último.
- Así mismo fijaremos un umbral estático de consenso para identificar alternativas y/o pares de alternativas en las que el consenso es bajo en  $\rho = 0.8$ .
- Finalmente, estableceremos el número máximo de rondas de consenso en  $Max\_rondas = 10$ .

## PRIMERA RONDA

### 1. Unificación de la información

Procederemos de la misma forma que en la aplicación del modelo de SAC no adaptativo estudiado en la Sección 3, es decir, una vez que se ha elegido un  $S_T$  apropiado (en nuestro caso el conjunto de etiquetas usado por  $e_2$  y  $e_4$  para expresar sus preferencias), el modelo aplicará diferentes funciones de transformación  $\tau_{DS_T}$  para transformar cada preferencia de experto en un conjunto difuso definido sobre  $S_T$ , obteniendo los siguientes conjuntos difusos:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & (0,0,0,0,.59,.41) & (41,.59,0,0,0,0) & (41,.59,0,0,0,0) \\ (41,.59,0,0,0,0) & - & (0,0,0,0,.59,.41) & (0,.81,19,0,0,0) \\ (0,0,0,0,.19,.81) & (41,.59,0,0,0,0) & - & (0,0,.59,41,0,0) \\ (0,0,0,0,.59,.41) & (0,0,0,0,.59,.41) & (0,0,0,0,.19,.81) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_2} = \begin{pmatrix} - & (0,1,0,0,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) \\ (0,0,0,0,0,1) & - & (0,0,0,0,1,0) & (0,0,0,0,1,0) \\ (1,0,0,0,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & - & (0,0,1,0,0,0) \\ (0,0,0,1,0,0) & (0,1,0,0,0,0) & (1,0,0,0,0,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_3} = \begin{pmatrix} - & (0,0,0,0,.88,.71) & (0,0,0,0,.19,1,71) & (0,0,0,1,.88,0) \\ (0,.81,1,12,0,0) & - & (0,.81,81,0,0,0) & (0,0,0,0,.88,1) \\ (0,.19,1,12,0,0) & (0,0,0,0,.19,1,41) & - & (0,0,0,0,.19,1,41) \\ (0,.19,1,41,0,0) & (0,.81,1,12,0,0) & (0,0,0,0,.19,1,41) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_4} = \begin{pmatrix} - & (0,0,1,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) & (0,0,0,0,1,0) \\ (0,0,0,0,1,0) & - & (0,0,0,1,0,0) & (0,1,0,0,0,0) \\ (0,0,1,0,0,0) & (0,0,0,1,0,0) & - & (0,0,0,0,1,0) \\ (0,1,0,0,0,0) & (0,0,0,0,1,0) & (0,0,1,0,0,0) & - \end{pmatrix}$$

## 2. Cálculo del grado de consenso

1. *Valores centrales.* Aplicando (2), el modelo calcula los valores centrales de los conjuntos difusos:

$$cv(e_1) = \begin{pmatrix} - & 5.41 & 0.59 & 0.59 \\ 0.59 & - & 5.41 & 1.19 \\ 4.81 & 0.59 & - & 2.41 \\ 5.41 & 5.41 & 4.81 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_2) = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 3 \\ 5 & - & 5 & 5 \\ 0 & 1 & - & 2 \\ 3 & 1 & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$cv(e_3) = \begin{pmatrix} - & 5.45 & 5.27 & 3.47 \\ 1.64 & - & 1.50 & 5.53 \\ 1.95 & 5.14 & - & 5.37 \\ 2.14 & 1.64 & 5.14 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_4) = \begin{pmatrix} - & 2 & 4 & 5 \\ 4 & - & 3 & 1 \\ 2 & 3 & - & 4 \\ 1 & 4 & 2 & - \end{pmatrix}$$

2. *Matrices de similitud.* El modelo calcula una matriz de similitud entre cada par de expertos usando la función distancia (1):

$$SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.27 & 0.93 & 0.60 \\ 0.27 & - & 0.93 & 0.37 \\ 0.20 & 0.93 & - & 0.93 \\ 0.60 & 0.27 & 0.20 & - \end{pmatrix} \quad SM_{13} = \begin{pmatrix} - & 0.99 & 0.22 & 0.52 \\ 0.82 & - & 0.35 & 0.28 \\ 0.52 & 0.24 & - & 0.55 \\ 0.45 & 0.37 & 0.95 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{14} = \begin{pmatrix} - & 0.43 & 0.43 & 0.27 \\ 0.43 & - & 0.60 & 0.97 \\ 0.53 & 0.60 & - & 0.74 \\ 0.27 & 0.77 & 0.53 & - \end{pmatrix} \quad SM_{23} = \begin{pmatrix} - & 0.26 & 0.29 & 0.92 \\ 0.44 & - & 0.42 & 0.91 \\ 0.68 & 0.31 & - & 0.48 \\ 0.86 & 0.89 & 0.14 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{24} = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.50 & 0.67 \\ 0.83 & - & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.67 & - & 0.67 \\ 0.67 & 0.50 & 0.67 & - \end{pmatrix} \quad SM_{34} = \begin{pmatrix} - & 0.43 & 0.79 & 0.74 \\ 0.61 & - & 0.75 & 0.24 \\ 0.99 & 0.64 & - & 0.81 \\ 0.81 & 0.61 & 0.48 & - \end{pmatrix}$$

3. *Matriz de consenso.* El modelo calcula la matriz de consenso agregando las matrices de similitud:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.53 & 0.53 & 0.62 \\ 0.57 & - & 0.62 & 0.52 \\ 0.60 & 0.57 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.57 & 0.49 & - \end{pmatrix}$$

4. *Grados de consenso.* El modelo calcula el grado de consenso a diferentes niveles:  
 Nivel 1. Consenso sobre pares de alternativas. El elemento  $(l, k)$  de CM representa el grado de consenso sobre el par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

Nivel 2. Consenso sobre alternativas.

$$ca^1 = 0.56 \quad ca^2 = 0.57, \quad ca^3 = 0.62, \quad ca^4 = 0.56$$

Nivel 3. Consenso sobre las relaciones o consenso global.

$$cr = 0.58$$

Como era de esperar, el grado de consenso en la primera ronda es el mismo en ambos modelos, puesto que las preferencias iniciales de los expertos son las mismas.

### **3. Comprobación del acuerdo**

El sistema lleva a cabo el control del grado de consenso alcanzado comparando el grado de consenso general  $cr = 0.58$  con el umbral de consenso  $\gamma = 0.8$ . Comprobamos que  $cr < \gamma$ , por tanto el acuerdo actual está aún muy lejos de ser suficiente como para dar por finalizado el proceso de consenso, debiendo pasar a la siguiente fase.

### **4. Generación adaptativa de recomendaciones**

En esta fase el modelo procede a seleccionar las preferencias que recomendará cambiar a cada experto. Esta búsqueda e identificación de preferencias se realiza ejecutando uno de los tres posibles procedimientos de búsqueda de preferencias a modificar. La elección del procedimiento depende del grado de consenso alcanzado en esta primera ronda.

#### **4.1. Elección del PBp más apropiado**

Teniendo en cuenta que el algoritmo descrito en la Sección 4.2, y que el grado de consenso a nivel de relaciones es  $cr = 0.58 \leq \theta_1 = 0.60$ , el modelo adaptativo considera que el nivel de acuerdo alcanzado en esta primera ronda es bajo, y que el acuerdo está muy lejano, recomendando ejecutar el PBp para situaciones con bajo grado de consenso.

#### **4.2 Ejecución del PBp cuando el grado de consenso es bajo**

El objetivo de este procedimiento es identificar los pares de alternativas  $(x_j, x_k)$  en los que el consenso no es suficiente y recomendar que todos los expertos los cambien. Para hacer esto el modelo realiza las operaciones descritas para este procedimiento.

Identificación de las preferencias en las que no existe suficiente consenso. A partir de la matriz de consenso

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.53 & 0.53 & 0.62 \\ 0.57 & - & 0.62 & 0.52 \\ 0.60 & 0.57 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.57 & 0.49 & - \end{pmatrix}$$

se identifican los pares tales que:

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \rho, l, k = 1, \dots, n\}$$

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < 0.8\}$$

$$P = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

A continuación se obtiene el conjunto de pares de alternativas a cambiar por todos los expertos. El sistema recomendará a todos los expertos sin excepción que cambien las valoraciones asociadas a este conjunto de pares de alternativas.

$$PREFECH_i^B = \{(l, k) \mid (l, k) \in P\}, \forall e_i \in E$$

$$PREFECH_i^B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}, \\ \forall e_i \in E$$

### 4.3 Generación guiada de recomendaciones

En esta fase el modelo recomienda la dirección que deben seguir los expertos a la hora de modificar sus preferencias en la primera ronda de consenso. Dado que el modelo puede calcular los valores centrales de las preferencias individuales y colectivas, estamos ya en disposición de aplicar las reglas de dirección, por tanto:

- Según la regla DR1, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las preferencias de la forma que se indica a continuación:

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow p_1^{13}, p_1^{14}, p_1^{21}, p_1^{24}, p_1^{32}, p_1^{34} \\ e_2 &\rightarrow p_2^{12}, p_2^{13}, p_2^{14}, p_2^{31}, p_2^{32}, p_2^{34}, p_2^{42}, p_2^{43} \\ e_3 &\rightarrow p_3^{21}, p_3^{23}, p_3^{31}, p_3^{41}, p_3^{42} \\ e_4 &\rightarrow p_4^{12}, p_4^{23}, p_4^{24}, p_4^{31}, p_4^{41}, p_4^{43} \end{aligned}$$

- Y según la regla DR2, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las preferencias:

$$\begin{aligned} e_1 &\rightarrow p_1^{12}, p_1^{23}, p_1^{31}, p_1^{41}, p_1^{42}, p_1^{43} \\ e_2 &\rightarrow p_2^{21}, p_2^{23}, p_2^{24}, p_2^{41} \\ e_3 &\rightarrow p_3^{12}, p_3^{13}, p_3^{14}, p_3^{24}, p_3^{32}, p_3^{34}, p_3^{43} \\ e_4 &\rightarrow p_4^{13}, p_4^{14}, p_4^{21}, p_4^{32}, p_4^{34}, p_4^{42} \end{aligned}$$

## SEGUNDA RONDA

Todos los expertos cambiarán sus preferencias siguiendo las recomendaciones sugeridas por el modelo, dando lugar a las siguientes relaciones de preferencia:

$$\mathbf{P}_{e_1} = \begin{pmatrix} - & .8 & .2 & .2 \\ .2 & - & .8 & .3 \\ .7 & .2 & - & .5 \\ .8 & .8 & .7 & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & B & B & A \\ A & - & A & A \\ MB & B & - & M \\ B & B & MB & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{e_3} = \begin{pmatrix} - & [.75,.85] & [.7,.85] & [.4,.55] \\ [.3,.45] & - & [.3,.4] & [.75,.9] \\ [.4,.45] & [.7,.8] & - & [.7,.8] \\ [.4,.5] & [.3,.45] & [.7,.8] & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & M & M & A \\ M & - & A & B \\ M & B & - & M \\ B & M & M & - \end{pmatrix}$$

### 1. Unificación de la información

Omitiremos este proceso en esta y en sucesivas rondas, ya que quedó suficientemente ilustrado en la ronda anterior y en la descripción del modelo no adaptativo descrito en la Sección 3.

### 2. Cálculo del grado de consenso

1. *Valores centrales.* De la misma forma que en la ronda anterior, el modelo calcula los valores centrales de los conjuntos difusos:

$$cv(e_1) = \begin{pmatrix} - & 4.81 & 1.19 & 1.19 \\ 1.19 & - & 4.81 & 1.81 \\ 4.19 & 1.19 & - & 3 \\ 4.81 & 4.81 & 4.19 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_2) = \begin{pmatrix} - & 2 & 2 & 4 \\ 4 & - & 4 & 4 \\ 1 & 2 & - & 3 \\ 2 & 2 & 1 & - \end{pmatrix}$$

$$cv(e_3) = \begin{pmatrix} - & 4.77 & 4.64 & 2.84 \\ 2.27 & - & 2.14 & 4.95 \\ 2.55 & 4.50 & - & 4.50 \\ 2.63 & 2.27 & 4.50 & - \end{pmatrix} \quad cv(e_2) = \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & 4 \\ 3 & - & 4 & 2 \\ 3 & 2 & - & 3 \\ 2 & 3 & 3 & - \end{pmatrix}$$

2. *Matrices de similaridad y matriz de consenso.* A través de las matrices de similaridad, el modelo obtiene la matriz de consenso mediante agregación de las mismas:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.72 & 0.68 & 0.73 \\ 0.75 & - & 0.78 & 0.68 \\ 0.72 & 0.72 & - & 0.88 \\ 0.75 & 0.75 & 0.68 & - \end{pmatrix}$$

3. *Grados de consenso.* Al igual que en la ronda anterior, el modelo calcula el grado de consenso a diferentes niveles:

Nivel 1. Consenso sobre pares de alternativas. El elemento  $(l, k)$  de CM representa el grado de consenso sobre el par de alternativas  $(x_l, x_k)$ .

Nivel 2. Consenso sobre alternativas.

$$ca^1 = 0.71 \quad ca^2 = 0.74, \quad ca^3 = 0.77, \quad ca^4 = 0.72$$

Nivel 3. Consenso sobre las relaciones o consenso global.

$$cr = 0.74$$

Como puede comprobarse, ya en la segunda ronda hemos alcanzado un grado de consenso muy superior a la segunda ronda del modelo no adaptativo, donde se consiguió un  $cr = 0.66$ .

### 3. *Comprobación del acuerdo*

El grado de consenso general aún es menor que el umbral de consenso, es decir,  $cr = 0.74 < \gamma = 0.8$ . Como aún no se ha alcanzado el acuerdo suficiente para dar por terminado el proceso, el modelo ha de continuar con la siguiente fase.

### 4. *Generación adaptativa de recomendaciones*

Como en la primera ronda, ahora ejecutamos uno de los tres posibles procedimientos de búsqueda de preferencias a modificar.

#### 4.1. *Elección del PBp más apropiado*

Teniendo en cuenta que el grado de consenso a nivel de relaciones es  $\theta_2 \leq cr \leq \gamma$ , el modelo adaptativo considera que el nivel de acuerdo alcanzado en esta segunda ronda es alto, y que el acuerdo está próximo, recomendando ejecutar el PBp para situaciones con un alto grado de consenso.

#### 4.2 Ejecución del PBp cuando el grado de consenso es alto

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas  $x_l$  y pares de alternativas  $(x_l, x_k)$  en los que no existe suficiente consenso y proponer que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esos pares se encuentren más alejados. Este procedimiento se centra por tanto en los expertos, y los expertos afectados serían precisamente aquellos más alejados en cuanto a pares de alternativas y alternativas en desacuerdo, procediendo como sigue:

1. *Identificación de las alternativas en las que no hay consenso.* A partir de los grados de consenso a nivel de alternativas ya calculados,

$$ca^1 = 0.71 \quad ca^2 = 0.74, \quad ca^3 = 0.77, \quad ca^4 = 0.72$$

Se identificación de las alternativas en las que no existe suficiente consenso.

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \rho\}$$

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < 0.80\}$$

$$X^{ch} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Identificación de pares de alternativas en los que no hay consenso.

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \rho\}.$$

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < 0.80\}$$

$$P = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

2. *Identificación de los expertos que deben cambiar sus preferencias.* Calculamos la proximidad de las alternativas que pertenecen a  $X^{ch}$  para cada uno de los expertos. Para ello necesitamos calcular las matrices de proximidad de cada experto (omitidas aquí) para, a partir de las mismas calcular la proximidad de cada alternativa en  $X^{ch}$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$pa_1^1 = 0.74$	$pa_1^2 = 0.76$	$pa_1^3 = 0.80$	$pa_1^4 = 0.74$
$pa_2^1 = 0.78$	$pa_2^2 = 0.87$	$pa_2^3 = 0.84$	$pa_2^4 = 0.77$
$pa_3^1 = 0.85$	$pa_3^2 = 0.83$	$pa_3^3 = 0.84$	$pa_3^4 = 0.89$
$pa_4^1 = 0.90$	$pa_4^2 = 0.86$	$pa_4^3 = 0.91$	$pa_4^4 = 0.93$

A partir de estos datos calculamos del umbral de proximidad  $\beta_1^l$  utilizado para seleccionar a nivel de cada alternativa  $x_l$  a los expertos más alejados.

$$\{\beta_1^l = \overline{pa}^l \mid \overline{pa}^l = \frac{\sum_{i=1}^m pa_i^l}{m}, l \in X^{ch}\}$$

$$\overline{pa}^1 = 0.82, \overline{pa}^2 = 0.83, \overline{pa}^3 = 0.85, \overline{pa}^4 = 0.83$$

3. *Selección de los expertos más alejados a nivel de pares de alternativas.* Calculamos el umbral de proximidad  $\beta_2^{lk}$  utilizado para seleccionar a nivel de pares de alternativas los expertos más alejados y por lo tanto los que deben cambiar sus preferencias. A partir de las matrices individuales de proximidad  $PM_i$ , se calcula la media aritmética de la proximidad de cada par de alternativas  $(x_l, x_k)$ ,

$$\{\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk} \mid \overline{pp}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m pp_i^{lk}}{m}, (l, k) \in P\}.$$

Obteniendo los siguientes valores:

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} - & 0.81 & 0.81 & 0.85 \\ 0.85 & - & 0.84 & 0.79 \\ 0.85 & 0.79 & - & 0.84 \\ 0.83 & 0.86 & 0.80 & - \end{pmatrix}$$

**Nota:** hemos elegido la representación matricial por ser más clara y compacta. En esta matriz el elemento  $a_{lk}$  se corresponde con el umbral de proximidad  $\beta_2^{lk}$ .

4. *Obtención de los conjuntos de preferencias a cambiar.* Finalmente se obtiene para cada experto el conjunto de preferencias a cambiar,  $PREFECH_i^A$ ,

$$PREFECH_i^A = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \beta_1^l \wedge pp_i^{lk} < \beta_2^{lk}\}.$$

Obteniendo los conjuntos de preferencias a cambiar por cada experto:

$$PREFECH_1^A = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}.$$

$$PREFECH_2^A = \{(1,2), (3,1), (4,3)\}.$$

$$PREFECH_3^A = \{(2,3), (2,4), (3,2)\}$$

$$PREFECH_4^A = \phi$$

### 4.3 Generación guiada de recomendaciones

Al igual que en rondas anteriores, en esta fase el modelo recomienda la dirección que deben seguir los expertos a la hora de modificar sus preferencias en esta tercera ronda, a partir de las preferencias individuales y colectivas:

- Según la regla DR1, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las preferencias de la forma que se indica a continuación:

$$e_1 \rightarrow p_1^{13}, p_1^{14}, p_1^{21}, p_1^{24}, p_1^{32}$$

$$e_2 \rightarrow p_2^{12}, p_2^{31}, p_2^{43}$$

$$e_3 \rightarrow p_2^{23}$$

- Y según la regla DR2, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las preferencias:

$$e_1 \rightarrow p_1^{23}, p_1^{31}, p_1^{41}, p_1^{42}$$

$$e_3 \rightarrow p_3^{23}, p_3^{32}$$

### TERCERA RONDA

Los expertos  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  cambian sus preferencias en la tercera ronda, siguiendo las recomendaciones sugeridas por el modelo, dando lugar a las nuevas relaciones de preferencia (se omiten las de aquellos expertos que no cambian):

$$\mathbf{P}_{e_1} = \begin{pmatrix} - & .8 & .3 & .3 \\ .3 & - & .7 & .4 \\ .6 & .3 & - & .5 \\ .8 & .7 & .7 & - \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{e_2} = \begin{pmatrix} - & M & B & A \\ A & - & A & A \\ B & B & - & M \\ B & B & B & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{e_3} = \begin{pmatrix} - & [.75,.85] & [.7,.85] & [.4,.55] \\ [.3,.45] & - & [.4,.5] & [.65,.8] \\ [.4,.45] & [.6,.7] & - & [.7,.8] \\ [.4,.5] & [.3,.45] & [.7,.8] & - \end{pmatrix}$$

### ***1. Unificación de la información***

Nuevamente omitiremos este proceso, por quedar claro en rondas anteriores.

### ***2. Cálculo del grado de consenso***

Resumiremos este apartado aportando únicamente los datos de mayor interés, como la matriz de consenso:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.80 & 0.74 & 0.79 \\ 0.80 & - & 0.87 & 0.76 \\ 0.85 & 0.83 & - & 0.88 \\ 0.80 & 0.80 & 0.76 & - \end{pmatrix}$$

Los grados de consenso sobre alternativas:

$$ca^1 = 0.77 \quad ca^2 = 0.81, \quad ca^3 = 0.85, \quad ca^4 = 0.79$$

Y el consenso sobre las relaciones o consenso global.

$$cr = 0.81$$

### ***3. Comprobación del acuerdo***

Comprobamos que tras tres rondas obtenemos un nivel de acuerdo satisfactorio, ya que se cumple que  $cr \geq \gamma = 0.80$ . Por tanto el modelo de SAC Adaptativo indica que se ha alcanzado el consenso buscado, poniendo fin al proceso para dar paso al proceso de selección.

## 5. Resumen de resultados

En la Tabla 2 aparecen los resultados más significativos que describen el comportamiento de ambos modelos en lo referente al número de rondas, grado de consenso alcanzado y número de cambios realizados en cada ronda.

Como puede observarse, el modelo adaptativo consigue mejorar el ritmo de convergencia hacia el consenso al incrementar rápidamente el consenso en las primeras rondas.

	Modelo de SAC Adaptativo	Modelo de SAC no adaptativo
Nº Rondas	3	5
1ª Ronda	$cr = 0.58$ , cambios=48	$cr = 0.58$ , cambios=22
2ª Ronda	$cr = 0.74$ , cambios=15	$cr = 0.66$ , cambios=15
3ª Ronda	$cr = 0.81$	$cr = 0.73$ , cambios=11
4ª Ronda		$cr = 0.76$ , cambios=8
5ª Ronda		$cr = 0.81$

Tabla 2. Resumen de resultados de la aplicación de ambos modelos.

En lo que respecta al número de cambios, también se produce una mejora significativa, reduciendo el número de cambios de preferencia en aquellas situaciones en las que se considera que el acuerdo está próximo. Esta afirmación no es tan evidente en el ejemplo que nos ocupa, que sólo pretende ilustrar sobre el funcionamiento de ambos modelos. Pruebas más contundentes realizadas sobre un caso de estudio con cuatro alternativas y ocho expertos arrojaron los resultados expuestos en la Tabla 3.

	Modelo de SAC Adaptativo <small>(<math>\gamma = 0.75, \theta_1 = 0.65, \theta_2 = 0.72, Max\_rondas = 10</math>)</small>	Modelo de SAC no adaptativo <small>(<math>\gamma = 0.75, \beta = 0.8, ne = 50\%, Max\_rondas = 10</math>)</small>
Nº Rondas	3	4
1ª Ronda	$cr = 0.634$ , cambios=56	$cr = 0.634$ , cambios=36
2ª Ronda	$cr = 0.730$ , cambios=17	$cr = 0.703$ , cambios=28
3ª Ronda	$cr = 0.770$	$cr = 0.749$ , cambios=6
4ª Ronda		$cr = 0.759$

Tabla 3. Resultados obtenidos por ambos modelos sobre otro caso de estudio con 4 alternativas y 8 expertos



## 6. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo hemos propuesto un modelo de SAC para automatizar procesos de consenso en problemas de TDG con información heterogénea. Este modelo es capaz de llevar a cabo procesos de consenso donde los expertos expresan sus preferencias usando diferentes dominios de información (numéricos, intervalares y lingüísticos). El comportamiento del modelo es uniforme, independientemente del acuerdo alcanzado en cada ronda de discusión, por lo que para optimizar el proceso de búsqueda del consenso se le ha dotado con la capacidad de ser adaptativo, creando un nuevo modelo al que hemos llamado SACA (SAC Adaptativo), en el que los cambios sugeridos a los expertos están en función del grado de acuerdo alcanzado en cada ronda de discusión. Al principio del proceso el número de cambios sugeridos es mayor, puesto que el consenso está aún lejano, pero a medida que los expertos van aproximando sus preferencias, el número de cambios necesarios se va decrementando en cada ronda, llegando a ser más reducido en las rondas finales cuando el acuerdo es inminente.

Para ello se han definido tres procedimientos para buscar las preferencias y los expertos que deben variar su posición, dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda. Dependiendo de este, se ejecutará un procedimiento diferente, con lo que el modelo adapta su funcionamiento al nivel de acuerdo existente en cada momento, mejorando la velocidad de convergencia hacia el consenso y reduciendo el número de rondas necesarias.

Como trabajo futuro quedaría la aplicación práctica del modelo, no sólo en los campos donde tradicionalmente se han venido usando modelos de Toma de Decisiones en Grupo (mayoritariamente en el ámbito empresarial), sino también en cualesquiera otros donde se necesite obtener un consenso que de otra forma (por el número de expertos involucrados o por la complejidad del problema) sería difícil de conseguir. Con respecto a esto, Internet ofrece interesantísimas posibilidades aún por explorar.

Otra posibilidad interesante podría estar en el enriquecimiento del modelo con nuevas características derivadas de los procesos de la vida real, como el hecho de que la opinión de algunos expertos pueda ser más relevante que la de otros, o la discriminación de expertos que no sigan las recomendaciones del modelo.



## Anexo A. Cursos de Doctorado.

El período de docencia de este aspirante fue realizado durante el año académico 2005/2006, en el programa de doctorado “Métodos y Técnicas Avanzadas de Desarrollo de Software”, siendo coordinadores del mismo D. Juan Ruiz de Miras y D. Manuel Capel Muñón, dotado con la mención de calidad y de carácter interuniversitario entre las universidades de Granada y Jaén.

Pasamos a enumerar y describir brevemente los cursos realizados en dicho período:

- **Técnicas Avanzadas de Modelado de Sólidos.** Este curso fue impartido por los profesores Francisco R. Feito Higuera (uja), Juan Carlos Torres Cantero (ugr) y Robert Joan Ariño (ugr). Entre otras cosas, en él se mostró una visión general sobre los fundamentos del modelado de sólidos, incluyendo sistemas de modelado, técnicas de simplificación de superficies trianguladas y representaciones a alto nivel, como el modelado basado en restricciones. En síntesis, los conocimientos adquiridos versan sobre la búsqueda del mejor sistema de representación de sólidos, curvas y superficies, y del modelado de sólidos a través de mallas de triángulos, y sobre el uso de modelos jerárquicos multiresolución.
- **Bases de datos Federadas y Almacenes de datos.** Impartido por José Samos Jiménez (ugr) y por Cecilia Delgado Negrete (ugr), en este curso se estudiaron las bases de datos federadas, con sus características y su arquitectura, procesos y optimización de consultas, seguridad, transacciones y productos. En la parte de almacenes de datos estudiamos la extracción e integración de información, modelos multidimensionales, etc.
- **Integración de la Información en la Web Semántica.** Curso impartido por José Samos Jiménez (ugr) y Manuel Torres Gil (ual). Se estudió la Web Semántica, su finalidad y las expectativas de futuro, así como las tecnologías relacionadas (XML, RDF, etc.), ontologías relacionadas y su integración.
- **Modelado Geométrico.** Impartido por Juan Ruiz de Miras (uja), Rafael Segura (uja) y María Linarejos Rivero Cejudo (uja), en este curso se estudiaron nociones básicas relacionadas con el modelado geométrico para después pasar a ver diversos tipos de modelado, como el aproximativo, o por recubrimientos simpliciales. También se vieron técnicas de modelado de curvas y superficies.
- **Visualización y Animación.** Este curso fue impartido por Domingo Martín Perandres (ugr) y Jorge Revelles moreno (ugr). Se vieron las principales líneas de investigación del Grupo de Informática Gráfica de Granada, conceptos sobre visualización expresiva (detección de siluetas, elementos estéticos, elementos expresivos, etc.) y sobre visualización realista (trazado de rayos, optimizaciones en el cálculo de la intersección rayo-escena, medidas de eficacia, y representaciones espaciales eficientes, etc.).
- **Tecnologías del Lenguaje.** Impartido por José María Guirao Miras (ugr), Ramón López Cózar (ugr) y Teresa Martín Valdivia (uja). Se estudió el estado del arte en este tipo de tecnologías desde varios puntos de vista: procesamiento del lenguaje

natural, métodos estadísticos para el PLN, y tecnologías del habla y sistemas de diálogo.

- **Integración de Técnicas Hipermedia y de Visualización Gráfica en Sistemas Inteligentes.** Impartido por los profesores D<sup>a</sup> Lina Guadalupe García Cabrera (uja), Luis Martínez López (uja) y Antonio J. Rueda Ruiz (uja). Los contenidos versaron sobre los siguientes temas: Introducción a los Sistemas Inteligentes (Sistemas de Agentes, Sistemas Multi-Agente, Aplicaciones en Internet) , Tecnologías Hipermedia (Modelos de Adaptación, Modelos de Navegación, Modelos Adaptativos según la estructura del Conocimiento), Interfaces y Visualización Avanzada en Entornos Web (Interfaces de Usuario, Visualización Avanzada).

## Anexo B. Publicaciones.

A continuación incluimos la comunicación presentada (y aceptada) a la próxima edición del Congreso Español de Informática (CEDI 2007) que se celebrará en Zaragoza del 11 al 14 de Septiembre de 2007, donde presentaremos el Modelo de Apoyo al Consenso descrito en la Sección 4 de esta memoria. El documento puede descargarse desde <http://www.loscerros.org/~jcmartinez/cedi2007.pdf>

### Un Sistema de Apoyo al consenso Adaptativo para Problemas de Toma de Decisiones en Grupo con Información Heterogénea

J.C. Martínez, L. Martínez, F. Mata  
Dep. De Informática, Universidad de Jaén

E. Herrera-Viedma  
Dep. De Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada

**Resumen.** Los procesos de consenso se utilizan en problemas de toma de decisión en grupo (TDG) para conseguir que los expertos aproximen sus opiniones antes de obtener la solución a un problema. En este tipo de problemas en los que intervienen varios expertos, éstos pueden proceder de ambientes de investigación diferentes y por lo tanto expresar sus preferencias mediante dominios de información distintos. Además es frecuente que inicialmente las preferencias de los expertos sean muy diferentes y conforme transcurre el proceso de consenso éstas se vayan acercando. En esta contribución presentamos un modelo de sistema de apoyo al consenso adaptativo para problemas de TDG definidos en contextos heterogéneos, donde los expertos expresan sus preferencias por medio de valoraciones numéricas, lingüísticas o intervalares. Recibe el calificativo de adaptativo puesto que es capaz de adaptar el proceso de búsqueda del consenso al nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda de consenso.

#### 1. Introducción

En la literatura podemos ver numerosas propuestas para resolver problemas de decisión donde los expertos usan el mismo dominio de información para expresar sus preferencias [5, 7, 9]. Sin embargo, en muchas ocasiones puede resultar aconsejable que los expertos expresen sus opiniones mediante diferentes dominios más acordes con su área de conocimiento o con la naturaleza de las alternativas. Por ejemplo, en el campo de la arqueología es frecuente encontrar expertos con diferentes ámbitos de conocimiento (toponimia, numismática, epigrafía,...), y estos pueden preferir expresar sus opiniones usando un dominio de información más cercano a sus

campos de investigación. Además, en un problema de decisión podemos tratar con alternativas cuya naturaleza es cuantitativa y que admiten valoraciones precisas [9, 11], y otras en las que debido a la existencia de incertidumbre o imprecisión, valoraciones intervalares [8, 10] o lingüísticas [5] podrían ser más apropiadas. En estas situaciones, podemos decir que el problema de decisión está definido en un contexto heterogéneo.

Tradicionalmente los problemas de TDG han sido resueltos mediante procesos de selección donde los expertos obtienen el mejor conjunto de alternativas a partir de las preferencias expresadas por ellos mismos [5, 7, 9]. Sin embargo puede ocurrir que algunos expertos consideren que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución, y por tanto pueden estar en desacuerdo con ella. Para evitar esta situación, es recomendable llevar a cabo un proceso de consenso (Figura 1) donde los expertos discuten y cambian sus preferencias para alcanzar un acuerdo suficiente antes de tomar una decisión.

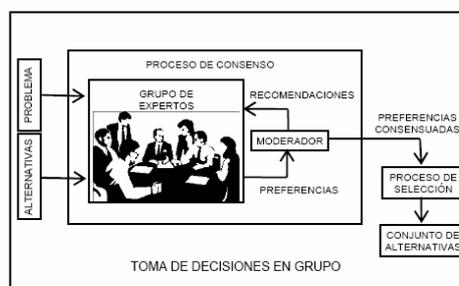


Figura 1. Proceso de resolución en un problema de TDG

En un problema de TDG, inicialmente las preferencias de estos suelen ser bastante diferentes

y por tanto el grado de consenso bajo. En esta situación es lógico pensar que los expertos deberían cambiar muchas de sus preferencias con el propósito de acercar sus opiniones. Conforme se van desarrollando las diferentes rondas de consenso el grado de acuerdo se irá incrementando consiguiéndose finalmente alcanzar el acuerdo deseado. Por tanto, se puede deducir que el número de cambios podría estar relacionado con el grado de consenso obtenido hasta ese momento. Esto significa que el proceso de búsqueda de consenso ha de cambiar conforme el grado de consenso vaya mejorando. Esta característica, a la que podemos llamar adaptatividad, supone una optimización del proceso, ya que i) aumenta la velocidad de convergencia hacia el nivel de acuerdo buscado, ii) reduce el número de rondas necesarias para alcanzarlo y iii) disminuye el número de cambios de preferencias en las rondas finales del proceso de consenso.

Diferentes métodos se han propuesto en la literatura para trabajar con procesos de selección en TDG [2]. También se han propuesto modelos para procesos de consenso [4, 3], pero ninguno de ellos aborda el problema de trabajar con información de distinta naturaleza.

En esta contribución proponemos un modelo de consenso para problemas de TDG definidos en contextos heterogéneos, que adapta el proceso de búsqueda del consenso al nivel de acuerdo existente en cada ronda de consenso.

El trabajo se estructura como sigue. Inicialmente, introduciremos los problemas de TDG definidos sobre contextos heterogéneos en la Sección 2. En la sección 3 describimos el funcionamiento del modelo, y en la sección 4 damos a conocer nuestras conclusiones y posibles trabajos futuros.

## 2. Consideraciones previas

Los problemas de TDG son situaciones de decisión en las que dos o más individuos o expertos  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $m \geq 2$ ), expresan sus preferencias sobre un conjunto de alternativas,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 2$ ), para obtener una solución (una alternativa o conjunto de alternativas). Dependiendo de la naturaleza o del conocimiento sobre las alternativas, los expertos

pueden expresar sus preferencias usando diferentes enfoques.

En contextos difusos, las preferencias de los expertos se expresan frecuentemente por medio de relaciones de preferencia difusas [7]. Una relación de preferencia puede definirse como una matriz  $\mathbf{P}_{e_i} \subset X \times X$ , donde el valor  $\mu_{P_{e_i}}(x_l, x_k) = p_i^{lk}$  se interpreta como el grado de preferencia de la alternativa  $x_l$  sobre  $x_k$  expresada por  $e_i$ .

A continuación revisaremos tres representaciones usadas frecuentemente para la expresión de preferencias.

### 2.1. Relaciones de preferencia binarias difusas.

Una relación binaria difusa  $R$  sobre  $X$  se define como un subconjunto difuso del producto cartesiano  $X \times X$ , es decir,  $R : X \times X \rightarrow [0,1]$ .

El valor,  $R(x_l, x_k) = p^{lk}$  indica el grado en el que una alternativa  $x_l$  se prefiere a la alternativa  $x_k$ .

### 2.2. Relaciones de preferencia intervalares.

Las relaciones de preferencia intervalares  $R : X \times X \rightarrow I([0,1])$  surgen con el propósito de añadir alguna flexibilidad al problema de representación de la incertidumbre.

En este enfoque [8, 10], las preferencias proporcionadas por los expertos son intervalos definidos sobre  $I([0,1])$ , donde la preferencia se expresa como  $[\underline{a}, \bar{a}]^{lk}$ , con  $\underline{a} \leq \bar{a}$ .

### 2.3. Relaciones de preferencia lingüísticas difusas.

Una relación de preferencia lingüística difusa se define como:  $R : X \times X \rightarrow S$ , siendo  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de etiquetas.

Hay situaciones en las que puede ser mejor usar valoraciones lingüísticas en lugar de valores numéricos para calificar aspectos o atributos de un problema. El enfoque lingüístico difuso representa la información como valores lingüísticos por medio de variables lingüísticas [12].

Para esto tenemos que elegir los descriptores lingüísticos apropiados para el conjunto de términos y su semántica. Una posibilidad es suministrar directamente el conjunto de términos lingüísticos considerando que todos los términos están distribuidos en una escala en la que está definido un orden total [3]. Por ejemplo, un conjunto de siete términos  $S$ , puede darse como:

$$S = \{s_0 = \text{Nulo}, s_1 = \text{Muy Bajo}, s_2 = \text{Bajo},$$

$$s_3 = \text{Medio}, s_4 = \text{Alto}, s_5 = \text{Muy Alto}, s_6 = \text{Perfecto}\}$$

La semántica de los términos se da mediante números difusos, definidos en el intervalo  $[0,1]$ .

Una forma de caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de sus funciones de pertenencia [1] (Figura 2).

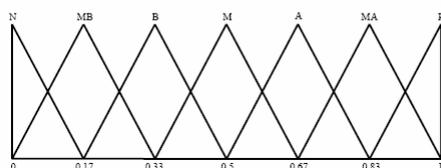


Figura 2. Conjunto de 7 etiquetas con su semántica asociada.

Por tanto un valor  $R(x_j, x_k)$  en la relación de preferencia expresaría el grado de preferencia lingüística de la alternativa  $x_j$  sobre  $x_k$ .

#### 2.4. Problemas de TDG definidos en contextos heterogéneos

La situación ideal en un problema TDG es que todos los expertos tengan un conocimiento extenso sobre las alternativas y proporcionen sus opiniones en una escala numérica precisa. Sin embargo, en algunos casos, los expertos pueden pertenecer a distintas áreas de investigación y tener diferentes niveles de conocimiento sobre las alternativas. Debido a esto, los expertos pueden preferir expresar sus preferencias utilizando dominios de información diferentes. En estos casos, podemos considerar que el problema está definido en un contexto heterogéneo.

En este trabajo tratamos los problemas de TDG heterogéneos, donde los expertos expresan sus preferencias usando diferentes dominios de expresión (numéricos, intervalares o

lingüísticos)  $D_i \in \{N | I | L\}$ . Cada experto expresa sus opiniones por medio de una relación de preferencia difusa,  $\mathbf{P}_{e_i}$ , definida sobre un único dominio de expresión.:

$$\mathbf{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \dots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ p_i^{n1} & \dots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

donde  $p_i^{lk} \in D_i$  representa la preferencia de la alternativa  $x_l$  sobre la alternativa  $x_k$  dada por el experto  $e_i$ .

### 3. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo para problemas TDG con información heterogénea

En esta sección presentamos el modelo de sistema de apoyo al consenso adaptativo (SACA) para problemas TDG con información heterogénea. Este modelo tiene tres características principales:

1. Es capaz de llevar a cabo el proceso consenso en problemas TDG en contextos heterogéneos con valoraciones numéricas, intervalares y lingüísticas.
2. Incluye un generador de recomendaciones que asume el papel del moderador y recomienda cambios a las preferencias de los expertos con el fin de obtener un alto grado de consenso.
3. Se comporta de forma diferente según el grado de consenso alcanzado en cada una de las rondas que componen el proceso de consenso.

El modelo se compone de las siguientes fases:

1. *Unificación de la información.* En esta fase, las preferencias heterogéneas de los expertos se unifican en un único dominio.
2. *Cálculo del grado de consenso.* En esta fase se calcula el grado de consenso entre los expertos.
3. *Comprobación del acuerdo.* En esta fase el SACA controla el nivel de acuerdo conseguido entre los expertos.
4. *Generación adaptativa de recomendaciones.* Para ayudar a los expertos a cambiar sus preferencias, el SACA genera un conjunto de recomendaciones donde se indica la dirección en la que los expertos deben cambiar sus preferencias para incrementar el consenso.

### 3.1. Unificación de la información

Considerando que estamos trabajando en contextos heterogéneos con información numérica, intervalar y lingüística, y como no hay operadores estándares para manipular directamente información heterogénea, necesitamos unificarla en un dominio común que llamaremos conjunto básico de términos lingüísticos (CBTL),  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$

(Figura 3).

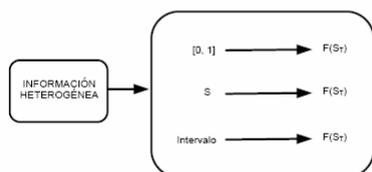


Figura 3. El proceso de unificación de información heterogénea

Para llevar a cabo esta unificación, utilizamos funciones de transformación que transforman cada valor de preferencia numérica, intervalar y lingüística en un conjunto difuso  $F(S_T)$ , definido sobre el CBLT. A continuación presentamos brevemente tales funciones, encontrándose en [6] una descripción más detallada de las mismas.

#### Transformación de valores numéricos en $[0,1]$ en $F(S_T)$ .

Sea  $\vartheta$  un valor numérico,  $\vartheta \in [0,1]$ , y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  el CBTL. La función  $\tau_{NS_T}$  que transforma  $\vartheta$  en un conjunto difuso sobre  $S_T$  se define como:

$$\tau_{NS_T}(\vartheta) = \{(s_0, \gamma_0), \dots, (s_g, \gamma_g)\}, s_i \in S_T \text{ y } \gamma_i \in [0,1]$$

$$\tau_{NS_T}: [0,1] \rightarrow F(S_T)$$

$$\gamma_i = \mu(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \vartheta \notin \text{Soporte}(\mu_i(x)) \\ \frac{\vartheta - a_i}{b_i - a_i}, & \text{si } a_i \leq \vartheta \leq b_i \\ 1, & \text{si } b_i \leq \vartheta \leq d_i \\ \frac{c_i - \vartheta}{c_i - d_i}, & \text{si } d_i \leq \vartheta \leq c_i \end{cases}$$

Utilizaremos funciones de pertenencia triangulares ( $b_i=d_i$ ) para representar las etiquetas lingüísticas  $s_i \in S_T$ .

#### Transformación de valores intervalares en $F(S_T)$

Sea  $I = [\underline{l}, \bar{l}]$  un intervalo en  $[0,1]$  y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  el CBTL. La función  $\tau_{IS_T}$  que transforma el intervalo  $I$  en un conjunto difuso sobre  $S_T$  se define como:

$$\tau_{IS_T}: I \rightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{IS_T}(I) = \{(s_k, \gamma_k^I) / k \in \{0, \dots, g\}\}$$

$$\gamma_k^I = \max_y \min\{\mu_l(y), \mu_{s_k}(y)\}$$

donde  $\mu_l(\cdot)$  y  $\mu_{s_k}(\cdot)$  son las funciones de pertenencia asociadas con el intervalo  $I$  y el término  $s_k$  respectivamente.

#### Transformación de términos lingüísticos en $F(S_T)$

Sea  $S = \{l_0, \dots, l_p\}$  y  $S_T = \{s_0, \dots, s_g\}$  dos conjuntos de términos lingüísticos tal que  $g \geq p$ . La función  $\tau_{SS_T}$  que transforma los  $l_i \in S$  en conjuntos difusos sobre  $S_T$  se define como:

$$\tau_{SS_T}: S \rightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{SS_T}(l_i) = \{(s_k, \gamma_k^i) / k \in \{0, \dots, g\}\}, \forall l_i \in S$$

$$\gamma_k^i = \max_y \min\{\mu_{l_i}(y), \mu_{s_k}(y)\}$$

donde  $\mu_{l_i}(\cdot)$  y  $\mu_{s_k}(\cdot)$  son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos asociados al término  $l_i$  y  $s_k$  respectivamente.

Una vez que hemos realizado el proceso de unificación, las preferencias de cada experto podrán representarse mediante una matriz de conjuntos difusos,  $\tilde{\mathbf{P}}_{e_i}$ :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{e_i} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_{i0}^{11}, \dots, \alpha_{ig}^{11}) & \dots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_{i0}^{1n}, \dots, \alpha_{ig}^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_{i0}^{n1}, \dots, \alpha_{ig}^{n1}) & \dots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_{i0}^{nn}, \dots, \alpha_{ig}^{nn}) \end{pmatrix}$$

### 3.2. Cálculo del grado de consenso

El grado de consenso evalúa el nivel de acuerdo entre los expertos. Para calcular el nivel de acuerdo es necesario calcular una matriz de consenso que representa las preferencias de todos

los expertos y que se obtiene agregando las distancias entre las preferencias de los expertos. Dado que la información con la que trabajamos son conjuntos difusos, la similaridad entre dos preferencias  $\tilde{p}_i^{lk}$  y  $\tilde{p}_j^{lk}$  se calcula por medio de la función de similaridad  $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$  [4] medida en el intervalo unitario  $[0, 1]$ :

$$s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk}) = 1 - \left| \frac{cv_i^{lk} - cv_j^{lk}}{g} \right| \quad (1)$$

El valor  $cv_i^{lk}$  es el valor central del conjunto difuso:

$$cv_i^{lk} = \frac{\sum_{h=0}^g \text{index}(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}} \quad (2)$$

siendo  $\text{index}(s_h^i) = h$ . El rango de este valor central es el intervalo cerrado  $[0, g]$ .

El grado de consenso se calcula mediante los siguientes pasos:

1. Se calculan los valores centrales de todos los conjuntos difusos:

$$cv_i^{lk}; \forall i = 1, \dots, m; l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k. \quad (3)$$

2. Para cada pareja de expertos  $e_i$  y  $e_j$  ( $i < j$ ), se calcula una matriz de similaridad  $SM_{ij} = (sm_{ij}^{lk})$ , donde  $sm_{ij}^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$

3. Finalmente, se obtiene una *matriz de consenso*  $CM$ , agregando a nivel de pares de alternativas todas las matrices de similaridad.

$$CM = \begin{pmatrix} cm^{11} & \dots & cm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cm^{n1} & \dots & cm^{nn} \end{pmatrix}$$

En nuestro caso, usamos la media aritmética como función de agregación  $\phi$ , aunque podrían usarse diferentes operadores de agregación, de acuerdo con las propiedades particulares que se quieran implementar.

A partir de la matriz de consenso, podemos analizar el grado de consenso a tres niveles diferentes: pares de alternativas, alternativas y relaciones.

Nivel 1. *Consenso sobre pares de alternativas.*

Evalúa el consenso en cada par de

alternativas  $(x_l, x_k)$ , coincidiendo con los valores de la matriz de de consenso  $CM$ ,

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \forall l, k = 1, \dots, n \wedge l \neq k.$$

Nivel 2. *Consenso sobre alternativas.* Evalúa el grado de consenso sobre una alternativa  $x_l$ ,

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1} \quad (4)$$

Nivel 3. *Consenso sobre relaciones o consenso global.* Evalúa el grado de consenso total entre las preferencias de todos los expertos,

$$cr = \frac{\sum_{l=1}^n ca^l}{n} \quad (5)$$

El SACA usa este valor para comprobar el nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda de consenso.

### 3.3. Comprobación del acuerdo alcanzado

En esta fase el SACA controla el nivel de acuerdo alcanzado en la actual ronda de consenso. Antes de aplicar el modelo de SACA, debe ser fijado un umbral mínimo de consenso,  $\gamma \in [0, 1]$ , que dependerá del problema particular con el que estemos tratando. En cualquier caso, independientemente del valor  $\gamma$ , cuando el consenso global  $cr$  alcanza el valor  $\gamma$ , el SACA se detendrá y se aplicará el proceso de selección para obtener la solución. Sin embargo, existe la posibilidad de que el consenso global no converja al umbral de consenso y el proceso quede bloqueado. Con objeto de evitar esta circunstancia, el modelo incorpora un parámetro, para limitar el número de rondas de consenso a realizar.

### 3.4. Generación adaptativa de recomendaciones

Esta fase es la que imprime el carácter adaptativo al modelo al ajustar el proceso de búsqueda de preferencias a cambiar al grado de consenso existente en cada ronda de consenso. Si el grado de acuerdo no es suficiente, los expertos deben cambiar sus opiniones para aproximarlas. Para ello el SACA recomienda la dirección de los cambios de preferencia que los expertos deberían

seguir para incrementar el grado de acuerdo. El número de cambios dependerá del nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda, llevándose a cabo tres procedimientos para buscar las preferencias a cambiar (PBp). Cada procedimiento se ejecutará dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda.

Las operaciones de esta fase se agrupan en dos tareas principales.

1. *Elección del PBp más apropiado.* El modelo establece una serie de condiciones en las que se tiene en cuenta el grado de consenso general alcanzado en la ronda actual y dos umbrales de consenso  $\theta_1$  y  $\theta_2$  ( acordados por los expertos y que dependerán del tipo de problema) utilizados para diferenciar tres posibles situaciones del nivel de consenso: bajo, medio y alto. El algoritmo que implementa estas condiciones se muestra en la Figura 4.

```

inputs:  $cr, \theta_1, \theta_2$ 
begin
    if  $cr \leq \theta_1$  then
        Ejecutar PBp Bajo
    else if  $cr \leq \theta_2$  then
        Ejecutar PBp Medio
    else
        Ejecutar PBp Alto
    end-if
End
    
```

Figura 4. Algoritmo para la selección del PBp.

2. *Ejecución del PBp.* Según el grado de consenso  $CR$ , el modelo ejecutará uno de los tres PBps.

El resultado de la ejecución de cada procedimiento es el conjunto de preferencias que cada experto  $i$ , deberá cambiar en la siguiente ronda de consenso, que llamaremos respectivamente  $PREFECH_i^B, PREFECH_i^M$  y  $PREFECH_i^A$ .

A continuación se describen las características y el funcionamiento de cada procedimiento, PBp.

#### PBp cuando el grado de consenso es bajo

El SACA lleva a cabo este procedimiento en situaciones en las que el grado de consenso es

considerado como bajo y el acuerdo está aún muy lejano, es decir  $cr \leq \theta_1$ .

El propósito de este procedimiento es identificar a partir de la matriz de consenso, los pares de alternativas donde no existe suficiente consenso y recomendar que todos los expertos sin excepción cambien dichos pares,

$$PREFECH_i^B = \{(l, k) | \overline{cp}^{lk} < \overline{cp}, l, k = 1, \dots, n\}, \forall e_i \in E$$

Utilizamos  $\overline{cp}$  como un umbral de consenso dinámico que se actualiza en cada ronda y que recomendará cambiar aproximadamente la mitad de las preferencias de los expertos.

#### PBp cuando el grado de consenso es medio

El SACA ejecuta este procedimiento cuando,  $\theta_1 < cr \leq \theta_2$ , es decir, se considera que el nivel de consenso ha mejorado pero todavía el acuerdo está lejano.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas  $x_i$  y pares de alternativas

$(x_i, x_k)$  pertenecientes a estas alternativas en las que no hay suficiente consenso y proponer que sean cambiadas sólo por los expertos con menos proximidad en tales alternativas. Para llevar a cabo esta selección, el modelo ha de calcular una *medida de proximidad*, que evalúa la distancia entre las preferencias de los expertos individuales y la preferencia colectiva. Para calcularla, primero necesitamos obtener una relación de preferencia colectiva  $\tilde{P}_c = (\tilde{p}_c^{11})$  que representa la opinión del grupo de expertos.  $\tilde{P}_c$  se calcula agregando el conjunto de relaciones de preferencia individuales unificadas  $\{\tilde{P}_{e_1}, \dots, \tilde{P}_{e_m}\}$ :

$$\tilde{p}_c^{ik} = \psi(\tilde{p}_1^{ik}, \dots, \tilde{p}_m^{ik}) = (\alpha_{c0}^{ik}, \dots, \alpha_{cg}^{ik})$$

donde

$$\alpha_{cj}^{ik} = \psi(\alpha_{1j}^{ik}, \dots, \alpha_{mj}^{ik})$$

Siendo  $\psi$  un “operador de agregación”, en este caso la media aritmética.

Una vez obtenida la relación de preferencia colectiva, se calcula la matriz de proximidad,  $PM_i = (pm_i^{lk})$ , para cada experto  $e_i$ , donde cada elemento se obtiene como:

7

J.C. Martínez, L. Martínez, F. Mata y E. Herrera-Viedma

$$pm_i^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_c^{lk})$$

Para identificar las preferencias a cambiar, el procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. Se calculan los grados de consenso a nivel de alternativas:

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1}$$

Se identifican las alternativas en las que el grado de consenso es menor que el umbral de consenso. Al igual que en el procedimiento anterior, utilizamos como umbral de consenso a nivel de alternativas  $\overline{ca}$ , definiendo el conjunto de alternativas a cambiar como:

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \overline{ca}\}.$$

2. Se identifican los pares pertenecientes a estas alternativas en las que no hay consenso,

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \overline{cp}\}.$$

3. A continuación hay que identificar los expertos que deben cambiar sus preferencias. Para ello se calcula la proximidad de cada experto a nivel de alternativas en aquellas alternativas en las que no hay suficiente consenso,

$$\{pa_i^l \mid pa_i^l = \frac{\sum_{i=1, k \neq l}^m pp_i^{lk}}{n-1}, l \in X^{ch}\}, \forall e_i \in E.$$

4. Finalmente, obtenemos el conjunto de preferencias que cada experto debe cambiar según la siguiente expresión:

$$PREFECH_i^M = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \overline{pa}^l\}.$$

Teniendo en cuenta las nuevas restricciones que afectan al número de preferencias y número de expertos a cambiar, es fácil comprobar que la cardinalidad de ambos conjuntos es diferente,

$$\#(\cup_i PREFECH_i^M) \leq \#(\cup_i PREFECH_i^B)$$

#### PBp cuando el grado de consenso es alto

Este procedimiento se ejecuta en situaciones en las que el acuerdo está próximo.  $\theta_2 < cr < \gamma$ .

Llegado este momento, un número pequeño de cambios de opinión puede hacer que se alcance el consenso en la siguiente ronda. Esto se

consigue añadiendo una nueva restricción a las ya existentes en el procedimiento anterior cuyo resultado es la reducción del número de expertos que han de cambiar sus preferencias.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas y pares de alternativas en los que no existe suficiente consenso y proponer que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esos pares se encuentren más alejados.

Para conseguir su propósito lleva a cabo los siguientes pasos:

1. Realiza las mismas operaciones numeradas del 1-4 descritas en el PBp cuando el grado de consenso es medio.

2. Calcula el umbral de proximidad  $\overline{pp}^{lk}$  para cada par de alternativas, utilizado para seleccionar los expertos más alejados en los pares de alternativas en las que no hay consenso,

$$\{\overline{pp}^{lk} \mid \overline{pp}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m pp_i^{lk}}{m}, (l, k) \in P\}.$$

siendo  $pp_i^{lk} = pm_i^{lk}$ .

Utilizando como umbrales de proximidad los valores  $\beta_1^l = \overline{pa}^l$  y  $\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk}$ , para cada experto se obtiene el conjunto de preferencias a cambiar,

$$PREFECH_i^A = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \beta_1^l \wedge pp_i^{lk} < \beta_2^{lk}\}.$$

Con esta nueva condición se puede comprobar que  $\#(\cup_i PREFECH_i^A) \leq \#(\cup_i PREFECH_i^M)$ ,

y dado que  $\#(\cup_i PREFECH_i^M) \leq \#(\cup_i PREFECH_i^B)$ , podemos asumir que nuestra

propuesta adapta su funcionamiento al grado de consenso existente en cada momento, reduciendo el número de cambios conforme el grado de consenso va aumentando.

#### 3.5 Generación adaptativa de recomendaciones

Para conseguir que en cada nueva ronda de consenso el acuerdo entre los expertos sea mayor, los expertos han de cambiar sus preferencias en la dirección correcta.

Para conseguir este objetivo, el modelo recomendará la dirección en la que los expertos

deben cambiar las preferencias obtenidas por los PBps. Para ello el modelo utiliza un conjunto de *reglas de dirección*, que comparan los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. Como resultado de esta comparación el modelo recomendará incrementar o decrementar las valoraciones individuales actuales dadas por los expertos.

Proponemos tres reglas de dirección:

DR.1. Si  $(cv_i^{jk} - cv_c^{jk}) < 0$ , el experto  $e_i$  debería incrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_i, x_k)$ .

DR.2. Si  $(cv_i^{jk} - cv_c^{jk}) > 0$ , el experto  $e_i$  debería decrementar la valoración dada al par de alternativas  $(x_i, x_k)$ .

DR.3. Si  $(cv_i^{jk} - cv_c^{jk}) = 0$ , el experto  $e_i$  no modificará la valoración dada al par de alternativas  $(x_i, x_k)$ .

#### 4. Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un modelo de SAC adaptativo para automatizar procesos de consenso en problemas de TDG con información heterogénea. Este modelo es capaz de llevar a cabo procesos de consenso donde los expertos expresan sus preferencias usando diferentes dominios de información (numéricos, intervalares y lingüísticos). La forma en la que se llevará a cabo la búsqueda del consenso dependerá del nivel de acuerdo existente en cada ronda de consenso. Para ello se han definido tres procedimientos diferentes para buscar las preferencias que los expertos deberían cambiar, dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda. De esta forma se consigue mejorar la convergencia hacia el consenso reduciendo el número de rondas necesarias para alcanzarlo.

#### Referencias

- [1] P. P. Bonissone and K. S. Decker, *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-Off Precision and Complexity*, North-Holland, 1986.
- [2] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma and L. Martínez, *Combining numerical and linguistic information in group decision making*, Information Sciences, 107 (1998), pp. 177-194.
- [3] P. Eklund, A. Rusinowska and H. Swart, *Consensus reaching in committees*, European Journal of Operational Research, 178 (2007).
- [4] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata and F. Chiclana, *A Consensus Support System Model for Group Decision-making Problems with Multi-granular Linguistic Preference Relations*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (2005), pp. 644-658
- [5] F. Herrera and E. Herrera-Viedma, *Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information*, Fuzzy Sets and Systems, 115 (2000), pp. 67-82.
- [6] F. Herrera, L. Martínez and P. J. Sánchez, *Managing Non-Homogeneous Information in Group Decision Making*, European Journal of Operational Research, 166 (2005), pp. 115-132.
- [7] J. Kacprzyk, *Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority*, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986), pp. 105-118.
- [8] S. Kundu, *Min-Transitivity of Fuzzy Leftness Relationship and Its Application to Decision Making*, Fuzzy Sets and Systems, 86 (1997), pp. 357-367.
- [9] s. h. C. S.H. Kim, and J.K. Kim., *An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information: Range-based approach.*, European Journal of Operational Research, 118 (1999), pp. 139-152.
- [10] J. F. L. Téno and B. Mareschal, *An Interval Version of PROMETHEE for the Comparison of Building Products' Design with Ill-Defined Data on Environmental Quality*, European Journal of Operational Research, 109 (1998), pp. 522-529.
- [11] R. R. Yager, *On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 18 (1988), pp. 183-190.
- [12] L. A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning*, Information Sciences, Part I, II, III, 8,8,9 (1975), pp. 199-249,301-357,43-80.

## Bibliografía

- [1] C. Alcalde, A. Burusco and R. Fuentes-González, *A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implications operators.*, Fuzzy Sets and Systems, 153 (2005), pp. 211-227.
- [2] P. P. Bonissone and K. S. Decker, *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-Off Precision and Complexity*, North-Holland, 1986.
- [3] G. Bordogna, M. Fedrizzi and G. Pasi, *A Linguistic Modeling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA Operators*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 27 (1997), pp. 126-132.
- [4] N. Bryson, *Group Decision Making and the Analytic Hierarchy Process: Exploring the Consensus-Relevant Information Content.*, Computers and Operational Research, 23 (1996), pp. 27-35.
- [5] T. X. Bui, *A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision-Making*, Springer-Verlag, 1987.
- [6] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkurjeva, T. Riissanen and A. G. S. Ventre, *Consensus in distributed soft environments.*, European Journal of Operational Research, 61 (1992), pp. 168-185.
- [7] C. Carlsson and R. Fuller, *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Studies in Fuzziness and Soft Computing Series 2001.
- [8] C. H. Cheng and Y. Lin, *Evaluating the Best Main Battle Tank Using Fuzzy Decision Theory with Linguistic Criteria Evaluation*, European Journal of Operational Research, 142 (2002), pp. 174-186.
- [9] R. Degani and G. Bortolan, *The Problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making*, International Journal of Approximate Reasoning, 2 (1988), pp. 143-162.
- [10] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma and L. Martínez, *Combining numerical and linguistic information in group decision making*, Information Sciences, 107 (1998), pp. 177-194.
- [11] M. Delgado, J. L. Verdegay and M. A. Vila, *Linguistic Decision Making Models*, International Journal of Intelligent Systems, 7 (1992), pp. 479-492.
- [12] J. Doyle, *Prospects for preferences*, Computational Intelligence, 20 (2004), pp. 111-136.
- [13] P. Eklund, A. Rusinowska and H. Swart, *Consensus reaching in committees*, European Journal of Operational Research, 178 (2007).
- [14] Z.-P. Fan, J. Ma and Q. Zhang, *An Approach to Multiple Attribute Decision Making Based on Fuzzy Preference Information Alternatives*, Fuzzy Sets and Systems, 131 (2002), pp. 101-106.
- [15] Z.-P. Fan, S.-H. Xiao and G.-F. Hu, *An optimization method for integrating two kinds of preference information in group decision-making*, Computers & Industrial Engineering, 46 (2004), pp. 329-335.
- [16] Z. P. Fan and X. Chen, *Consensus measures and adjusting inconsistency of linguistic preference relations y group decision making.*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 9613 (2005), pp. 130-139.
- [17] J. Fodor and M. Roubens, *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

- [18] E. Herrera-Viedma, F. Herrera and F. Chiclana, *A Consensus Model for Multiperson Decision Making with Different Preference Structures*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A, 32 (2002), pp. 394-402.
- [19] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata and F. Chiclana, *A Consensus Support System Model for Group Decision-making Problems with Multi-granular Linguistic Preference Relations*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (2005), pp. 644-658
- [20] E. Herrera-Viedma, F. Mata, L. Martinez, F. Chiclana and L. G. Perez, *Measurements of Consensus in Multi-granular Linguistic Group Decision Making*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 3131, 3131 (2004), pp. 194-204.
- [21] F. Herrera and E. Herrera-Viedma, *Linguistic Decision Analysis: Steps for Solving Decision Problems under Linguistic Information*, Fuzzy Sets and Systems, 115 (2000), pp. 67-82.
- [22] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J. L. Verdegay, *A model of consensus in group decision making under linguistic assessments*, Fuzzy Sets and Systems, 79 (1996), pp. 73-87.
- [23] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J. L. Verdegay, *A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment*, Information Sciences, 85 (1995), pp. 223-239.
- [24] F. Herrera and L. Martínez, *A Model Based on Linguistic 2-Tuples for Dealing with Multigranularity Hierarchical Linguistic Contexts in Multiexpert Decision-Making*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics, 31 (2001), pp. 227-234.
- [25] F. Herrera, L. Martinez and P. J. Sanchez, *Managing Heterogeneous Information in Group Decision Making*, *Proceedings Ninth International Conference IPMU 2002*, Annecy (France), 2002, pp. 439-446.
- [26] F. Herrera, L. Martínez and P. J. Sánchez, *Managing Non-Homogeneous Information in Group Decision Making*, European Journal of Operational Research, 166 (2005), pp. 115-132.
- [27] J. Kacprzyk, *Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority*, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986), pp. 105-118.
- [28] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, *A 'soft' measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences*, European Journal of Operational Research, 34 (1988), pp. 316-323.
- [29] J. Kacprzyk, H. Nurmi and M. Fedrizzi, *Consensus under Fuzziness*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [30] D. Kuchta, *Fuzzy Capital Budgeting*, Fuzzy Sets and Systems, 111 (2000), pp. 367-385.
- [31] S. Kundu, *Min-Transitivity of Fuzzy Leftness Relationship and Its Application to Decision Making*, Fuzzy Sets and Systems, 86 (1997), pp. 357-367.
- [32] L.I.Kuncheva, *Five measures of consensus in GDM using fuzzy sets*, *Proc. IFSA 91*, 1991, pp. 141-144.
- [33] H. M. Lee, *Generalization of the Group Decision Making Using Fuzzy Sets Theory for Evaluating the Rate of Aggregate Risk in Software Development*, Information Sciences, 113 (1999), pp. 301-311.
- [34] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier and J. Bremont, *Subjective Evaluation of Car Seat Comfort with Fuzzy Set Techniques*, International Journal of Intelligent Systems, 12 (1997), pp. 891-913.
- [35] D. Li and J. B. Yang, *A Multiattribute Decision Making Approach Using Intuitionistic Fuzzy Sets*, *Proceedings Eusflat 2003*, Zita, 2003, pp. 183-186.

- [36] Marimin, M. Umamo, I. Hatono and H. Tamura, *Linguistic labels for expressing fuzzy preference relation in fuzzy group decision making*, IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 28 (1998), pp. 205-218.
- [37] M. H. Rasmy, S. M. Lee, W. F. A. El-Wahed, A. M. Ragab and M. M. El-Sherbiny, *An Expert System for Multiobjective Decision Making: Application of Fuzzy Linguistic Preferences and Goal Programming*, Fuzzy Sets and Systems, 127 (2002), pp. 209-220.
- [38] M. Roubens, *Fuzzy Sets and Decision Analysis*, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997), pp. 199-206.
- [39] S.Zadrozny, *Consensus under Fuzziness*, in M. Fedrizzi, ed., Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 83-109.
- [40] S. Saint and J. R. Lawson, *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*, Jossey-Bass, San Francisco, 1994.
- [41] E. Szmidt and J. Kacprzyk, *A consensus reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations*, International Journal of Intelligent System, 18 (2003), pp. 837-852.
- [42] J. F. L. Téno and B. Mareschal, *An Interval Version of PROMETHEE for the Comparison of Building Products' Design with Ill-Defined Data on Environmental Quality*, European Journal of Operational Research, 109 (1998), pp. 522-529.
- [43] Z. S. Xu, *Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment* Information Sciences, 168 (2004), pp. 171-184.
- [44] R. R. Yager, *An Approach to Ordinal Decision Making*, International Journal of Approximate Reasoning, 12 (1995), pp. 237-261.
- [45] R. R. Yager, *Consensus Under Fuzziness*, Protocol for Negotiations among Multiple Intelligent Agents, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [46] R. R. Yager, *On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 18 (1988), pp. 183-190.
- [47] L. A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning*, Information Sciences, Part I, II, III, 8,8,9 (1975), pp. 199-249,301-357,43-80.
- [48] L. A. Zadeh, *Fuzzy Logic = Computing with Words*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 4 (1996), pp. 103-111.
- [49] Q. Zhang, J. C. H. Chen and P. P. Chong, *Decision Consolidation: Criteria Weight Determination Using Multiple Preference Formats*, Decision Support Systems, 38 (2004 ), pp. 247-258.