

# Modelo lingüístico de toma de decisiones dinámicas multicriterio con información heterogénea

Santiago Zapata C.<sup>1</sup>, Macarena Espinilla<sup>2</sup>, Luis Martínez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Informática. Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile, szapata@utem.cl

<sup>2</sup>Departamento de Informática. Universidad de Jaén. España, {macarena.espinilla,luis.martinez}@ujaen.es

## Resumen

La toma de decisión dinámica multicriterio está centrada en seleccionar la mejor alternativa de acuerdo a las valoraciones de una serie de criterios, los cuales caracterizan al conjunto de alternativas solución, en múltiples periodos de tiempo. Debido a la imprecisión e incertidumbre de la información relacionada en el problema de decisión y a la naturaleza de los criterios, usualmente, las valoraciones de los criterios están expresadas en diferentes dominios de expresión: numérico, intervalar y lingüísticos. En estas situaciones de decisión, el problema se define en un contexto heterogéneo, no encontrándose en la literatura ningún modelo de toma de decisión dinámico multicriterio que afronte dicho contexto. En esta contribución se propone un modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea, el cual permite expresar las valoraciones de las alternativas en diferentes dominios de expresión, ofreciendo resultados lingüísticos para facilitar la comprensión de los mismos. Finalmente, se presenta un ejemplo ilustrativo para mostrar el funcionamiento del modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio propuesto.

**Palabras Clave:** Toma de decisión, multicriterio, dinámico, información heterogénea, 2-tupla lingüística

## 1 INTRODUCCIÓN

La Toma de Decisión es una actividad habitual en el mundo real y juega un rol importante en multitud de campos como la ingeniería, la economía, las finanzas o la evaluación [6]. Un esquema de resolución de un problema de toma de decisión consta de dos fases: (i) la fase de agregación donde

se obtienen las valoraciones colectivas de cada alternativa y (ii) una fase de explotación para obtener el conjunto solución de alternativas al problema [6].

Existen situaciones de decisión donde es necesario tener en cuenta las valoraciones de las alternativas en múltiples periodos de tiempo para escoger la mejor alternativa que resuelve el problema de decisión en cada periodo [1]. La mencionada situación de decisión se ha denominado *dinámica* y describe también situaciones de decisión donde a lo largo del tiempo varían el número de elementos del problema, ya sea por la inclusión o eliminación de alternativas, criterios o expertos.

En [1] fue propuesto un marco de decisión dinámico para la resolución de problemas de toma de decisión multicriterio donde no es necesario guardar todas las valoraciones de las alternativas a lo largo del tiempo. Para ello, funciones de evaluación y operadores de agregación adecuados son utilizados en cada periodo para calcular una valoración dinámica para cada alternativa que tienen en cuenta el desempeño de la alternativa en el periodo actual, valoración no-dinámica, y su desempeño en los periodos anteriores. Así, con la selección de los operadores de agregación adecuados se evita guardar toda la información del problema de decisión, siendo necesario guardar únicamente la valoración dinámica de cada alternativa en el periodo anterior al actual.

En dicho marco dinámico las valoraciones de los criterios deben estar expresadas numéricamente en el intervalo unidad. Sin embargo, debido a la imprecisión e incertidumbre de la información que puede aparecer en los problemas de decisión o bien por la naturaleza de los criterios o la falta de información de los mismos, puede ser adecuado que las valoraciones de los criterios estén expresadas en diferentes dominios de expresión como el numérico, el intervalar y el lingüístico [3], definiéndose un contexto de decisión con *información heterogénea*.

Esta contribución propone un modelo lingüístico de toma de decisión dinámico para manejar información heterogénea. Para ello, se propone un proceso de agregación

multi-etapa basado en la extensión del modelo lingüístico 2-tupla [2] para manejar información heterogénea [3]. Dicha extensión propone una serie de funciones de transformación que nos permitirán unificar las valoraciones expresadas en diferentes dominios de expresión en valoraciones 2-tuplas lingüísticas [3], siendo posible también la utilización de operadores de agregación adecuados que eviten guardar la información de todo el problema de decisión a lo largo del tiempo. Finalmente, es destacable que el modelo propuesto proporcionará valoraciones sobre las alternativas, tanto valoraciones dinámicas como no-dinámicas, las cuales facilitarán la interpretación de los resultados.

Este trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 revisamos los conceptos básicos usados en nuestra propuesta. En la Sección 3, presentamos el nuevo modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Con el objetivo de ilustrar el modelo propuesto, en la Sección 4 se presenta la resolución de un problema de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Finalmente, indicaremos una serie de conclusiones.

## 2 PRELIMINARES

El modelo lingüístico de toma de decisiones propuesto en esta contribución sigue el marco de decisión dinámico multicriterio propuesto en [1] basándose en el modelo de representación lingüístico 2-tupla [2] y su extensión para el manejo de información heterogénea [3]. En esta sección revisamos brevemente dichos conceptos.

### 2.1 MARCO DE DECISIÓN DINÁMICO MULTICRITERIO

En un problema de toma de decisión dinámico multicriterio [1] se define un número positivo discreto de periodos de decisión  $T = \{1, 2, \dots\}$ , siendo  $A_t$  el conjunto de alternativas disponibles en el momento  $t \in T$ . En cada periodo de tiempo  $t$ , para cada alternativa disponible  $a \in A_t$ , una valoración no dinámica es calculada  $R_t(a) \in [0, 1]$ , utilizando un operador de agregación  $Agg_1 : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  que combina las valoraciones del conjunto de criterios  $C_t = \{c_1, \dots, c_n\}$  expresadas en el intervalo unidad.

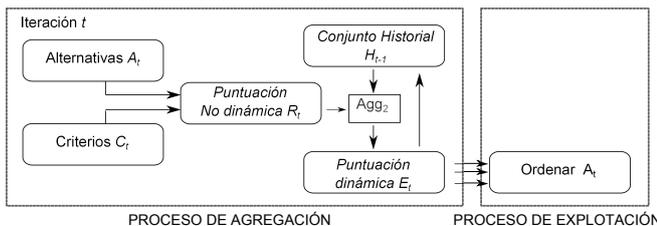


Figura 1: Marco de decisión dinámico multicriterio

La información involucrada en el problema de decisión sobre el conjunto de alternativas a lo largo del tiempo es llevada a cabo a través de una iteración entre el periodo actual y el histórico de los periodos previos que es definido como:  $H_0 = \emptyset$ ;  $H_t = \bigcup_{t' < t} A_{t'}$ ;  $t, t' \in T$

La naturaleza dinámica del proceso de decisión (ver Figura 1) es soportada por una función de evaluación  $E_t(a)$  que es definida para cada  $t \in T$  como:  $E_t(a) : H_t \rightarrow [0, 1]$ .

$$E_t(a) = \begin{cases} R_t(a), & a \in A_t \setminus H_{t-1} \\ Agg_2(E_{t-1}(a), R_t(a)), & a \in A_t \cap H_{t-1} \\ E_{t-1}(a), & a \in H_{t-1} \setminus A_t \end{cases} \quad (1)$$

Definiéndose  $Agg_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  como un operador de agregación asociativo que puede aplicar diferentes tipos de refuerzo para el conjunto de alternativas, considerando la actitud en el proceso de toma de decisión (ver [5]). Así, pueden utilizarse como operadores de agregación aquellos que están basados en t-normas y t-conormas [8], ya que cumplen la propiedad asociativa, cumpliendo también la propiedad de compensación [9]:

$$\min(x_1, \dots, x_m) \leq Agg_2(x_1, \dots, x_m) \leq \max(x_1, \dots, x_m)$$

### 2.2 MODELO LINGÜÍSTICO BASADO EN 2-TUPLAS

El modelo lingüístico de representación basado en 2-tuplas está basado en el concepto de *traslación simbólica* [2] y representa la información lingüística a través de una 2-tupla  $(s, \alpha)$ , donde  $s \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$  es un conjunto de términos lingüísticos y  $\alpha \in [-.5, .5]$  es un valor numérico que representa la traslación simbólica [2].

Para operar con información lingüística, este modelo de representación define la función  $\Delta_S : [0, g] \rightarrow \langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5]$  que permite transformar un valor numérico contenido en el intervalo  $[0, g]$  en la 2-tupla lingüística que representa la información equivalente:

$$\Delta_S(\beta) = (s_i, \alpha), \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-.5, .5] \end{cases}$$

Cabe señalar que  $\Delta_S^{-1} : \langle S \rangle \rightarrow [0, g]$  es definida como  $\Delta_S^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$ . De este modo, una 2-tupla lingüística  $\langle S \rangle$  queda identificada con su valor numérico en  $[0, g]$ .

Operadores de agregación que obtienen un valor lingüístico 2-tupla a partir de un conjunto de valoraciones lingüísticas en 2-tupla han sido propuestos en la literatura [2, 4].

$$2T - Agg : \langle S \rangle^n \rightarrow \langle S \rangle$$

### 2.3 EXTENSIÓN BASADA EN 2-TUPLA PARA EL MANEJO DE INFORMACIÓN HETEROGÉNEA

En [3] fueron definidas un conjunto de funciones de transformación que permiten transformar valores expresados en diferentes dominios de expresión (numérico, intervalar o lingüístico) a valores lingüísticos expresados en 2-tuplas de un conjunto lingüístico seleccionado denominado *Conjunto Básico de Términos Lingüísticos* (BLTS) y notado como  $S_{BLTS} = \{s_i, i = 0, \dots, g\}$ , el cual es seleccionado con el objetivo de guardar el mayor conocimiento posible (ver [3]). Para ello, se sigue el esquema mostrado en la Figura 2.

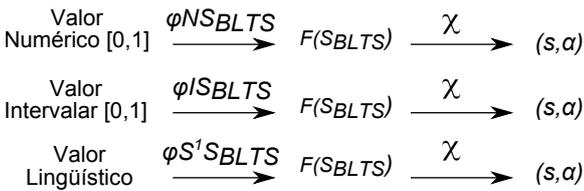


Figura 2: Transformación a valores en 2-tuplas lingüística

En primer lugar, la información heterogénea es unificada en conjuntos difusos en el BLTS  $F(S_{BLTS})$ , usando una función de transformación adecuada al dominio de expresión:

- *Dominio numérico.* Cuando  $v \in [0, 1]$  una función de transformación numérica  $\varphi_{NS_{BLTS}} : ([0, 1]) \rightarrow F(S_{BLTS})$  es aplicada:

$$\varphi_{NS_{BLTS}}(v) = \sum_{i=0}^g (s_i / \gamma_i) \quad (2)$$

donde  $\gamma_i = \mu_{s_i}(v) \in [0, 1]$  es el grado de pertenencia de  $v$  a  $s_i \in S_{BLTS}$ .

- *Dominio intervalar.* Cuando  $v \in P([0, 1])$ , una función de transformación intervalar  $\varphi_{IS_{BLTS}} : P([0, 1]) \rightarrow F(S_{BLTS})$ , es aplicada:

$$\varphi_{IS_{BLTS}}(v) = \sum_{i=0}^g (s_i / \gamma_i) \quad (3)$$

donde  $\gamma_i = \max_y \min\{\mu_l(y), \mu_{s_l}(y)\}$ , con  $l = \{0, \dots, g\}$ , siendo  $\mu_l(\cdot)$  y  $\mu_{s_l}(\cdot)$  funciones de pertenencia asociadas con el intervalo  $I \in P([0, 1])$  y el término  $s_l \in S_{BLTS}$ , respectivamente.

- *Dominio lingüístico.* Cuando  $v \in S^k$ , tal que  $S^k = \{s_0^k, \dots, s_{g_k}^k\}$  y  $g_k < g$ , la función de transformación lingüística  $\varphi_{S^k S_{BLTS}} : S^k \rightarrow F(S_{BLTS})$  es aplicada:

$$\varphi_{S^k S_{BLTS}}(s_l^k) = \sum_{i=0}^g (s_i / \gamma_i) \quad (4)$$

donde  $\gamma_i = \max_y \min\{\mu_{s_l}(y), \mu_{s_i}(y), i = 0, \dots, g\}$ .

En segundo lugar, los conjuntos difusos en el BLTS son transformados a valores 2-tupla por la función  $\chi : F(S_{BLTS}) \rightarrow \langle S \rangle$  definida como:

$$\chi(\{(s_0, \gamma_0), (s_1, \gamma_1), \dots, (s_g, \gamma_g)\}) = \Delta_S \left( \frac{\sum_{i=0}^g i \gamma_i}{\sum_{i=0}^g \gamma_i} \right) = (s, \alpha) \quad (5)$$

### 3 MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES DINÁMICO MULTICRITERIO CON INFORMACIÓN HETEROGÉNEA

En esta sección se presenta un modelo lingüístico de toma de decisiones dinámico multicriterio con información heterogénea, el cual ofrece valoraciones colectivas lingüísticas de las alternativas al final de cada periodo.

En la Figura 3 se ilustra el modelo propuesto, el cual incluye una fase de agregación multietapa y una fase de explotación, ambas son detalladas a continuación.

#### 3.1 Fase de Agregación Multietapa

El modelo propuesto en esta contribución está compuesto por una fase de agregación multietapa, la cual se divide en 4 etapas donde se encuentra un ciclo iterativo por cada periodo de tiempo que comprende desde la etapa 2 hasta la etapa 4.

A continuación, se detalla cada etapa del proceso de agregación.

*A - Escoger un conjunto básico de términos lingüísticos.*

Las valoraciones de los múltiples criterios expresadas en diferentes dominios de expresión serán unificadas en un dominio lingüístico seleccionado (ver [3]), el cual es notado como  $S_{BLTS}$ . Además, las valoraciones colectivas de cada alternativa, tanto dinámicas como no-dinámicas, serán también expresadas en dicho dominio lingüístico con el objetivo de facilitar la comprensión de los resultados.

*B- Unificación de la información en valoraciones lingüísticas en 2-tuplas en  $S_{BLTS}$ .*

Cada valoración  $v_t^i \in \{N, P([0, 1]), S^k\}$  del periodo  $t$  sobre la alternativa  $a \in A_t$  según el criterio  $c_i \in C_t$  es transformada a un valor lingüístico 2-tupla a través de la función de transformación correspondiente a su dominio de expresión (Ecuación (2), (3) ó (4)) y la Ecuación (5). Por tanto, en esta fase se unifican todas las valoraciones de la alternativa al dominio de expresión lingüístico seleccionado  $(s, \alpha)_t^j \in \langle S_{BLTS} \rangle$ .

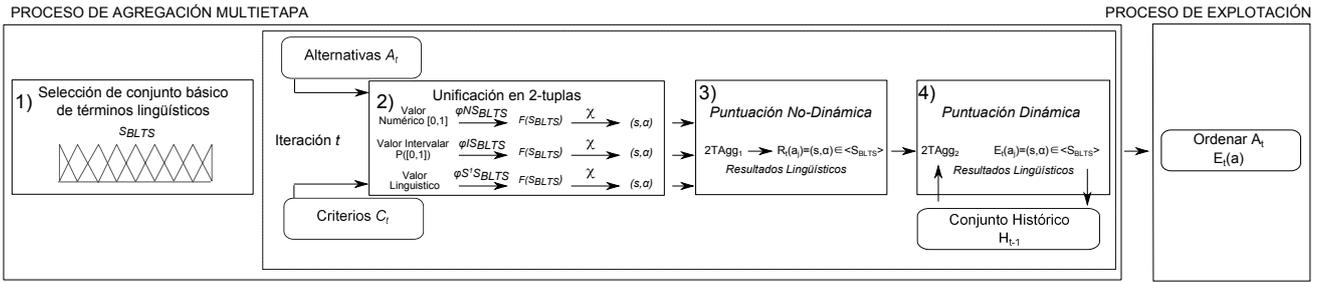


Figura 3: Modelo lingüístico de toma de decisiones dinámico multicriterio con información heterogénea

C- Valoración no-dinámica para cada alternativa.

Para cada alternativa disponible en el periodo  $t$  es calculada una valoración colectiva lingüística no-dinámica, agregando las valoraciones lingüísticas unificadas de cada alternativa en el periodo  $t$  a través de un operador de agregación para 2-tuplas lingüísticas  $2TAgg_1$ .

$$R_t(a) = 2TAgg_1((s, \alpha)_i^i; i = 1, \dots, n) = (s, \alpha)_t \in \langle S_{BLTS} \rangle$$

Es destacable que la valoración colectiva no-dinámica está expresada en un dominio lingüístico, el cual facilita la compresión de los resultados.

D- Valoración dinámica para cada alternativa.

Un vez que las valoraciones no-dinámicas han sido obtenidas, es calculada una valoración dinámica para cada alternativa disponible en el periodo  $t$ . Para ello son utilizadas una función de evaluación  $E_t$  y un operador de agregación adecuado  $Agg_2$ , siendo interesante el uso de t-norma y t-conorma [8]  $U : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , ya que cumplen la propiedad de asociatividad y otras como la conmutativa, la monotonicidad y la condiciones frontera.

Los operadores de agregación asociativos brindan la posibilidad de no guardar toda la información del problema de decisión, siendo necesario tan solo guardar la valoración dinámica de la última iteración  $t - 1$ .

$$E_t(a) = \begin{cases} R_t(a), & a \in A_t \setminus H_{t-1} \\ Agg_2(E_{t-1}(a), R_t(a)), & a \in A_t \cap H_{t-1} \\ E_{t-1}(a), & a \in H_{t-1} \setminus A_t \end{cases} \quad (6)$$

Dado que las t-normas y t-conormas requieren valores expresados en el intervalo unidad, en el modelo propuesto es necesario que las valoraciones expresadas en 2-tuplas lingüísticas se normalicen a valores en dicho intervalo. Para ello, es utilizada la función  $\Delta_S^{-1}$  para transformar las valoraciones expresadas en 2-tuplas lingüística a un valor numérico en el intervalo de granularidad  $[0, g]$ , el cual es normalizado posteriormente al intervalo  $[0, 1]$ , dividiendo por la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos  $g$ .

Una vez que la información se ha agregado a través de función adecuado, se obtiene un valor expresado en el intervalo unidad. Así, multiplicando dicho valor por la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos  $g$ , se obtiene el valor agregado en el intervalo  $[0, g]$ , el cual puede ser transformado a un valor expresado en 2-tuplas lingüísticas a través de la función  $\Delta_S^{-1}$ . De este modo, las valoraciones dinámicas obtenidas de cada alternativa se encuentran expresadas en 2-tuplas lingüísticas, facilitando su interpretación.

3.2 Fase de explotación

Una vez que se han obtenido las valoraciones dinámicas lingüísticas de las alternativas disponibles para cada iteración, la fase de explotación es llevada a cabo. Para ello, el conjunto de alternativas disponibles es ordenado a partir de las valoraciones dinámicas lingüísticas calculadas en cada iteración.

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Con el objetivo de mostrar el funcionamiento del modelo lingüístico de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea, en esta sección se proporciona un ejemplo ilustrativo.

Se desean seleccionar entre un equipo de 10 atletas los 4 que formarán parte en una competición de carrera de relevos que se desarrolla en tres fases. Para escoger a los atletas, el seleccionador evaluará el desempeño de los atletas en una prueba de selección antes de cada fase de competición  $T = \{1, 2, 3\}$ . Para valorar el desempeño de los atletas son considerados un criterio de beneficio *calidad en la transferencia del testigo* y dos criterios de coste: *velocidad y metros recorridos en la entrega testigo*  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ , respectivamente. Según la naturaleza de los criterios,  $c_1$  se valorará en un dominio de expresión lingüístico (ver Figura 4),  $c_2$  se valorará en un dominio de expresión numérico y  $c_3$  en un dominio de expresión intervalar.

A continuación se muestra la resolución del problema de toma de decisión siguiendo el modelo propuesto en la sec-

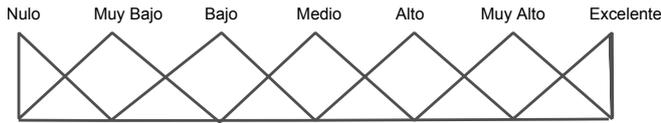


Figura 4: Dominio de expresión lingüístico

ción anterior.

En primer lugar es escogido el dominio de expresión lingüístico donde se expresarán las valoraciones colectivas, dinámicas y no-dinámicas. En este problema, el dominio escogido es el mostrado en la Figura 4, el cual coincide con el dominio de expresión utilizado para expresar las valoraciones del criterio  $c_1$ .

Tabla 1: Información de la primera prueba  $t = 1$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	E	A	E	MA	M	A	M	MA
$c_2$	80,0	84,0	79,0	72,0	68,0	77,0	75,0	74,0
$c_3$	1,5 2,0	0,5 1,0	1,5 2,0	0,5 1,0	1,0 1,5	0,5 1,0	0,5 1,0	1,0 1,5

En la Tabla 1 son mostradas las valoraciones de los atletas en la primera prueba de selección que deberán ser unificadas al dominio de expresión lingüístico  $S_{BLTS}$ . Previamente, las valoraciones de los criterios de coste  $c_2$  y  $c_3$  que están expresadas en un dominio numérico e intervalar respectivamente, son normalizadas al intervalo unidad. Para las valoraciones sobre el criterio  $c_2$  la normalización se realiza mediante la Ecuación 7.

$$v_{ij} = 1 - \frac{\bar{v}_{ij} - \min(v_{ij})}{\max(v_{ij}) - \min(v_{ij})} \quad (7)$$

La Tabla 2 muestra la información unificada en 2-tuplas lingüísticas. Con el objetivo de clarificar el proceso de unificación de la información heterogénea a 2-tuplas lingüísticas, a continuación se muestran los cálculos relacionados con las valoraciones del atleta 1.

**Ejemplo 1.**

$$\chi(\varphi_{SS_{BLTS}}(E)) = \chi(\{(s_0, 0), (s_1, 0), (s_2, 0), (s_3, 0), (s_4, 0), (s_5, .5), (s_6, 1)\}) = (s_6, -.4)$$

$$\chi(\varphi_{NS_{BLTS}}(\overline{80})) = \chi(\varphi_{NS_{BLTS}}(0.20)) = \chi(\{(s_0, 0), (s_1, .5), (s_2, .5), (s_3, 0), (s_4, 0), (s_5, 0), (s_6, 0)\}) = (s_2, -.5)$$

$$\chi(\varphi_{IS_{BLTS}}(\overline{[1.5 - 2.0]})) = \chi(\varphi_{IS_{BLTS}}([0 - 0.25])) = \chi(\{(s_0, 1), (s_1, 1), (s_2, 1), (s_3, 0), (s_4, 0), (s_5, 0), (s_6, 0)\}) = (s_1, 0)$$

Las valoraciones no-dinámicas de la primera iteración, las cuales resumen el desempeño de los atletas en la primera prueba, se han obtenido a través del operador de media ponderada para 2-tuplas lingüísticas,  $2T - WA^W : \langle S \rangle^n \rightarrow \langle S \rangle$

Tabla 2: Información de la primera prueba  $t = 1$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	$(s_6, -.4)$	$(s_4, 0)$	$(s_6, -.4)$	$(s_5, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_4, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_5, 0)$
$c_2$	$(s_2, -.5)$	$(s_0, 0)$	$(s_2, -.1)$	$(s_5, -.5)$	$(s_6, 0)$	$(s_3, -.4)$	$(s_2, .4)$	$(s_3, .4)$
$c_3$	$(s_1, 0)$	$(s_5, 0)$	$(s_1, 0)$	$(s_5, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_5, 0)$	$(s_5, 0)$	$(s_3, 0)$
$R_t(a)$	$(s_2, -.2)$	$(s_1, .4)$	$(s_2, .1)$	$(s_5, -.3)$	$(s_5, .1)$	$(s_3, .2)$	$(s_3, 0)$	$(s_4, -.5)$
$E_t(a)$	$(s_2, -.2)$	$(s_1, .4)$	$(s_2, .1)$	$(s_5, -.3)$	$(s_5, .1)$	$(s_3, .2)$	$(s_3, 0)$	$(s_4, -.5)$

con el vector de pesos  $W = (.7, .2, .1)$ .

$$2T - WA^W((s_1, \alpha_1), \dots, (s_n, \alpha_n)) = \Delta_S \left( \sum_{i=1}^n w_i \Delta_S^{-1}(s_i, \alpha_i) \right)$$

A continuación se muestra un ejemplo donde son ilustrados los cálculos para obtener la valoración no-dinámica del atleta 1 a través del operador de agregación media ponderada para 2-tuplas lingüísticas.

**Ejemplo 2.**  $2T - WA^W((s_6, -.4), (s_2, -.5), (s_1, 0)) = \Delta_S(5.6 \times 0.7 + 1.5 \times 0.2 + 1 \times 0.1) = \Delta_S(3.8) = (s_2, -.2)$

En la primera iteración, las valoraciones dinámicas coinciden con las valoraciones no-dinámicas, dado que el conjunto histórico de valoraciones se encuentra vacío. Así, para la primera fase de competición el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$a5 > a4 > a8 > a6 > a7 > a3 > a2 > a1$$

En la Tabla 3 son mostradas las valoraciones de los atletas en la segunda prueba de selección y en la Tabla 4 las transformaciones y valoraciones asociadas.

Tabla 3: Valoraciones de la segunda prueba  $t = 2$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	E	-	E	E	M	M	M	MA
$c_2$	60,0	-	78,0	68,0	78	82,0	78,0	72,0
$c_3$	1,0 1,5	- -	1,5 2,0	0,5 1,0	1,5 2,0	0,5 1,0	1,0 1,5	0,0 1,50

Tabla 4: Valoraciones de la segunda prueba  $t = 2$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	$(s_6, -.4)$	-	$(s_6, -.4)$	$(s_6, -.4)$	$(s_3, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_5, 0)$
$c_2$	$(s_6, 0)$	-	$(s_2, -.5)$	$(s_4, -.3)$	$(s_2, -.5)$	$(s_1, -.5)$	$(s_2, -.5)$	$(s_3, .2)$
$c_3$	$(s_2, .2)$	-	$(s_0, .2)$	$(s_4, -.2)$	$(s_1, -.2)$	$(s_4, -.2)$	$(s_2, .2)$	$(s_4, -.4)$
$R_t(a)$	$(s_5, .2)$	-	$(s_2, -.2)$	$(s_4, -.1)$	$(s_2, -.3)$	$(s_2, -.5)$	$(s_1, .2)$	$(s_4, -.5)$
$E_t(a)$	$(s_5, .4)$	$(s_1, .4)$	$(s_3, .2)$	$(s_6, -.4)$	$(s_6, -.1)$	$(s_4, 0)$	$(s_4, -.1)$	$(s_5, -.1)$

Para el cálculo de las valoraciones dinámicas se ha utilizado como operador de agregación  $Agg_2$  la t-conorma *Suma-producto* definida como  $x + y - xy$ . Así, con dicho operador es agregada la valoración dinámica de la iteración  $t = 1$  con la valoración no-dinámica de la iteración  $t = 2$  para obtener la valoración dinámica de la iteración  $t = 2$ . A continuación, se muestra un ejemplo de cómo es calculada la valoración dinámica del atleta 1 a través del operador de agregación  $Agg_2$  y la uninorma *Suma-producto* que opera sobre valores en el intervalo unidad.

**Ejemplo 3.**  $\Delta_S((Agg_2(\frac{\Delta_S^{-1}(s_2, -.2)}{g}, \frac{\Delta_S^{-1}(s_5, .2)}{g})) * g) = \Delta_S((Agg_2(\frac{1.8}{6}, \frac{5.2}{6})) * g) = \Delta_S((Agg_2(0.86, 0.3)) * g) = \Delta_S(0.902 * 6) = \Delta_S(5.4) = (s_5, .4)$

Es de destacar que el atleta 2 no ha asistido a la segunda prueba de selección, por este motivo su valoración dinámica en el periodo  $t = 2$  coincide con la valoración dinámica de la primera prueba  $t = 1$ . Por tanto, para la segunda fase de competición el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$a5 > a4 > a1 > a8 > a6 > a7 > a3 > a2$$

En la Tabla 5 son mostradas las valoraciones de los atletas en la última prueba de selección y en la Tabla 6 las transformaciones y valoraciones asociadas.

Tabla 5: Información de la tercera prueba  $t = 3$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	E	B	MA	E	M	M	M	MA
$c_2$	60,0	84,0	70,0	69,0	77,0	78,0	81,0	71,0
$c_3$	1,0 1,5	1,0 2,0	1,0 1,5	0,5 1,0	1,5 2,0	1,5 2,0	1,0 1,5	0,0 1,50

Tabla 6: Valoraciones de la tercera prueba  $t = 3$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
$c_1$	$(s_6, -.3)$	$(s_2, 0)$	$(s_5, 0)$	$(s_6, -.3)$	$(s_3, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_3, 0)$	$(s_5, 0)$
$c_2$	$(s_6, 0)$	$(s_0, 0)$	$(s_4, -.5)$	$(s_4, -.2)$	$(s_2, -.25)$	$(s_2, -.5)$	$(s_1, -.2)$	$(s_3, 0)$
$c_3$	$(s_2, .2)$	$(s_2, -.5)$	$(s_2, .2)$	$(s_4, -.2)$	$(s_1, -.2)$	$(s_1, -.2)$	$(s_2, .2)$	$(s_4, -.3)$
$R_t(a)$	$(s_5, .2)$	$(s_1, -.5)$	$(s_3, .4)$	$(s_4, -.1)$	$(s_2, -.3)$	$(s_2, -.5)$	$(s_1, .2)$	$(s_4, -.5)$
$E_t(a)$	$(s_6, -.1)$	$(s_2, .3)$	$(s_5, -.2)$	$(s_6, -.2)$	$(s_6, -.1)$	$(s_5, -.5)$	$(s_4, .3)$	$(s_6, -.5)$

Al igual que en la anterior iteración, para el cálculo de las valoraciones dinámicas se ha utilizado como operador de agregación  $Agg_2$  la t-conorma *Suma-producto*. Finalmente, para la última fase de selección el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$a5 = a1 > a4 > a8 > a3 > a6 > a7 > a2$$

En caso de que fuese necesario resolver los empates, se puede hacer uso de índices dinámicos discriminativos [7].

### 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un nuevo modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea basado en el modelo lingüístico 2-tupla y su extensión para tratar con información expresada en diferentes dominios de expresión. El modelo lingüístico de decisión propuesto permite expresar las valoraciones de los criterios en diferentes dominios de expresión: numérico, intervalar y lingüístico, proporcionando valoraciones lingüísticas de las alternativas, tanto dinámicas como no-dinámicas, las cuales facilitan la interpretación de los resultados. T-normas y t-conormas, las cuales cumplen la

propiedad de asociatividad, son utilizadas como operadores para agregar las valoraciones, por lo que no es necesario guardar toda la información del problema de decisión a lo largo del tiempo. Finalmente, se ha mostrado un ejemplo que ilustra el funcionamiento del modelo lingüístico de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Como trabajo futuro, apuntar el estudio de los empates en las valoraciones dinámicas atendiendo al comportamiento de las alternativas a lo largo del tiempo.

### Agradecimientos

Este artículo ha sido realizado con la ayuda del proyecto TIN2012-31263.

### Referencias

- [1] G. Campanella and R.A. Ribeiro. A framework for dynamic multiple-criteria decision making. *Decision Support Systems*, 52(1):52–60, 2011.
- [2] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
- [3] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.
- [4] J.M. Merigó, M. Casanovas, and L. Martínez. Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the dempster-shafer theory of evidence. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 18(3):287–304, 2010.
- [5] R.A. Ribeiro, T.C. Pais, and L.F. Simoes. Benefits of full-reinforcement operators for spacecraft target landing. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 257:353–367, 2010.
- [6] Marc Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):199 – 206, 1997.
- [7] L. Martínez M. Espinilla Y. Zulueta, J. Martínez-Moreno. A discriminative dynamic index based on bipolar aggregation operators for supporting dynamic multi-criteria decision making. In H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, and T. Calvo, editors, *Aggregation Functions in Theory and in Practise*, volume 228 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 237–248. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [8] Ronald R. Yager and Alexander Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):111 – 120, 1996.
- [9] H.J Zimmermann and P Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1):37 – 51, 1980.