

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén
Departamento de Informática



MODELOS PARA SISTEMAS DE APOYO AL CONSENSO
EN PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIÓN EN GRUPO
DEFINIDOS EN CONTEXTOS LINGÜÍSTICOS
MULTIGRANULARES

MEMORIA DE TESIS PRESENTADA POR

Francisco Mata Mata

COMO REQUISITO PARA
OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
EN INFORMÁTICA

Jaén

Junio de 2006

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén

Departamento de Informática



MODELOS PARA SISTEMAS DE APOYO AL CONSENSO
EN PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIÓN EN GRUPO
DEFINIDOS EN CONTEXTOS LINGÜÍSTICOS
MULTIGRANULARES

MEMORIA DE TESIS PRESENTADA POR
Francisco Mata Mata
PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INFORMÁTICA

DIRECTORES

DR. LUIS MARTÍNEZ LÓPEZ
DR. ENRIQUE HERRERA VIEDMA

La memoria de tesis titulada **Modelos para Sistemas de Apoyo al Consenso en Problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en Contextos Lingüísticos Multigranulares**, que presenta **D. Francisco Mata Mata** para optar al grado de Doctor en Informática, ha sido realizada en el **Departamento de Informática** de la Universidad de Jaén bajo la dirección de los doctores **Luis Martínez López** y **Enrique Herrera Viedma**.

Francisco Mata Mata
Doctorando

Dr. Luis Martínez López
Director

Dr. Enrique Herrera Viedma
Director

Agradecimientos y Dedicatorias

En primer lugar y como no podría ser de otra forma, quiero expresar mi más sentido agradecimiento a las dos personas que han hecho posible la elaboración de esta memoria de investigación, como son mis directores de tesis, Dr. Luis Martínez López y Dr. Enrique Herrera Viedma. Gracias por su dedicación, esfuerzo y confianza depositada en mí a lo largo de todo este tiempo.

Gracias a todos mis compañeros del Departamento de Informática de la Universidad de Jaén, y en especial al apoyo y amistad del grupo con el que comparto temas de trabajo e investigación como son Luis G., Pedro y Manolo. Agradecer también las muestras de apoyo recibidas por parte de compañeros de la Universidad de Granada y de la Universidad Pontificia de Salamanca, entre ellos a Luis Joyanes por ofrecerme la oportunidad de incorporarme a esta apasionante profesión como es la docencia universitaria.

Y por último agradecer el apoyo recibido desde mi familia, amigos y sobre todo a mi mujer Mari Carmen, la cual ha sido “sufridora” pasiva y activa en el proceso de redacción de la tesis.

Gracias a todos ...

Índice general

Introducción	1
1. Problemas de Toma de Decisión en Grupo en Ambiente Difuso:	
Modelado de Preferencias y el Enfoque Lingüístico Difuso	11
1.1. El Problema de la Toma de Decisión	12
1.1.1. Según el número de criterios	14
1.1.2. Según el ambiente de decisión	16
1.1.3. Según el número de expertos	18
1.2. Modelado de Preferencias	18
1.2.1. Estructuras para la representación de preferencias	20
1.2.2. Dominios de expresión de preferencias	24
1.3. Nociones y Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos .	31
1.3.1. Conjuntos difusos y función de pertenencia	32
1.3.2. Definición básica de conjunto difuso	33
1.3.3. Tipos de funciones de pertenencia	36
1.3.4. Principio de extensión	37
1.3.5. Número difuso	38
1.4. El Enfoque Lingüístico Difuso	39
1.4.1. Elección del conjunto de términos lingüísticos	42

1.4.2. Semántica del conjunto de términos lingüísticos	45
1.5. Resolución de Problemas de TDG en Ambiente Difuso	48
1.5.1. Proceso de consenso	50
1.5.2. Proceso de selección	51
2. El Consenso en Problemas de Toma de Decisión en Grupo.	55
2.1. Proceso de Consenso	55
2.2. Fases del Proceso de Consenso	60
2.3. Modelos de Consenso para Problemas de TDG	65
2.3.1. Modelo de consenso para problemas de TDG con informa- ción difusa	66
2.3.2. Modelo de consenso para problemas de TDG con vectores de preferencia	72
2.3.3. Modelo de consenso para problemas de TDG multiatributo	77
2.3.4. Modelo de consenso para problemas de TDG con valoracio- nes lingüísticas	81
2.3.5. Modelo de consenso para problemas de TDG con diferentes estructuras de preferencia	89
2.3.6. Modelo teórico del proceso de consenso	97
3. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para Problemas de TDG definidos en Contextos Lingüísticos Multigranulares	103
3.1. Problemas de TDG en Contextos Lingüísticos Multigranulares . .	104
3.2. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para Problemas de TDG con Información Lingüística Multigranular	106
3.2.1. Características del modelo	108
3.3. Fases del Modelo	112

3.3.1.	Unificación de la información	114
3.3.2.	Cálculo del grado de consenso	119
3.3.3.	Control del consenso	130
3.3.4.	Generación de recomendaciones	132
3.4.	Ejemplo de Funcionamiento del Modelo de SAC	148
3.4.1.	Primera ronda de consenso	151
3.4.2.	Segunda ronda de consenso	164
3.4.3.	Tercera ronda de consenso	173
3.4.4.	Cuarta ronda de consenso	179
4.	Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo	183
4.1.	Fundamentos del Modelo de SAC Adaptativo	184
4.1.1.	Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está muy lejano	187
4.1.2.	Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está lejano	190
4.1.3.	Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está próximo	192
4.2.	Modelo de SAC Adaptativo para Problemas de TDG definidos en Contextos Lingüísticos Multigranulares	193
4.2.1.	Unificación de la información	195
4.2.2.	Cálculo de los grados de consenso y control del grado de consenso	196
4.2.3.	Búsqueda adaptativa de preferencias a modificar	197
4.2.4.	Generación de recomendaciones	206
4.3.	Ejemplo de Aplicación del Modelo de SAC Adaptativo	209

4.3.1. Primera ronda de consenso	211
4.3.2. Segunda ronda de consenso	221
4.3.3. Tercera ronda de consenso	229
4.4. Resumen de los Resultados	232
Conclusiones y Trabajos Futuros	235
. Bibliografía	241

Índice de figuras

1. Proceso de consenso y selección en problemas de Toma de Decisión en Grupo.	4
1.1. Ejemplos de números difusos	39
1.2. Número difuso trapezoidal	45
1.3. Definición semántica de la variable lingüística altura	46
1.4. Conjunto de 5 etiquetas lingüísticas uniformemente distribuidas .	47
1.5. Distribuciones diferentes del concepto “excelente”	48
1.6. Niveles de decisión	49
1.7. Proceso de consenso y selección en problemas de TDG.	51
1.8. Fases del proceso de selección en problemas de TDG	52
2.1. Fases del Proceso de Consenso	61
2.2. Modelo de consenso propuesto por Zadrozny	67
2.3. Representación de los rangos de utilidad	78
2.4. Rango de utilidad total del grupo y rango de consenso de las preferencias de los expertos DM_1 y DM_2	81
2.5. Modelo de consenso racional con valoraciones lingüísticas	82
2.6. Modelo de consenso con diferentes estructuras de preferencia . . .	93
2.7. Modelo de consenso propuesto por Saint y Lawson	100

3.1. Modelo de SAC para problemas de TDG	107
3.2. Modelo de SAC para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares	112
3.3. Transformación de $l_1 \in S$ en un conjunto difuso sobre S_T	117
3.4. Control del consenso	131
4.1. Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está muy lejano	189
4.2. Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está lejano	191
4.3. Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está próximo	193
4.4. Modelo de SAC Adaptativo para problemas de TDG con informa- ción lingüística multigranular	194
4.5. Búsqueda adaptativa de preferencias	198

Introducción

Motivación

La Toma de Decisiones es una tarea compleja y una de las actividades fundamentales de los seres humanos. Algunos autores argumentan que la Toma de Decisiones en situaciones complejas es una característica fundamental que diferencia al género humano de los animales [19]. Constantemente nos enfrentamos a situaciones en las que existen varias alternativas y, al menos en algunas ocasiones, tenemos que decidir cuál es mejor, o cuál llevar a cabo.

La complejidad de los procesos de toma de decisiones se debe a la necesidad de un análisis detallado de las ventajas e inconvenientes asociados a cada alternativa. Este análisis es aún más difícil si tenemos en cuenta que en los procesos de decisión pueden aparecer alternativas sobre las que el conocimiento no es total o preciso e implican un determinado grado de incertidumbre. La reducción de esta incertidumbre ha sido uno de los objetivos perseguidos por la Teoría Clásica de la Decisión.

La incertidumbre puede provenir principalmente de dos fuentes:

- a) Desconocimiento del comportamiento preciso de algunos de los factores que intervienen o condicionan el problema de decisión. Esta incertidumbre suele

tratarse desde un punto de vista probabilístico.

- b) Aparición de información vaga o imprecisa. En este caso el uso de la Lógica Difusa es habitual.

La Toma de Decisiones se aplica en distintas disciplinas, tales como, las Ciencias Sociales, la Economía, la Ingeniería, la Psicología, etc. Esta amplia gama de campos de aplicación tiene como consecuencia la existencia de diferentes modelos de toma de decisiones [23, 26, 38]. La Teoría Clásica de Decisión proporciona gran cantidad de modelos y métodos para apoyar la toma de decisiones pero que no son adecuados para tratar situaciones en las que la incertidumbre se debe a la aparición en el problema de información vaga e imprecisa. En estas situaciones hablamos de problemas de decisión en contexto difuso o de Toma de Decisiones Difusa [12, 31, 178]. Por tanto, dependiendo del conocimiento que los expertos tengan sobre las alternativas del problema, el contexto de definición y el modelo de decisión puede variar.

El modelado de preferencias es una actividad indispensable en los problemas de toma de decisiones. Dependiendo de la naturaleza cuantitativa o cualitativa de los aspectos que se estén valorando, definirá el dominio de información que se utilizará para valorarlos. Normalmente se asume que los individuos que participan en un proceso de toma de decisión son capaces de expresar sus preferencias sobre el conjunto de alternativas mediante valores numéricos precisos. Sin embargo, en multitud de ocasiones, puede ocurrir que un individuo tenga que valorar aspectos de naturaleza cualitativa que difícilmente admitan valoraciones precisas, siendo más apropiado utilizar otro tipo de valores como por ejemplo términos lingüísticos. En estos casos, el uso del Enfoque Lingüístico Difuso [171] basado en conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos [52, 170] se ha mostrado útil a la hora de

modelar este tipo de aspectos [1, 5, 14, 17, 45, 47, 86, 155, 158]. El uso del enfoque lingüístico implica la necesidad de realizar procesos para operar con palabras que en la Toma de Decisiones Difusa se ha llevado a cabo usando distintos modelos [45, 47, 81].

A la hora de resolver un problema de decisión en los que intervienen múltiples expertos, denominados problemas de Toma de Decisiones en Grupo, podemos distinguir dos procesos diferenciados (Figura 1):

- **Selección de alternativas.** Este proceso consiste en buscar el conjunto solución de alternativas que mejor resuelve el problema de decisión planteado [64, 157]. En este proceso distinguimos dos fases [139]: (i) Una fase de *Agregación* en la que se combinan las preferencias individuales de los expertos para obtener una preferencia colectiva sobre las alternativas del problema y (ii) Una fase de *Explotación* en la que a partir de las preferencias colectivas se aplicará un grado de selección para generar el conjunto solución de alternativas del problema.

- **Consenso.** El proceso de selección de alternativas en problemas de decisión con múltiples expertos puede dar lugar a soluciones que no son aceptadas como buenas por todos los expertos, por lo que el estudio del consenso se ha convertido en un campo de investigación de gran importancia dentro de la Toma de Decisiones [16, 20, 29, 60, 89, 102, 119, 147, 165]. Podemos decir que el Consenso es un proceso de discusión en grupo e iterativo que es coordinado por un *Moderador* que ayuda a los expertos del problema a acercar sus opiniones. El consenso se ha definido clásicamente como el acuerdo total y unánime de todos los expertos que participan en el problema de ahí que inicialmente se utilizaran medidas de consenso absolutas [13]. Con

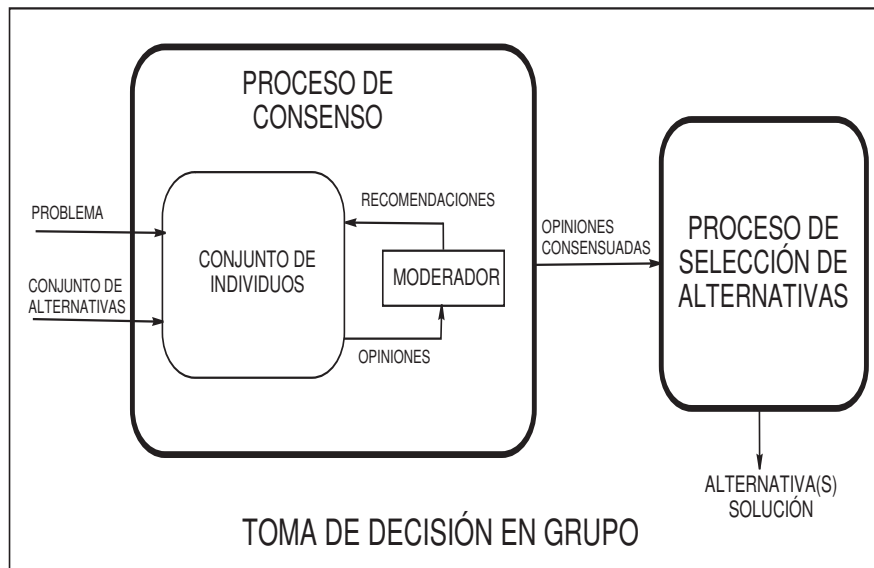


Figura 1: Proceso de consenso y selección en problemas de Toma de Decisión en Grupo.

el paso del tiempo, se ha suavizado el concepto de consenso (Soft consensus) y se han propuesto medidas difusas [16, 102, 110] que ofrecen una mayor flexibilidad para expresar una medida vaga *per se* como es el consenso.

En muchas ocasiones nos encontramos con problemas de Toma de Decisión en Grupo en los que se trabaja con información heterogénea debido a que los expertos pertenecen a áreas de trabajo diferentes o a que tienen distinto grado de conocimiento sobre el problema que se está tratando. En particular, en un contexto lingüístico, puede ocurrir que los expertos utilicen diferentes escalas o conjuntos de términos lingüísticos para expresar sus preferencias, hablándose en estos casos de contextos lingüísticos multigranulares [73, 88, 121].

En la literatura podemos encontrar una gran cantidad de publicaciones dedicadas a la definición y desarrollo de modelos, operadores y procesos de ***selección de alternativas***, definidos tanto en contextos homogéneos [31, 47, 59, 72, 75,

112, 114, 117, 120, 135, 159] como en contextos heterogéneos [46, 61, 83, 86, 177].

Sin embargo respecto al consenso existen diversas limitaciones que no han sido abordadas suficientemente. El interés de esta memoria se centra en el estudio del proceso de **consenso** en problemas de Toma de Decisiones en Grupo definidos en contextos lingüísticos multigranulares con el propósito de resolver tales limitaciones y mejorar el comportamiento y resultados obtenidos en este proceso. Los problemas que abordamos son los siguientes:

- La existencia de una figura humana que interviene en cada ronda de consenso en calidad de moderador y que no permite automatizar el proceso de consenso.
- La inexistencia de operadores y medidas que permitan evaluar el nivel de acuerdo que existe entre los expertos en contextos con información lingüística multigranular.
- La persistencia de actuación en los modelos de consenso repitiendo el mismo comportamiento independientemente del nivel de acuerdo alcanzado, hace que muchas veces estos procesos se alarguen demasiado en el tiempo y pierdan efectividad.

Debido a la necesidad de mejorar los procesos de consenso en problemas de toma de decisiones en grupo en general y de problemas definidos en contextos lingüísticos multigranulares en particular, nos proponemos en esta memoria desarrollar modelos que lleven a cabo los procesos de consenso de forma automática. Además, estos modelos han de ser capaces de adaptar el proceso de búsqueda del consenso al nivel de acuerdo existente en cada ronda de consenso.

Objetivos

Los objetivos de esta memoria son los siguientes:

- Diseño de un modelo de sistema de apoyo al consenso automático que reemplace las diferentes tareas que se realizan de forma manual así como a las figuras humanas presentes en los procesos de consenso. Este modelo asumirá el rol desarrollado por la figura del moderador realizando las tareas habituales del mismo como son la identificación de los expertos más alejados del consenso y la recomendación de los cambios de opinión que deberían acometer tales expertos para mejorar el consenso.
- Definir el conjunto de medidas y operadores de consenso necesarios para que el modelo propuesto pueda ser utilizado en problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos lingüísticos multigranulares, es decir, contextos en los que cada experto pueda utilizar un conjunto de términos lingüísticos con diferente granularidad atendiendo al grado de conocimiento que tenga sobre las distintas alternativas del problema. Estos operadores estarán basados en el modelo computacional difuso.
- Diseño de un modelo de sistema de apoyo al consenso *adaptativo* que permita mejorar y optimizar los modelos de consenso existentes en la literatura. Esta mejora consiste en adaptar el proceso de búsqueda del consenso al nivel de acuerdo alcanzado en cada una de las rondas de consenso.

Estructura de la Memoria

Los objetivos planteados se alcanzan a lo largo de esta memoria estructurada en cuatro capítulos. A continuación presentamos un breve resumen de cada uno de ellos:

- En el Capítulo 1 se hace una breve revisión de las características de los problemas de toma de decisiones, dedicando especial interés al modelado de preferencias en problemas de decisión con incertidumbre, centrándonos fundamentalmente en el modelado de preferencias en contextos lingüísticos y en el Enfoque Lingüístico Difuso, puesto que será el que utilizemos en los modelos presentados en esta memoria. Finalizaremos introduciendo los problemas de Toma de Decisión en Grupo en ambientes difusos.
- En el Capítulo 2 se hace una amplia revisión del proceso de consenso en problemas de Toma de Decisión en Grupo. Para ello, en primer lugar se estudia el significado y evolución del concepto de consenso a lo largo del tiempo. A continuación, en segundo lugar, se describen las diferentes fases que componen un proceso de consenso estándar y se finalizará este capítulo haciendo una revisión de distintos modelos de consenso propuestos en la literatura.
- En el Capítulo 3 se presenta el análisis y diseño de un modelo de sistema de apoyo al consenso automático para problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos con información lingüística multigranular. Se comenzará definiendo el contexto de definición del problema y a continuación se presentarán las distintas fases que componen el modelo de sistema. Para mostrar el funcionamiento del modelo presentaremos un ejemplo.

- Los modelos de consenso revisados en el Capítulo 2 junto al propuesto en el Capítulo 3 siguen siempre el mismo patrón de funcionamiento independientemente del nivel de acuerdo alcanzando entre los expertos durante el proceso de consenso. En el Capítulo 4 se propone un modelo de sistema de apoyo al consenso adaptativo que pretende optimizar los procesos de consenso. Esta optimización consistirá en adaptar el proceso de búsqueda del consenso al nivel de acuerdo existente en cada ronda de consenso de forma que se mejore la convergencia hacia el acuerdo y se reduzcan el número de rondas y el número de cambios conforme el grado de consenso vaya mejorando. Para conseguir este objetivo se definirán tres procesos diferentes para identificar las preferencias a cambiar según el acuerdo esté más o menos cercano:

- Proceso de búsqueda de preferencias cuando el acuerdo está muy lejano.
- Proceso de búsqueda de preferencias cuando el acuerdo está lejano.
- Proceso de búsqueda de preferencias cuando el acuerdo está próximo.

Las ideas recogidas en estos tres procesos y que definen el funcionamiento de los mismos son independientes del dominio de información, pudiendo aplicarse tanto en dominios homogéneos como heterogéneos. Sin embargo, con el propósito de comparar y comprobar como la nueva propuesta mejora los resultados obtenidos por el modelo presentado en el Capítulo 3 para tratar información lingüística multigranular, terminaremos este capítulo resolviendo el mismo problema planteado en el anterior.

- Finalmente, se presentan las conclusiones y resultados más relevantes obtenidos de la investigación realizada en esta memoria así como las futuras

líneas de investigación a seguir a partir de la misma. La memoria concluye con una recopilación bibliográfica de las contribuciones más destacadas en la materia estudiada.

Capítulo 1

Problemas de Toma de Decisión en Grupo en Ambiente Difuso: Modelado de Preferencias y el Enfoque Lingüístico Difuso

En este capítulo se hace una revisión de los problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en un contexto difuso, es decir, problemas de decisión en los que participan varios individuos y en los que se trabaja con información vaga e imprecisa.

En primer lugar describiremos las características de los problemas de Toma de Decisión. A continuación se abordará el concepto de modelado de preferencias, haciendo una distinción entre las estructuras que utilizan para expresar y representar las preferencias y el dominio de la información en el que los expertos las expresan. En tercer lugar se hará una breve revisión de nociones y conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos que nos va a servir para introducir los conceptos más importantes relacionados con el Enfoque Lingüístico Difuso. Finalmente concluiremos este capítulo definiendo las características de los problemas de Toma de Decisión en Grupo (TDG) en ambiente difuso sobre los que hemos

llevado a cabo la investigación de esta memoria.

1.1. El Problema de la Toma de Decisión

En un sentido amplio, tomar una decisión consiste en elegir la mejor opción o alternativa de entre un conjunto de alternativas posibles. Muchas de las actividades humanas precisan en algún momento tomar decisiones. Diariamente nos enfrentamos a situaciones en las que debemos decidir qué hacer o qué alternativa tomar en función del entorno en el que nos encontramos. Por citar un ejemplo cercano a todos nosotros, la elección de qué carrera universitaria estudiar supuso en su día un problema de toma de decisión que seguro nos obligó a sopesar, analizar y comparar las distintas alternativas con el propósito de elegir la más adecuada.

Cada vez que se plantea la necesidad de tomar una decisión, ésta va acompañada de un conjunto de posibles alternativas que a su vez tienen una serie de consecuencias que pueden hacernos dudar sobre la idoneidad de cada una de ellas. La incertidumbre suele ser una compañera presente en los procesos de toma de decisión que produce malestar e inseguridad a los individuos que deben tomar las decisiones.

La Toma de Decisiones, como apuntan Keeney y Raiffa [105], intenta ayudar a los individuos a tomar decisiones difíciles y complejas de una forma racional. Esta racionalidad implica el desarrollo de métodos y/o modelos que permitan representar fielmente cada problema y analizar las distintas alternativas con criterios objetivos. Partiendo de disciplinas clásicas como la Estadística, la Economía y la Matemática, a las que se les han unido otras más recientes como la Inteligencia Artificial, se han desarrollado teorías y modelos en el campo de la toma de decisiones que han permitido estructurar de una forma lógica y racional el proceso

de toma de decisión y facilitar esta tarea a los individuos encargados de llevarla a cabo.

Los problemas clásicos de decisión presentan los siguientes elementos básicos [35]:

1. Uno o varios objetivos por resolver.
2. Un conjunto de alternativas o decisiones posibles para alcanzar dichos objetivos.
3. Un conjunto de factores o estados de la naturaleza que definen el contexto en el que se plantea el problema de decisión.
4. Un conjunto de valores de utilidad o consecuencias asociados a los pares formados por cada alternativa y estado de la naturaleza.

Ante la gran variedad de situaciones o problemas de decisión que se pueden presentar en la vida real, la Teoría de la Decisión ha establecido una serie de criterios que permiten clasificar los problemas atendiendo a diferentes puntos de vista:

1. Según el número de criterios o atributos que se han de valorar en la toma de decisión.
2. Según el ambiente de decisión en el que se han de tomar las decisiones.
3. Según el número de expertos que participan en el proceso de decisión.

En los siguientes apartados se hace una breve revisión de las características que definen cada uno de estos puntos de vista.

1.1.1. Según el número de criterios

El número de criterios (también denominados atributos) que se tienen en cuenta en los procesos de decisión para obtener la solución también permite clasificar a los problemas de decisión en dos tipos [26, 66, 97, 137, 157]:

1. Problemas con un sólo criterio o atributo. Problemas de decisión en los que para evaluar las alternativas se tiene en cuenta un único valor que representa la valoración dada a esa alternativa. La solución se obtiene como la alternativa que mejor resuelve el problema teniendo en cuenta este único criterio de decisión.
2. Problemas multicriterio o multiatributo. Problemas de decisión en los que para evaluar las alternativas se tienen en cuenta los valores de dos o más criterios o atributos que definen las características de cada alternativa. La alternativa solución será aquella que mejor resuelva el problema considerando todos estos criterios o atributos.

Ambos tipos se pueden diferenciar perfectamente con el siguiente ejemplo. Supongamos un problema de decisión en el que nos planteamos cambiar de trabajo y nos ofrecen tres posibles alternativas, cada una de ellas caracterizada por tres atributos como son el sueldo, la ubicación geográfica y tipo de trabajo a desarrollar. Este problema puede ser muy simple si para tomar la decisión consideramos como único criterio de decisión elegir la alternativa con mejor sueldo. Sin embargo, este mismo problema se complicaría y el proceso para resolverlo sería diferente si además de considerar el sueldo también tuviésemos en cuenta el tipo de trabajo y/o la ubicación geográfica del mismo. En este segundo caso estaríamos ante un problema en el que hemos de considerar varios atributos o criterios antes de to-

mar un decisión y por lo tanto, estaríamos hablando de un problema de decisión multicriterio o multiatributo.

Los problemas de toma de decisión multicriterio son más complejos de resolver que los problemas en los que sólo hay que tener en cuenta un criterio para obtener la solución. Cada criterio puede establecer un orden de preferencia particular y diferente sobre el conjunto de alternativas. A partir del conjunto de órdenes de preferencia particulares será necesario establecer algún mecanismo que permita construir un orden global de preferencia.

Existe cierta similitud entre los problemas de decisión multicriterio y los problemas de TDG. En ambos casos, existen múltiples órdenes de preferencia sobre las alternativas y es necesario integrarlos en un único orden global de preferencia. La diferencia consiste en que en los problemas de TDG los ordenes de preferencia representan la importancia de las alternativas según cada persona y en los problemas multicriterio los ordenes representan la importancia de cada alternativa respecto a cada criterio.

El número de criterios en problemas de decisión multicriterio se asume que es finito. Sean $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ el conjunto de alternativas y el conjunto de criterios que caracterizan una situación de decisión determinada. Entonces, una forma de representación de la información del problema puede expresarse mediante la siguiente tabla:

Alternativas	<i>Criterios</i>			
	c_1	c_2	...	c_m
(x_i)				
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m}
...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nm}

Tabla 1.1: Esquema general de un problema de toma de decisiones multicriterio

Cada entrada de la tabla y_{ij} indica la preferencia de la alternativa x_i respecto del criterio c_j . Según el contexto de definición del problema, cada y_{ij} podrá estar valorado en un dominio de expresión de preferencias determinado (numérico, lingüístico,...).

1.1.2. Según el ambiente de decisión

El ambiente de decisión viene definido por las características y contexto en el que se va a llevar a cabo la toma de decisiones. La Teoría Clásica de la Decisión distingue tres situaciones o ambientes de decisión [56, 136]:

1. Ambiente de certidumbre.

Un problema de decisión está definido en un ambiente de certidumbre cuando son conocidos con exactitud todos los elementos y/o factores que intervienen en el problema. Esta situación permite asignar valores precisos de utilidad a cada una de las alternativas presentes en el problema.

Como ejemplo, supongamos que disponemos de una determinada cantidad de dinero que queremos invertir en alguno de los diferentes productos financieros del mercado que nos garantice la inversión realizada (ej., imposición a plazo fijo). Asumiendo que conocemos con exactitud la rentabilidad de cada producto, los gastos de gestión, la duración del mismo, deberemos decidir en que producto invertir para maximizar la inversión realizada. En este caso conocemos todos los factores que se han de tener en cuenta para la toma de decisión y el problema consistirá en estructurar correctamente esta información y establecer las preferencias entre las alternativas de forma que nos permita elegir aquella que maximice el beneficio esperado.

2. Ambiente de riesgo.

Un problema de decisión está definido en un ambiente de riesgo cuando alguno de los elementos o factores que intervienen están sujetos a las leyes del azar. En estos casos estos problemas son resueltos utilizando la Teoría de la Probabilidad.

Continuando con el mismo ejemplo, si la inversión la queremos realizar en la bolsa, inmediatamente surgen dudas sobre una posible subida o bajada en la cotización de las acciones en las que se invierta el dinero. En este caso el enfoque del problema ha de ser diferente y se utilizará una distribución de probabilidad para reflejar la posible subida o bajada de la bolsa que influirá en la utilidad de cada una de las posibles alternativas en las que invertir el dinero.

3. Ambiente de Incertidumbre.

Un problema de decisión está definido en un ambiente de incertidumbre cuando la información disponible sobre las distintas alternativas puede ser incompleta, vaga o imprecisa, lo que implica que la utilidad asignada a cada alternativa tenga que ser valorada de forma aproximada. Esta incertidumbre surge a raíz del intento de modelar la imprecisión propia del comportamiento humano o la inherente a ciertos fenómenos que por su naturaleza son inciertos.

Los métodos clásicos no son adecuados para tratar situaciones en los que la incertidumbre se debe a la aparición de información vaga e imprecisa como por ejemplo la que puede surgir al intentar valorar fenómenos relacionados con apreciaciones sensoriales y subjetivas de los expertos. Esto ha generado la necesidad de recurrir a la definición de nuevos modelos basados en la

Teoría de los Conjuntos Difusos [170] para modelar la incertidumbre como pueden ser los Rough Sets [55, 69, 95], Conjuntos Difusos Intuicionistas [8, 24, 25], etc.

1.1.3. Según el número de expertos

Finalmente, otro punto de vista a la hora de clasificar los problemas de decisión hace referencia al número de expertos o fuentes de información que toman parte en el proceso. Un proceso de toma de decisión en el que participan varios expertos es más complejo que otro en el que la toma de decisión se realiza de forma individual. Sin embargo, el hecho de que intervengan varios expertos con puntos de vista diferentes puede ofrecer una solución más satisfactoria al problema.

Atendiendo al número de expertos o fuentes de información que toman parte en la toma de decisión, los problemas de decisión se pueden clasificar en dos tipos:

1. Unipersonales o individuales. Las decisiones son tomadas por un sólo experto.
2. En Grupo o Multiexperto. Las decisiones son tomadas en conjunto por un grupo de expertos que intentan alcanzar una solución en común al problema.

Los problemas abordados en esta memoria pertenecen al segundo tipo, tratándose con mayor profundidad en Sección 1.5.

1.2. Modelado de Preferencias

El modelado de preferencias es una de las actividades inevitables en los problemas de Toma de Decisión, independientemente del área en el que se esté trabajando (Economía [6, 44], Psicología [28, 41, 103], Teoría de la Decisión [65, 131, 134,

140], ...). Los expertos en base a su conocimiento, experiencias y creencias han de emitir sus valoraciones sobre el conjunto de alternativas y establecer un orden de preferencia sobre la idoneidad de cada una ellas como solución al problema.

En los problemas de decisión los expertos utilizan modelos de representación de preferencias que le resulten cercanos a sus disciplinas o campos de trabajo. Por ejemplo, expertos que pertenecen a áreas técnicas se pueden sentir muy cómodos representando sus preferencias mediante valores numéricos. Sin embargo, expertos que pertenecen a otro tipo de disciplinas menos técnicas como pueden ser las pertenecientes a áreas sociales (Psicología, Sociología, ...), pueden preferir expresar sus preferencias utilizando expresiones más cercanas al lenguaje humano tales como palabras o términos lingüísticos. Para manejar este tipo de valoraciones se han definido diferentes mecanismos que permiten transformar las preferencias de los expertos en representaciones matemáticas que admiten un tratamiento matemático, racional y consistente de dicha información.

El modelado de preferencias es un área de trabajo dentro de la Toma de Decisión dedicada a la representación de las preferencias de los expertos [51, 131, 140]. Para hacer su revisión, vamos a considerar dos puntos de vista claramente diferenciados pero igualmente transcendentales, como son:

- a) *La estructura de información* utilizada por los expertos para la representación de sus preferencias.
- b) *El dominio de la información* en el que se expresan las preferencias sobre el conjunto de alternativas al problema.

Ambos puntos de vista presentan diferentes variantes que dependerán del problema que se esté tratando.

1.2.1. Estructuras para la representación de preferencias

En esta sección haremos un repaso de las estructuras de información más utilizadas en la literatura para la representación de las preferencias de los expertos [89, 93, 149]:

- Vectores de Utilidad
- Órdenes de Preferencia
- Relaciones de Preferencia

Cada una de ellas se representa y se interpreta de forma diferente tal y como se recoge en los siguientes apartados.

1.2.1.1 Vectores de Utilidad

Los vectores de utilidad han sido una estructura de representación de información ampliamente utilizada en la literatura clásica para representar las preferencias de los expertos [50, 118, 149]. Es una estructura muy simple basada en un vector donde cada elemento se interpreta como la preferencia o utilidad de una de las alternativas del problema.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$). Las preferencias dadas por los expertos sobre el conjunto de alternativas X utilizando vectores de utilidades U^i serían las siguientes:

$$U^i = \{u_1^i, \dots, u_n^i\}$$

donde u_j^i representa la utilidad o valoración dada por el experto i a la alternativa j . Se asume que cuanto mayor sea el valor de u_j^i , más satisface la alternativa j el objetivo del problema según la opinión del experto i .

En la Sección 1.2.2 donde se presentarán los diferentes dominios para el modelado de preferencias, aparecen más ejemplos de representación de preferencias utilizando vectores de utilidad.

1.2.1.2 Órdenes de Preferencia

En esta estructura de representación de preferencias se establece un ranking u orden de alternativas que representa la idoneidad de cada alternativa como solución al problema según el punto de vista de cada experto [93, 146, 148].

Un orden de preferencia O^i representa un orden dado por el experto i sobre el conjunto de alternativas X atendiendo a sus preferencias. Se representa mediante un vector ordenado decreciente del conjunto de alternativas,

$$O^i = \{o^i(1), \dots, o^i(n)\}$$

Para todo orden de preferencia O^i , suponemos sin pérdida de generalidad que cuando menor es la posición de una alternativa en dicho orden, esta alternativa es más preferida que el resto para resolver el problema según la opinión del experto i .

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Las preferencias dadas por los expertos 1 y 2 sobre el conjunto de alternativas X utilizando órdenes de preferencia podrían ser las siguientes:

$$O^1 = \{3, 2, 1, 4\}$$

$$O^2 = \{2, 3, 1, 4\}$$

En este ejemplo, el experto 1 considera que la mejor alternativa para resolver el problema es x_3 y la peor x_4 . Sin embargo, para el experto 2 la mejor alternativa es x_2 y la peor también es x_4 .

1.2.1.3 Relaciones de Preferencia

En la Teoría Clásica de Preferencias [140], las preferencias sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ se pueden modelar como relaciones binarias entre pares de alternativas $x_l R x_k$ ($x_l, x_k \in X$), que se interpretan como la intensidad o el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k .

Cuando se trabaja con conjuntos de alternativas finitos, una estructura de información capaz de soportar este tipo de relaciones binarias entre alternativas son las relaciones de preferencia.

Una relación de preferencia individual se representa como una matriz $P_{e_i} \subset X \times X$, donde el valor $\mu_{P_{e_i}}(x_l, x_k) = p_i^{lk}$ representa el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k [115, 149, 169],

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

Tradicionalmente, en los problemas de TDG en ambientes difusos, los expertos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X utilizando relaciones de preferencia difusas valoradas numéricamente en $[0, 1]$ [33, 64, 102, 179],

$$\mu_{P_{e_i}} : X \times X \rightarrow [0, 1]$$

Partiendo de esta representación, de los valores p_i^{lk} se debe destacar que:

- $p_i^{lk} = 1/2$, significa que hay indiferencia sobre la preferencia entre ambas alternativas.
- $p_i^{lk} \geq 1/2$, significa que la alternativa x_l es preferida sobre la x_k .
- $p_i^{lk} = 1$, significa que la alternativa x_l es totalmente preferida sobre la x_k .

En los problemas de decisión es importante que las opiniones de los expertos sean consistentes. Para garantizar esta consistencia a las relaciones de preferencia se les puede requerir que satisfagan algunas de las siguientes propiedades [86, 144]:

- Reciprocidad: $p_i^{lk} + p_i^{kl} = 1, \forall l, k = 1, \dots, n$
- Completitud: $p_i^{lk} + p_i^{kl} \geq 1, \forall l, k = 1, \dots, n$
- Transitividad max-min: $p_i^{lk} \geq \min(p_i^{lj}, p_i^{jk}), \forall l, j, k = 1, \dots, n$
- Transitividad max-max: $p_i^{lk} \geq \max(p_i^{lj}, p_i^{jk}), \forall l, j, k = 1, \dots, n$
- Transitividad max-min restrictiva: $p_i^{lj} \geq 0.5, p_i^{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p_i^{lk} \geq \min(p_i^{lj}, p_i^{jk}), \forall l, j, k = 1, \dots, n$
- Transitividad max-max restrictiva: $p_i^{lj} \geq 0.5, p_i^{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p_i^{lk} \geq \max(p_i^{lj}, p_i^{jk}), \forall l, j, k = 1, \dots, n$
- Transitividad aditiva: $p_i^{lj} + p_i^{jk} - 0.5 = p_i^{lk}, \forall l, j, k = 1, \dots, n$

En las relaciones de preferencia es habitual no definir los elementos de la diagonal principal o en el caso de hacerlo asignarles el valor $p_i^{ll} = 1/2$. Esto se debe a que no tiene sentido comparar cada alternativa consigo misma.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Las preferencias dadas por el experto 1 sobre el conjunto de alternativas X definido en un dominio numérico en $[0, 1]$ utilizando una relación de preferencia difusa P_{e_1} tendría el siguiente aspecto:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & - & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & - & 0.2 \\ 1 & 0.4 & 0.8 & - \end{pmatrix}$$

Finalmente destacar que las relaciones de preferencia han sido utilizadas satisfactoriamente por muchos autores para resolver problemas decisión en grupo [60, 77, 85, 99, 101, 158], siendo también utilizadas en las propuestas de esta memoria para representar las preferencias de los expertos.

1.2.2. Dominios de expresión de preferencias

En problemas de decisión entendemos por dominio de expresión de preferencias el dominio de información utilizado por los expertos para expresar sus preferencias.

En la literatura podemos encontrar problemas de toma de decisión en los que todos los expertos expresan sus preferencias en el mismo dominio de información, hablándose de problemas definidos en contextos homogéneos [16, 31, 47, 59, 72, 75, 112, 114, 117, 120, 135, 159], o bien problemas en los que los expertos utilizan dominios de información diferentes, conocidos como problemas definidos en contextos heterogéneos [46, 61, 83, 86, 177].

En problemas de TDG, la elección de un dominio de información para expresar las preferencias puede deberse a varios motivos:

- a) Expertos con diferente grado de conocimiento sobre el problema. La experiencia de los expertos en la resolución de problemas similares puede implicar que unos expertos opten por elegir dominios de expresión de preferencias precisos como valores numéricos exactos (0, 1, 100, 2500, ...) frente a otros

expertos con menos experiencia y que se sientan más cómodos utilizando dominios más flexibles como los intervalos.

- b) Pertenencia de los expertos a diferentes áreas de conocimiento. Siempre que sea posible, cada experto tenderá a utilizar un dominio de información que le resulte cercano al tipo de información con el que esté acostumbrado a trabajar en su respectiva área de trabajo. Así, expertos pertenecientes a áreas técnicas se sentirán cómodos utilizando valoraciones numéricas mientras que aquellos pertenecientes a áreas sociales pueden preferir utilizar otro tipo de valoraciones no numéricas como las lingüísticas.
- c) Naturaleza cuantitativa o cualitativa de la información con la que se esté trabajando. La naturaleza del fenómeno que se esté evaluando puede condicionar el dominio utilizado para su valoración. Fenómenos de naturaleza cuantitativa admiten mucho mejor valoraciones de tipo numérico que aquellos otros de naturaleza cualitativa en los que al tratarse por ejemplo sensaciones o percepciones de los expertos, el uso de otro tipo de valoraciones como palabras o términos lingüísticos (“bueno”, “malo”, “mejor”, ...) puede ser mucho más apropiado [32, 72, 82, 98, 116].

Adaptar el modelado de preferencias al contexto en el que se desarrolla el problema de decisión consigue que los expertos se sientan más seguros a la hora de valorar sus preferencias y por lo tanto que la solución final tenga mayor garantía de éxito [51].

En la literatura [46, 59, 86, 112, 177] encontramos que los expertos utilizan principalmente tres tipos de dominios de información para expresar sus preferencias:

- Dominio Numérico
- Dominio Intervalar
- Dominio Lingüístico

Ejemplos, características y una breve justificación de las circunstancias en las que es adecuado utilizar un dominio u otro se presentan en los siguientes apartados.

1.2.2.1 Dominio Numérico

El uso del dominio numérico para modelar las preferencias implica que los expertos expresen sus preferencias mediante valores numéricos. Dentro del área de investigación en la que estamos trabajando, sobre este dominio podemos encontrar dos variantes:

a) Numérico Binario. Como su propio nombre indica, el modelado numérico binario se caracteriza por utilizar exclusivamente dos valores para cuantificar la utilidad de cada alternativa. Normalmente se utilizan los valores $\{0, 1\}$, donde el 0 representa una valoración negativa de la alternativa y el 1 representa una valoración positiva.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Cada experto i utiliza un vector de utilidades $U^i = \{u_1^i, \dots, u_n^i\}$ para expresar sus preferencias, donde a cada alternativa de X se le asigna un valor de utilidad del dominio binario, $u_j^i \in \{0, 1\}$. Los valores dados por e_1 y e_2 pueden ser los siguientes:

$$U^1 = \{1, 0, 0, 1\}$$

$$U^2 = \{0, 0, 1, 0\}$$

donde las alternativas x_1 y x_4 son valoradas positivamente por el experto 1 y las alternativas x_1, x_2 y x_4 reciben una valoración negativa por parte del experto 2.

El modelado de preferencias utilizando dominios binarios ha formado parte de la visión clásica y “crisp” de la toma de decisión en la que los expertos sólo podían indicar si una alternativa era considerada como buena o mala para resolver el problema, no teniendo la posibilidad de introducir cierta incertidumbre sobre la utilidad o bondad de cada alternativa como solución al problema. Esta forma tan rígida o “crisp” de expresión de preferencias ha ido cambiando con el tiempo y ha tendido hacia el uso de dominios menos restrictivos que permiten reflejar la incertidumbre presente en los problemas de decisión.

b) Numérico normalizado en el intervalo $[0, 1]$. Los expertos utilizan un valor numérico dentro del intervalo $[0, 1]$ para modelar la preferencia sobre cada alternativa [64, 86, 115]. A diferencia del dominio anterior donde sólo se admiten dos posibles valores, ahora se pueden utilizar valores reales dentro de este intervalo que permiten establecer un orden de preferencia entre las distintas alternativas en función de la utilidad asignada a cada una de ellas.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Un ejemplo de preferencias dadas por los expertos 1 y 2 sobre el conjunto de alternativas X utilizando un dominio de expresión dentro del intervalo $[0, 1]$ y vectores de utilidad podría ser el siguiente:

$$U^1 = \{1, 0.2, 0, 0.6\}$$

$$U^2 = \{0, 0.4, 0.7, 0.9\}$$

Podemos comprobar como el experto 1 considera que la alternativa x_1 es la mejor y le asigna una utilidad máxima. Por el contrario, considera la alternativa x_3 peor que la x_2 asignándole una utilidad de 0 y 0.2 respectivamente. Para el experto 2, la mejor alternativa sería x_4 y la peor la x_1 .

1.2.2.2 Dominio Intervalar

El hecho de considerar la incertidumbre en los problemas de decisión ha originado la necesidad de definir modelados de preferencias más flexibles capaces de recoger dicha incertidumbre, siendo el modelado intervalar uno de ellos. La valoración de alternativas por medio de intervalos $[a, \bar{a}]$ ($a \leq \bar{a}$) se ha mostrado como una técnica eficaz para tratar la incertidumbre en ciertos problemas de decisión [2, 112, 150]. Los expertos han de valorar alternativas sobre las que no tienen un conocimiento lo suficientemente preciso para asignarles valores exactos mediante un valor numérico. En estos casos la utilización del modelado de preferencias mediante valores intervalares hace que los expertos se sientan más seguros en sus valoraciones y que los resultados de problema aunque no sean exactos estén delimitados.

Un ejemplo de problema de decisión donde puede apreciarse como el uso de intervalos resuelve el problema de la incertidumbre podría ser el siguiente. Supongamos que los expertos han de opinar sobre el consumo de combustible de diferentes vehículos con el propósito de elegir el vehículo de menor consumo. Sería arriesgado e inapropiado que estimasen el consumo de combustible mediante un valor numérico exacto debido a que si se llevase a cabo una prueba de consumo real, el resultado también dependería de elementos externos no controlados por los expertos (viento, pericia del conductor, etc) que añadirían incertidumbre y condicionarían el resultado de la misma. En este caso el resultado del problema sería más fiable si los expertos utilizasen intervalos $[a, \bar{a}]$ (ej., entre [5.0,6.0] li-

tros/100km) para expresar sus preferencias en lugar de utilizar valores numéricos precisos que no reflejarían la incertidumbre del problema.

En los problemas consultados en la literatura donde se utilizan intervalos [2, 86], los expertos expresan sus preferencias mediante intervalos del tipo $[a, \bar{a}] \in [0, 1]$. En el caso de que no estuviesen definidos dentro de este rango tan sólo habría que aplicar un proceso de normalización en $[0, 1]$.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Los expertos 1 y 2 pueden expresar sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X utilizando un dominio de expresión intervalar en $[0, 1]$ y vectores de utilidad como:

$$U^1 = \{[0.5, 0.7], [0.2, 0.5], [0, 0.2], [0.7, 1]\}$$

$$U^2 = \{[0, 0.3], [0.3, 0.7], [0.7, 0.8], [0.8, 1]\}$$

En este ejemplo, la alternativa mejor valorada por el experto 1 es la numero 4, pero debido a la existencia de incertidumbre, el experto ha preferido utilizar un intervalo de utilidad $[0.7, 1]$ en lugar de un valor numérico más preciso.

1.2.2.3 Dominio Lingüístico

Los expertos pueden utilizar un modelado de preferencias lingüístico en aquellas situaciones de decisión en las que la información disponible es demasiado imprecisa o se valoran aspectos cuya naturaleza recomienda el uso de valoraciones cualitativas [34, 45, 72, 171, 173]. En estas situaciones, el experto puede considerar más adecuado utilizar una palabra o término lingüístico para expresar sus preferencias que un valor numérico más o menos preciso.

Son muchas las ocasiones en las que los expertos se sienten más cómodos utilizando este tipo de dominios lingüísticos, sobre todo si han de valorar aspectos relacionados con percepciones humanas muchas veces expresadas de forma imprecisa y donde es habitual utilizar palabras del lenguaje natural en lugar de números. Como ejemplo podemos citar el propuesto en [116] para valorar el nivel de confort de un vehículo. En este caso concreto, los expertos pueden preferir utilizar palabras como “malo”, “bueno”, “aceptable” para expresar su opinión sobre el grado de confort de un vehículo en lugar de utilizar valores numéricos.

Ejemplo

Sea $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n = 4$). Sea $S = \{muy_malo, malo, normal, bueno, muy_bueno\}$ el conjunto de términos o etiquetas lingüísticas utilizadas por los expertos para expresar sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X . Las preferencias dadas por los expertos 1 y 2 utilizando vectores de utilidad podrían ser las siguientes:

$$U^1 = \{muy_malo, bueno, malo, muy_bueno\}$$

$$U^2 = \{muy_bueno, malo, muy_malo, normal\}$$

En este ejemplo, según la opinión del experto 1, la alternativa mejor valorada es x_4 y la peor valorada x_1 . Por el contrario, el experto 2 considera que la mejor alternativa es x_1 y la peor x_3 .

Dentro de la Toma de Decisión Difusa, el Enfoque Lingüístico Difuso [171] ha sido la disciplina encargada de modelar las preferencias de los expertos que utilizan valoraciones lingüísticas para expresar sus preferencias [1, 5, 14, 17, 45, 47, 81, 155, 158].

Debido a la importancia del Enfoque Lingüístico Difuso en nuestras investigaciones y en concreto en los modelos de sistemas de consenso propuestos en esta memoria, se volverá a abordar en profundidad dentro de este capítulo en la Sección 1.4.

1.3. Nociones y Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos

La Teoría de los Conjuntos Difusos propuesta por L. Zadeh en la década de los 60 [170] tuvo por objeto modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos resultaban insuficientes o no operativos. Dicha teoría generaliza la noción clásica de conjunto e introdujo el concepto de “conjunto difuso” como aquel conjunto cuya frontera no es precisa. Los conjuntos difusos surgen como una nueva forma de representar la imprecisión y la incertidumbre [109, 179] diferente al tratamiento tradicional llevado a cabo por la Teoría Clásica de Conjuntos y Teoría de la Probabilidad. A lo largo de las cuatro décadas de existencia de la Teoría de Conjuntos Difusos, gran cantidad de investigadores le han prestado atención en sus investigaciones y la han aplicado en dos vertientes principales [133]:

1. Como una teoría matemática formal [94, 129], ampliando conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como el Álgebra, la Teoría de Grafos, la Topología, etc., al aplicar conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos a dichas áreas.
2. Como una potente herramienta para tratar situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre (imprecisión, vaguedad, inconsistencia, etc.).

Debido a la generalidad de esta teoría, ésta se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas: Teoría de Sistemas [22, 132], Teoría de la Decisión [66, 64], Bases de Datos [18, 168], etc. En muchas ocasiones esto implicará adaptar los conceptos originales de la Teoría de los Conjuntos Difusos a los diferentes contextos en los que se esté trabajando.

En este apartado haremos una pequeña revisión de los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos que utilizaremos en esta memoria. Esta introducción no pretender ser exhaustiva sino una breve presentación de dichos conceptos. Para mayor detalle, véase [109].

1.3.1. Conjuntos difusos y función de pertenencia

La noción de conjunto refleja la idea de agrupar colecciones de objetos que cumple una o varias propiedades que caracterizan a dicho conjunto. Una propiedad puede ser considerada como una función que a cada elemento del universo de discurso X le asigna un valor en el conjunto $\{0, 1\}$, de forma que si el elemento pertenece al conjunto, es decir, cumple la propiedad se le asigna el valor 1 o en caso contrario el valor 0.

Definición 1.1. *Sea A un conjunto en el universo X , la función característica asociada a A , $A(x)$, $x \in X$, se define como:*

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La función $A : X \rightarrow \{0, 1\}$ induce una restricción, con un límite bien definido, sobre los objetos del universo X que pueden ser asignados al conjunto A .

El concepto de conjunto difuso lo que hace es *relajar* esta restricción y admite

valores intermedios en la función característica, que pasa a denominarse *función de pertenencia*.

Esta relajación permite una interpretación más realista de ciertos contextos de trabajo. La mayoría de las categorías que describen los objetos del mundo real no tienen unos límites claros y bien definidos, por ejemplo, ordenador *potente*, *buen* sabor, coche *veloz*, etc. (las palabras en itálica identifican fuentes de imprecisión). Si un objeto pertenece a una categoría con un grado de pertenencia que puede ser expresado por un número real en el intervalo $[0, 1]$, cuanto más cercano a 1 sea el grado, indicará mayor pertenencia a esa categoría determinada y cuanto más cercano a 0 indicará menor pertenencia a dicha categoría.

1.3.2. Definición básica de conjunto difuso

Un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión completa) y 1 (pertenencia completa). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir los conjuntos difusos como sigue [170]:

Definición 1.2. *Un conjunto difuso \tilde{A} sobre X está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio, espacio, o universo del discurso X en el intervalo $[0, 1]$.*

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1].$$

Así, un conjunto difuso \tilde{A} en X puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico x , $x \in X$ y su grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}$$

Claramente, un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto cuya función de pertenencia toma sólo dos valores $\{0, 1\}$.

Ejemplo

Consideremos el concepto “persona joven”, en un contexto donde se clasifica a las personas atendiendo exclusivamente a la edad que oscila en el intervalo $E = [1, 110]$ años. Una persona cuya edad sea menor o igual a 30 años se puede considerar como joven y por lo tanto se le asignará un valor 1 a su grado de pertenencia al conjunto difuso de personas jóvenes. Una persona con una edad igual o superior a 65 años no puede considerarse como una persona joven y de ahí que se le asigne el valor 0 al grado de pertenencia al conjunto difuso de persona joven. La cuantificación del resto de valores puede llevarse a cabo mediante una función de pertenencia $\mu_{\tilde{J}} : E \rightarrow [0, 1]$ que caracteriza el conjunto difuso \tilde{J} de personas jóvenes en el universo $E = [1, 110]$.

$$\mu_{\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1, 30] \\ 1 - \frac{x-30}{35} & x \in (30, 65) \\ 0 & x \in [65, 110]. \end{cases}$$

Los conjuntos difusos pueden ser definidos sobre universos finitos o infinitos usando distintas notaciones. Si un universo X es discreto y finito, con cardinalidad n , el conjunto difuso puede expresarse con un vector n -dimensional cuyos valores son los grados de pertenencia de los correspondientes elementos de X . Por ejemplo, si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces un conjunto difuso $\tilde{A} = \{(a_i/x_i) | x_i \in X\}$, donde $a_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, puede notarse por [109]:

$$\tilde{A} = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n = \sum_{i=1}^n a_i/x_i.$$

Cuando el universo X es continuo, para representar un conjunto difuso usamos la

siguiente expresión:

$$\tilde{A} = \int_x a/x,$$

donde $a = \mu_{\tilde{A}}(x)$ y la integral debería ser interpretada de la misma forma que el sumatorio en el universo finito.

A continuación, introducimos otros conceptos básicos a la hora de trabajar con conjuntos difusos, como son el **soporte**, el **núcleo** y el α -**corte** de un conjunto difuso:

Definición 1.3. *El soporte de un conjunto difuso \tilde{A} , $\text{Soporte}(\tilde{A})$, es el conjunto de todos los elementos de $x \in X$, tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero.*

$$\text{Soporte}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Si esta definición la restringimos a aquellos elementos del universo X con grado de pertenencia igual a 1, tendríamos el núcleo del conjunto difuso.

Definición 1.4. *El núcleo de un conjunto difuso \tilde{A} , $\text{Núcleo}(\tilde{A})$, es el conjunto de todos los elementos de $x \in X$, tales que el grado de pertenencia es igual a 1.*

$$\text{Núcleo}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

En muchas ocasiones puede ser interesante conocer no sólo los elementos que pertenecen en algún grado al conjunto difuso, sino también conocer el conjunto de aquellos elementos que lo hacen con un valor al menos igual o mayor que un umbral determinado α . Estos conjuntos se denominan α -cortes.

Definición 1.5. *Sea \tilde{A} un conjunto difuso sobre el universo X , dado un número $\alpha \in [0, 1]$. Se define el α -corte sobre \tilde{A} , ${}^\alpha A$, como un conjunto que contiene todos los valores del universo X cuya función de pertenencia en \tilde{A} sea mayor o igual al*

valor α :

$${}^{\alpha}A = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

1.3.3. Tipos de funciones de pertenencia

En principio cualquier función $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$, describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso \tilde{A} que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Las gráficas de las funciones pueden tener diferentes representaciones o formas y pueden tener algunas propiedades específicas (ej., continuidad).

Los conjuntos difusos suelen representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son las siguientes:

1. Función Triangular:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in [b, c] \\ 0 & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde b es el punto modal de la función triangular y a y c los límites inferior y superior, respectivamente, para los valores no nulos de $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

2. Función Trapezoidal:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in [b, d] \\ \frac{c-x}{c-d} & \text{si } x \in [d, c] \\ 0 & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde b y d indican el intervalo dónde la función de pertenencia vale 1.

3. **Función Gaussiana:**

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2},$$

donde $k > 0$.

1.3.4. **Principio de extensión**

El Principio de Extensión es un concepto básico de la Teoría de Conjuntos Difusos utilizado para generalizar conceptos matemáticos no difusos a conjuntos difusos. A lo largo del tiempo han aparecido diferentes formulaciones de este concepto [96, 109, 171] que se puede definir como:

Definición 1.6. *Sea X el producto cartesiano de los universos X_1, \dots, X_r y sean $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$, r conjuntos difusos en X_1, \dots, X_r respectivamente. Sea f una función definida desde el universo X , ($X = X_1 \times \dots \times X_r$), al universo Y , $y = f(x_1, \dots, x_r)$. El Principio de Extensión nos permite definir un conjunto difuso \tilde{B} en Y , a partir de los conjuntos difusos $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$ representando su imagen a partir de la función f , de acuerdo a la siguiente expresión,*

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x_1, \dots, x_r), (x_1, \dots, x_r) \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $r = 1$, el Principio de Extensión se reduce a:

$$\tilde{B} = f(A) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x), x \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1.3.5. Número difuso

Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen una especial significación aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales, \mathcal{R} .

$$\tilde{A} : \mathcal{R} \longrightarrow [0, 1]$$

Bajo ciertas condiciones estos conjuntos difusos pueden ser vistos como “números difusos” o “intervalos difusos”, definiéndose el concepto de número difuso como [171]:

Definición 1.7. *Un número difuso \tilde{A} es un subconjunto de \mathcal{R} que verifica las siguientes propiedades:*

1. *La función de pertenencia es convexa,*

$$\forall x, y \in \mathcal{R}, \forall z \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

2. *Para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, ${}^{\alpha}A$ debe ser un intervalo cerrado.*
3. *El soporte de \tilde{A} debe ser finito.*
4. *\tilde{A} está normalizado,*

$$\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

Casos particulares de números difusos [109]:

- Los números reales (Figura 1.1.a).
- Intervalos de números reales (Figura 1.1.b).

- Valores aproximados (Figura 1.1.c).
- Intervalos aproximados o difusos (Figura 1.1.d).

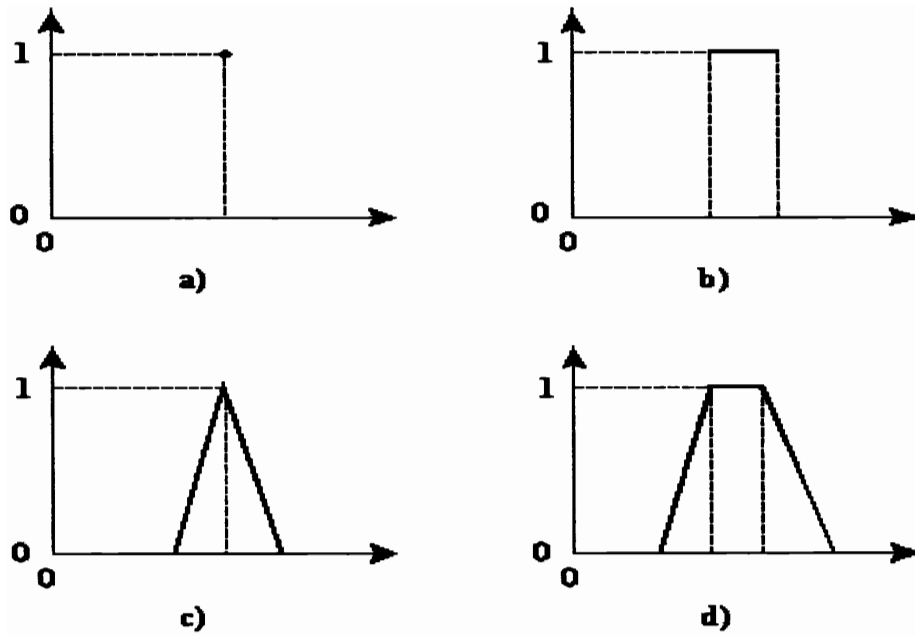


Figura 1.1: Ejemplos de números difusos

Para terminar esta sección dedicada a los conjuntos difusos tan sólo añadir que las operaciones aritméticas habituales sobre números reales se extienden a los números difusos mediante el Principio de Extensión presentado en el apartado 1.3.4

1.4. El Enfoque Lingüístico Difuso

Los problemas presentes en el mundo real presentan aspectos que pueden ser de distinta naturaleza. Cuando dichos aspectos o fenómenos son de naturaleza

cuantitativa, éstos se valoran fácilmente utilizando valores numéricos más o menos precisos. Sin embargo, cuando se trabaja con información vaga e imprecisa o cuando la naturaleza de tales aspectos no es cuantitativa sino cualitativa, no es sencillo ni adecuado utilizar un modelado de preferencias numérico, aconsejándose utilizar otro tipo de modelado como por ejemplo el lingüístico. Este tipo de aspectos suelen aparecer frecuentemente en problemas en los que se pretende evaluar fenómenos relacionados con percepciones y relaciones de los seres humanos (diseño, gusto, ...). En estos casos se suele utilizar palabras del lenguaje natural (bonito, feo, dulce, salado, simpático, ...) en lugar de valores numéricos para emitir tales valoraciones. Tal y como se indica en [33, 173], el uso de un modelado lingüístico de preferencias puede deberse a varias razones:

1. La información disponible con la que trabajan los expertos es demasiado vaga o imprecisa para ser valorada utilizando valores numéricos precisos.
2. Situaciones en las que la información no puede ser cuantificada debido a su naturaleza, y así, sólo puede “medirse” utilizando términos lingüísticos (ej., como se vio anteriormente al evaluar el “confort” o el “diseño” de un coche [116], el uso de términos como “bueno”, “medio”, “malo” suelen ser habituales).
3. Información cuantitativa que no puede medirse porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta o porque el coste de su medición es muy elevado. En este caso el uso de un “valor aproximado” que permita reflejar los distintos valores del problema puede ser adecuado (ej., imaginemos una situación en la que se pretende evaluar la velocidad de un coche y no disponemos de cronómetro, sirviéndonos tan sólo de nuestras percepciones, entonces se puede utilizar términos lingüísticos

como “rápido”, “muy rápido”, “lento” para medir la velocidad en lugar de valores numéricos).

El Enfoque Lingüístico Difuso, que tiene como base teórica la Teoría de los Conjuntos Difusos, se ha mostrado como una técnica eficaz para valorar aspectos de naturaleza cualitativa [1, 5, 14, 17, 45, 47, 73, 155, 158, 164]. Utiliza *variables lingüísticas* cuyo dominio de expresión son conjuntos de palabras o términos lingüísticos [171].

Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o *etiqueta* y por un *valor semántico* o *significado*. La etiqueta es una palabra o frase perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo del discurso. Al ser las palabras menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística es una buena propuesta para caracterizar aquellos fenómenos que no son adecuados para poder ser evaluados mediante valores numéricos. Formalmente una variable lingüística se definen como [171]:

Definición 1.8. *Una variable lingüística está caracterizada por una quintupla $(H, T(H), \mathcal{U}, G, M)$, en la que:*

- *H es el nombre de la variable.*
- *$T(H)$ es el conjunto de valores lingüísticos o etiquetas lingüísticas.*
- *\mathcal{U} es el universo de discurso de la variable.*
- *G es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los valores de $T(H)$.*

- *M es una regla semántica que asocia a cada elemento de $T(H)$ su significado. Para cada valor $L \in T(H)$, $M(L)$ será un subconjunto difuso de \mathcal{U} .*

Para resolver un problema desde el punto del vista del Enfoque Lingüístico Difuso es necesario llevar a cabo dos operaciones fundamentales:

1. Elección de un adecuado conjunto de términos lingüísticos, $T(H)$.
2. Definición de la semántica asociada a cada término lingüístico.

1.4.1. Elección del conjunto de términos lingüísticos

Para que una fuente de información (experto, juez, ...) pueda expresar con facilidad su información y/o conocimiento es necesario que disponga de un conjunto apropiado de descriptores lingüísticos. Un aspecto muy importante de este conjunto es el número de etiquetas lingüísticas disponible para expresar la información, denominado *la granularidad de la incertidumbre* [15].

Se dice que un conjunto de términos lingüísticos tiene:

- Una granularidad baja o un tamaño de grano grueso cuando la cardinalidad del conjunto de etiquetas lingüísticas es pequeña. Esto significa que el dominio está poco particionado y que existen pocos niveles de distinción de la incertidumbre, produciéndose una pérdida de expresividad.
- Una granularidad alta o un tamaño de grano fino cuando la cardinalidad del conjunto de etiquetas lingüísticas es alta. Esta situación puede provocar un aumento de la complejidad en la descripción del dominio.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos no debe ser demasiado pequeña como para imponer una restricción de precisión a la información que

quiere expresar cada fuente de información, y debe ser lo suficientemente grande para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Valores típicos de cardinalidad usados en modelos lingüísticos son valores impares, tales como 7 ó 9, donde el término medio representa una valoración de “aproximadamente 0.5”. El resto de los términos se distribuyen alrededor de éste [15]. Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de Miller [124] sobre la capacidad humana, en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de siete o nueve términos diferentes.

Una vez establecida la cardinalidad es necesario un mecanismo para generar los términos lingüísticos. Existen dos enfoques para esto, uno los define a partir de una gramática libre de contexto y el otro mediante un orden total definido sobre el conjunto de términos. A continuación analizamos ambos mecanismos.

1. Enfoque basado en una Gramática Libre de Contexto.

Una posibilidad para generar el conjunto de términos lingüísticos consiste en utilizar una gramática libre de contexto G , donde el conjunto de términos pertenece al lenguaje generado por G [14, 17, 172]. Una gramática generadora, G , es una 4-tupla (V_N, V_T, I, P) , siendo V_N el conjunto de símbolos no terminales, V_T el conjunto de símbolos terminales, I el símbolo inicial y P el conjunto de reglas de producción. La elección de estos cuatro elementos determinará la cardinalidad y forma del conjunto de términos lingüísticos. El lenguaje generado debería ser lo suficientemente grande para que pueda describir cualquier posible situación del problema.

De acuerdo con las observaciones de Miller [124], el lenguaje generado no tiene que ser infinito, sino mas bien fácilmente comprensible.

Por ejemplo, entre los símbolos terminales y no terminales de G podemos encontrar términos primarios (ej.: *alto*, *medio*, *bajo*), modificadores (ej.: *no*, *mucho*, *muy*, *más o menos*), relaciones (ej.: *mayor que*, *menor que*) y conectivos (ej.: *y*, *o*, *pero*). Construyendo I como cualquier término primario, el conjunto de términos lingüísticos $T(H) = \{muy\ alto, alto, alto\ o\ medio, \dots\}$ se genera usando P .

2. Enfoque basado en Términos Primarios con una Estructura ordenada.

Una alternativa para reducir la complejidad de definir una gramática consiste en dar directamente un conjunto de términos distribuidos sobre una escala con un orden total definido [16, 76, 162, 164]. Por ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de siete etiquetas $T(H) = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$:

$$\begin{aligned} s_0 &= N = Nada & s_1 &= MB = Muy_Bajo & s_2 &= B = Bajo \\ s_3 &= M = Medio & s_4 &= A = Alto & s_5 &= MA = Muy_Alto \\ s_6 &= P = Perfecto \end{aligned}$$

donde $s_i < s_j$ si y sólo si $i < j$.

Normalmente en estos casos es necesario que los términos lingüísticos satisfagan las siguientes condiciones adicionales:

1. Existe un operador de negación. Por ejemplo, $Neg(s_i) = s_j$, $j = g - i$ ($g+1$ es la cardinalidad de $T(H)$).
2. Tiene un operador de maximización: $máx(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.
3. Tiene un operador de minimización: $mín(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

1.4.2. Semántica del conjunto de términos lingüísticos

En la literatura existen varios enfoques para definir la semántica del conjunto de etiquetas lingüísticas [16, 153, 154, 162], siendo uno de los más utilizados el enfoque basado en funciones de pertenencia [15, 17, 47, 113, 151].

Este enfoque define la semántica del conjunto de términos lingüísticos utilizando números difusos en el intervalo $[0, 1]$, donde cada número difuso es descrito por una función de pertenencia.

Un método eficiente desde un punto de vista computacional para caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de su función de pertenencia [14]. Debido a que las valoraciones lingüísticas dadas por las fuentes de información son aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones de pertenencia trapezoidales son lo suficientemente buenas para representar la vaguedad de dichas valoraciones lingüísticas [14, 15, 47, 151, 152]. Esta representación paramétrica se expresa usando una 4-tupla (a, b, d, c) se muestra en la Figura 1.2. Los parámetros “ b ” y “ d ” indican el intervalo en el que la función de pertenencia vale 1; mientras que “ a ” y “ c ” indican los extremos izquierdo y derecho de la función de pertenencia [14].

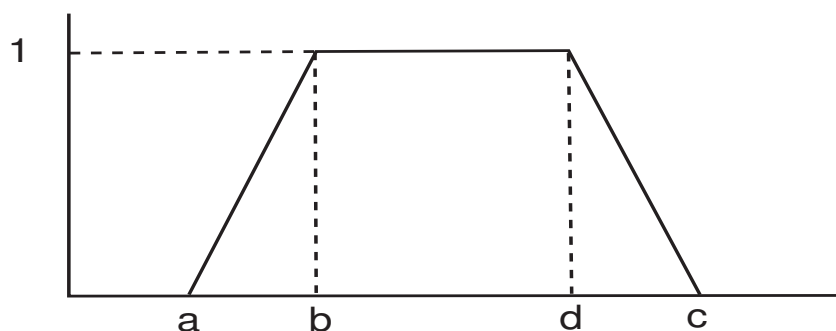


Figura 1.2: Número difuso trapezoidal

En la Figura 1.3 se muestra la semántica de una variable lingüística que evalúa la altura de una persona utilizando números difusos definidos por funciones de pertenencia trapezoidales:

$$T(\text{Altura}) = \{\text{Muy bajo}, \text{Bajo}, \text{Mediano}, \text{Alto}, \text{Muy Alto}\}$$

$$\text{Muy Bajo} = (0, 0, 1.2, 1.25)$$

$$\text{Bajo} = (1.2, 1.25, 1.35, 1.4)$$

$$\text{Mediano} = (1.35, 1.4, 1.6, 1.65)$$

$$\text{Alto} = (1.6, 1.65, 1.85, 1.9)$$

$$\text{Muy Alto} = (1.85, 1.9, 2, 2)$$

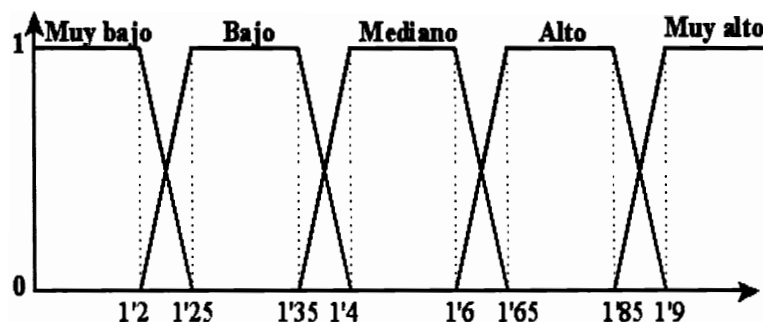


Figura 1.3: Definición semántica de la variable lingüística altura

Un caso particular de este tipo de representación son las funciones de pertenencia triangulares, en las que $b = d$. Se representan mediante una 3-tupla (a, b, c) , donde “ b ” es el valor donde la función de pertenencia vale 1, mientras que “ a ” y “ c ” indican los extremos izquierdo y derecho de la función.

La Figura 1.4 muestra el mismo conjunto visto anteriormente pero representado ahora con funciones de pertenencia triangulares.

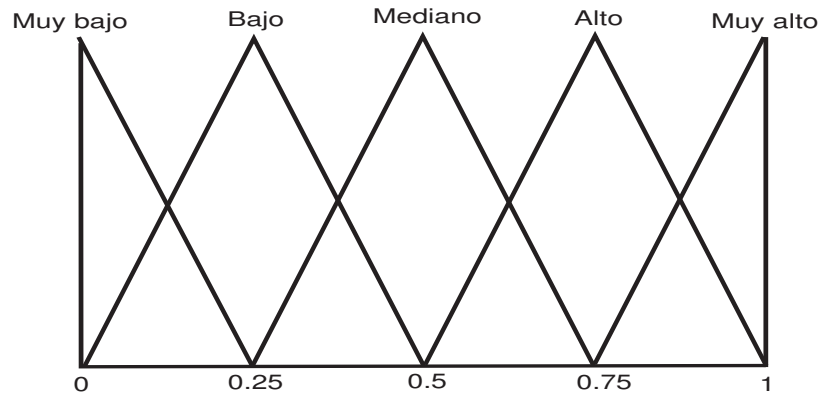


Figura 1.4: Conjunto de 5 etiquetas lingüísticas uniformemente distribuidas

Otros autores usan otro tipo de funciones como por ejemplo funciones Gausianas [17].

Este enfoque implica establecer las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta. Esta tarea presenta el problema de determinar los parámetros según los puntos de vista de todas las fuentes de información. En la realidad, es difícil que todas las fuentes de información propongan exactamente las mismas funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos primarios, debido a que cada una de ellas puede interpretar de forma parecida pero a la vez diferente el mismo concepto. Por ejemplo, en la Figura 1.5, vemos dos percepciones muy cercanas pero diferentes de la evaluación del concepto “excelente”.

Por lo tanto, pueden darse el caso de términos lingüísticos con una sintaxis similar pero con diferente semántica [73]. Este tipo de situaciones pueden presentarse en problemas de TDG en contextos lingüísticos donde algunos expertos utilizan conjuntos de términos lingüísticos iguales en sintaxis y cardinalidad pero con diferente semántica. Este tipo de problemas son los que abordamos en esta memoria tal y como veremos en el siguiente capítulo.

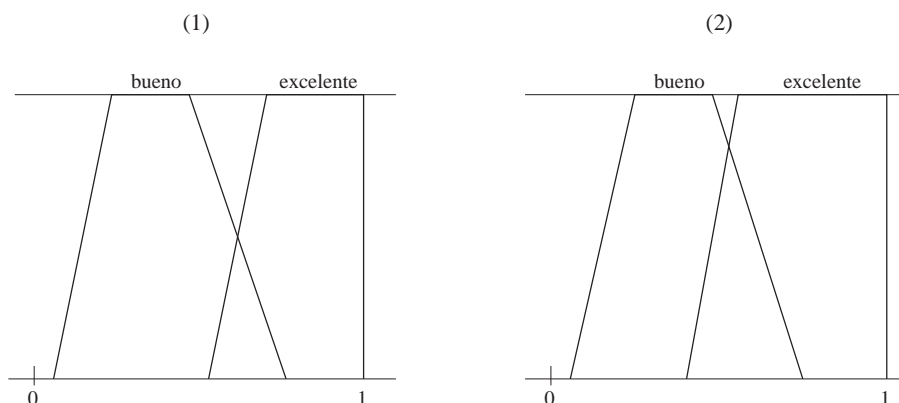


Figura 1.5: Distribuciones diferentes del concepto “excelente”

1.5. Resolución de Problemas de TDG en Ambiente Difuso

Tomar decisiones en grupo, como su propio nombre indica, implica la participación de varias personas que han de tomar decisiones de forma colectiva para alcanzar una solución común a un problema.

En el ámbito empresarial, las decisiones de mayor relevancia han sido tomadas normalmente por los directivos pertenecientes a los niveles intermedios y/o superiores de la estructura de la organización [4, 57] (Figura 1.6). Tradicionalmente estas decisiones ha sido propuestas a título individual por un único individuo que se ha encargado de evaluar las diferentes alternativas según sus propios criterios, conocimientos e intuiciones. Sin embargo, en la actualidad ésta visión individualizada de la toma de decisión está cambiando hacia otra visión más moderna en la que las decisiones son tomadas colectivamente por un grupo de individuos. Estos individuos poseen puntos de vista diferentes e información relevante sobre el problema que han de tenerse en cuenta para obtener la solución final al mismo. Un proceso de toma de decisión en el que participen varios individuos o expertos,

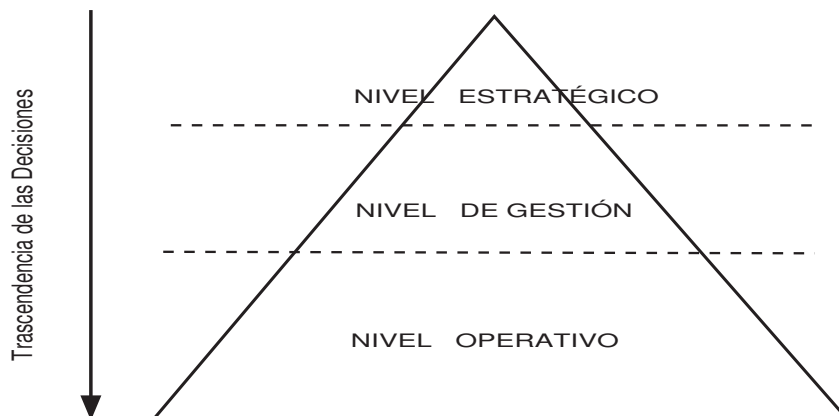


Figura 1.6: Niveles de decisión

cada uno de ellos aportando sus propios conocimientos, experiencia y creatividad, dará como resultado una decisión de mayor calidad que aquella aportada por un sólo experto [136, 143].

Un problema de TDG se caracteriza por:

- i) La existencia de un problema o cuestión común a resolver.
- ii) Un conjunto de posibles alternativas entre las que escoger.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (n \geq 2)$$

- iii) Un conjunto de individuos (jueces, expertos, ...) que expresan sus juicios, opiniones o preferencias sobre el conjunto de alternativas y que tienen la intención de alcanzar una solución en común al problema planteado.

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \quad (m \geq 2)$$

Cuando el problema de TDG se lleva a cabo en un ambiente de incertidumbre en el que los expertos trabajan con información vaga e imprecisa como es el caso

de los problemas tratados en esta memoria, hablaremos de problemas de TDG definidos en ambientes difusos.

En la literatura podemos encontrar muchos trabajos donde se aborda la resolución de problemas de TDG en ambientes difusos aplicando procesos de selección de alternativas [46, 61, 75, 114, 120, 159, 177]. Este proceso consiste en obtener la alternativa o conjunto de alternativas que mejor resuelve el problema de decisión planteado a partir de las preferencias expresadas por el grupo de expertos.

Un inconveniente que puede aparecer en los problemas de TDG resueltos llevando a cabo exclusivamente el proceso de selección consiste en que una parte de los expertos considere que sus opiniones no han sido tenidas en cuenta a la hora de obtener la solución y por lo tanto la rechacen. Para evitar esta situación no deseable, parece lógico plantearse la posibilidad de llevar a cabo un proceso de consenso previo al proceso de selección. En este proceso los expertos expresan y discuten sobre sus opiniones e intentan aproximarlas con el propósito de alcanzar un nivel de acuerdo alto antes de tomar una decisión (Figura 1.7).

Ambos procesos se describen brevemente en las siguientes secciones, dedicándose el Capítulo 2 a explicar en detalle el funcionamiento del proceso de consenso.

1.5.1. Proceso de consenso

El proceso de consenso consiste en un proceso de discusión entre el grupo de expertos con el objeto de acercar sus preferencias y alcanzar un grado de consenso mínimo antes de pasar a seleccionar el conjunto de alternativas solución a un problema de TDG. Está compuesto por varias rondas de consenso donde los expertos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas. En cada una de estas rondas los expertos discuten y justifican sus preferencias. Como

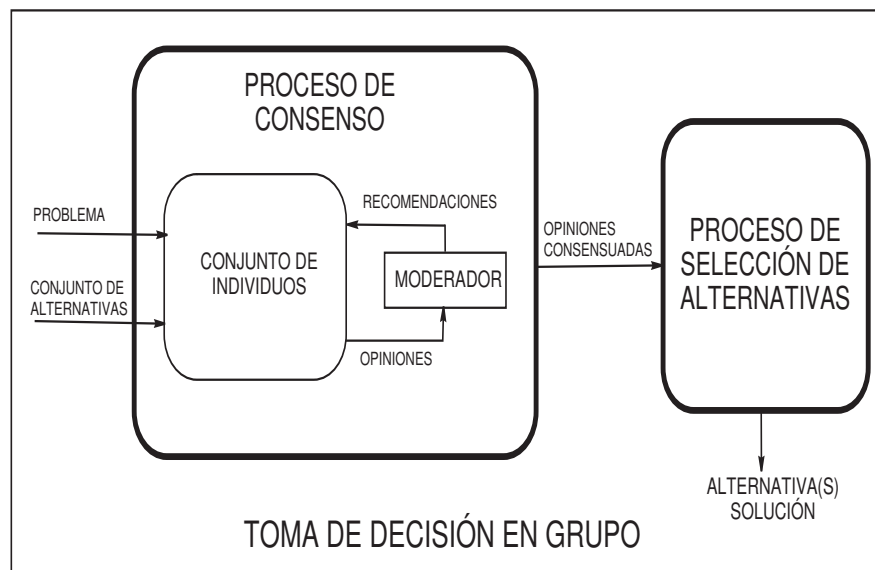


Figura 1.7: Proceso de consenso y selección en problemas de TDG.

consecuencia de esa discusión, los expertos cambian sus preferencias siguiendo las recomendaciones de una persona que hace la función de moderador. El propósito de estos cambios es aproximar las preferencias y de este modo aumentar el nivel de acuerdo en la siguiente ronda de consenso.

Debido a la importancia que el proceso de consenso tiene en los problemas de TDG para evitar que la solución obtenida sea rechazada por algún miembro del grupo, en esta memoria nos hemos planteado abordar la mejora y automatización de este proceso.

1.5.2. Proceso de selección

El proceso de selección de alternativas consiste en la elección de la mejor o mejores alternativas que resuelvan el problema planteado.

En los problemas de TDG, tradicionalmente el proceso de selección ha estado



Figura 1.8: Fases del proceso de selección en problemas de TDG

compuesto por las dos fases que se muestran en la Figura 1.8 [64, 139]:

- a) *Agregación*: La fase de agregación consiste en la combinación de las preferencias individuales de los expertos con el propósito de obtener una única preferencia colectiva que refleje de forma resumida las preferencias aportadas por el conjunto de expertos. Esta combinación de preferencias se realiza utilizando operadores de agregación.

El problema de la agregación de información ha sido ampliamente estudiado en la literatura, existiendo una gran cantidad de publicaciones al respecto [10, 11, 27, 42, 53, 54, 68, 161, 162]. Para llevar a cabo la operación de agregación es necesario definir una función de agregación encargada de transformar todas las preferencias individuales en una única preferencia colectiva.

Las distintas formas de llevar a cabo la combinación de las preferencias han originado que muchos autores se hayan dedicado al estudio y diseño de operadores de agregación de información, entre los que cabe destacar:

1. Agregación de información cuantitativa:

- Operadores conjuntivos (t-normas), disyuntivos (t-conormas) y operadores promedio [3, 53, 125, 126].
- Operadores de agregación de información ponderada “MAX” y “MIN” [53, 54].
- Operadores promedio ponderados [42, 43, 161, 162].

2. Agregación de información cualitativa [30, 48, 67, 76, 87, 151, 152, 163, 164, 166].

b) *Explotación*: En la fase de explotación se selecciona la/s mejor/es alternativa/s para resolver el problema de decisión a partir de la preferencia colectiva obtenida en la fase de agregación.

Para llevar a cabo esta fase es necesario definir un criterio de selección que permita establecer un orden entre el conjunto de alternativas al problema. El procedimiento que normalmente se sigue es la utilización de una función de selección que asigna un grado de selección a cada una de las alternativas. El grado de selección establece un orden de preferencia entre el conjunto de alternativas. Se utilizan funciones de selección que permiten medir la intensidad del grado de selección en cada alternativa. Aquellas alternativas con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución al problema de decisión. Dos funciones de selección utilizadas frecuentemente en la literatura son las siguientes [7, 71, 130, 138]:

- Función de Dominancia. Mide e indica el grado en que una alternativa es preferida o domina al resto de alternativas.
- Función de No-dominancia. Mide e indica el grado en que una alternativa no es dominada por alguna del resto de alternativas.

Capítulo 2

El Consenso en Problemas de Toma de Decisión en Grupo.

Según la Real Academia de la Lengua Española, el término consenso se define como:

“Acuerdo producido por consentimiento entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos”

En este capítulo se hace una revisión profunda del concepto de consenso y del proceso de búsqueda del consenso en problemas de TDG. Comenzaremos describiendo la evolución de este concepto a lo largo del tiempo continuando con la descripción detallada de las distintas fases que componen este proceso. Finalmente, se concluirá este capítulo haciendo una revisión de diferentes modelos de consenso propuestos en la literatura.

2.1. Proceso de Consenso

Como se ha comentado anteriormente, en la literatura podemos encontrar gran cantidad de trabajos relacionados con procesos de TDG en los que los problemas

son resueltos aplicando un proceso de selección de alternativas [46, 61, 75, 114, 120, 159, 177].

Sin embargo, tal y como recogen S. Saint y J. Lawson en [143], puede ocurrir que en un proceso de TDG varios expertos consideren que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución final al problema y por lo tanto, la rechacen o no se sientan identificados con ella. Para evitar esta situación, parece lógico llevar a cabo un proceso en el que los expertos expresen sus preferencias, las justifiquen y finalmente las aproximen con el propósito de alcanzar un nivel de acuerdo aceptable entre todos ellos antes de tomar una decisión sobre el problema.

Este proceso, al que denominaremos proceso de consenso, desarrolla la idea del consenso en el mismo sentido en que aparece recogido en el diccionario de la Real Academia [58], donde se define el término consenso como:

“Acuerdo producido por consentimiento entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos”

Según esta definición, un proceso de TDG en el que las decisiones se toman por consenso implica que “ningún” experto está en desacuerdo sobre tales decisiones, aunque esto no significa que individualmente cada experto no pueda seguir pensando que sus soluciones son mejores que las finalmente tomadas. Para que este acuerdo sea posible es necesario que “todos” los expertos cambien sus opiniones o preferencias iniciales y tiendan a aproximarlas hacia una preferencia colectiva que consideren satisfactoria.

Al inicio de un proceso de búsqueda del consenso las preferencias de los expertos suelen ser muy diferentes y por lo tanto el grado de consenso bajo. En esta situación consideramos que es más apropiado que todos los expertos cambien sus preferencias y tiendan a aproximar sus opiniones. De esta forma se consigue que todos los expertos cedan en sus pretensiones iniciales en pos de la búsqueda del

consenso y que ninguno de ellos rechace la solución obtenida por considerar que él si ha cambiado sus preferencias y el resto no. Conforme transcurre el proceso y el grado de acuerdo va aumentando, tiene más sentido que sólo los expertos más discrepantes cambien sus preferencias. Finalmente, asumiendo que la coincidencia unánime de las preferencias de los expertos es casi imposible, se puede considerar que se ha alcanzado el consenso cuando la mayoría de los expertos coincidan en sus preferencias. La idea de adaptar la búsqueda del consenso al nivel de acuerdo ha sido recogida en la versión mejorada del modelo que se presentará en el Capítulo 4.

La visión del concepto de consenso ha evolucionado a lo largo del tiempo. Tradicionalmente el consenso ha sido definido como un acuerdo total y unánime entre las preferencias del grupo de expertos. Si bien esto sería lo deseable, no es lo que suele ocurrir en la realidad. Ante un problema de decisión, normalmente los expertos suelen tener visiones diferentes del mismo y por lo tanto las preferencias de cada uno de ellos suelen ser diferentes a las del resto. Esta discrepancia de opiniones puede estar motivada por diferentes causas como por ejemplo:

- Diferente grado de conocimiento sobre el problema.
- La experiencia propia de cada experto en la resolución de problemas similares.
- El área de trabajo a la que pertenezca cada uno de los expertos.

Todas estas circunstancias implican que los expertos puedan valorar las alternativas de forma muy distinta a la hora de resolver el mismo problema de decisión.

La interpretación clásica del consenso como una coincidencia completa entre las preferencias del conjunto de expertos representa una visión demasiado rígida o “*crisp*” que con el tiempo ha sido descartada. Esta interpretación “*crisp*” del

consenso además de ser casi utópica presenta los siguientes inconvenientes:

1. Permite reflejar solamente dos estados posibles de consenso, es decir, existencia o ausencia de consenso. No permite establecer diferentes niveles o grados de consenso intermedios.
2. Las posibilidades de alcanzar un consenso total entre todos los expertos es prácticamente imposible o bien implicaría un proceso de consenso demasiado largo en el tiempo. Estaríamos hablando de un problema de TDG donde todos los expertos coinciden en sus preferencias sobre todas las alternativas, situación que casi nunca se cumple en la vida real.
3. Para tomar una decisión no es necesario alcanzar un acuerdo unánime entre todos los expertos. Es suficiente con que una mayoría de expertos alcance un acuerdo sobre cual es la mejor alternativa(s) para resolver el problema.

De los inconvenientes anteriores se deduce que ha sido necesario relajar el concepto clásico del consenso y tender hacia una interpretación menos estricta en la que se valore la coincidencia de las preferencias de una mayoría más o menos significativa del conjunto de expertos. Dependiendo del contexto y del tipo de problema que se esté abordando, esta mayoría se define utilizando algún tipo de parámetro cuantitativo o umbral de consenso, por ejemplo que “la mitad mas uno” o “más del 75 %” de los expertos estén de acuerdo.

Kacprzyk en [98, 99] profundiza en el estudio del concepto de mayoría en problemas de TDG y propone suavizarlo hacia otro más flexible al cual denomina “mayoría difusa”. Esta relajación se consigue acudiendo al uso de cuantificadores lingüísticos difusos del tipo “la mayor parte de” o “muchos más que la mitad” y apoyándose en el cálculo de proposiciones cuantificadas lingüísticamente desarrollado por Zadeh [172] y Yager [160]. Continuando en esta misma dirección

en [100, 102] se propone suavizar el concepto tradicional del consenso entendido como la coincidencia unánime y completa de las opiniones de los expertos por otro más acorde con la percepción humana que se tiene sobre el mismo, surgiendo el concepto de “soft consensus” que Kacprzyk define en [100] como:

*“most of the relevant individuals agree as to almost all of the important alternatives”*¹

Esta interpretación del consenso basada en el concepto de mayoría difusa ha sido utilizada y referenciada por muchos autores tal y como veremos en los distintos modelos de consenso presentes en la literatura y recogidos en la Sección 2.3 de este mismo capítulo.

Tras este breve repaso de la evolución del concepto de consenso nos centraremos en él como tal. El consenso es un área de investigación importante en el campo de la toma de decisión en grupo [16, 20, 29, 60, 62, 77, 89, 100, 102, 104, 110, 111, 119, 123, 147, 156, 176]. Son muchos los autores que han propuesto de una forma directa o indirecta la necesidad de llevar a cabo un proceso de consenso previo al proceso de selección de alternativas.

El proceso de consenso consiste en una fase de discusión en la que los expertos expresan sus preferencias e intentan aproximarlas. Esta aproximación se realiza a lo largo de varias rondas de consulta o de consenso donde los expertos van cambiando sus preferencias iniciales. El propósito de estos cambios y por lo tanto del proceso de consenso es alcanzar un nivel de acuerdo mínimo antes de iniciar el proceso de selección de las alternativas solución al problema de TDG. Todo este proceso suele estar coordinado o “tutorizado” por al menos una figura humana conocida como *moderador*. La figura del moderador es clave en un proceso de con-

¹ La mayoría de los expertos más relevantes están de acuerdo sobre la mayoría de las alternativas más importantes

senso y entre otras funciones tiene asignadas tres que se consideran fundamentales [143]:

- Evaluación del grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso.
- Identificación de las preferencias que impiden la consecución del consenso buscado.
- Recomendación de los cambios que los expertos deben hacer sobre dichas preferencias para conseguir mejorar el consenso.

2.2. Fases del Proceso de Consenso

Tomar una decisión por consenso requiere llevar a cabo una serie de tareas en varias fases que se han de ejecutar secuencialmente y que han de repetirse hasta que se considere que los expertos han alcanzado un nivel de acuerdo suficiente para poner fin al proceso de consenso.

La Figura 2.1 muestra las distintas fases básicas que componen un proceso de consenso estándar. Si bien alguna de estas fases puede variar debido al contexto de definición del problema que se esté resolviendo, básicamente todas ellas realizan las operaciones que se describen en las siguientes secciones:

2.2.1. Cálculo de las medidas de consenso

Inicialmente, en cualquier problema de TDG no trivial cabe esperar que las preferencias de los expertos sean diferentes. Esto implica un grado de consenso bajo. Conforme van transcurriendo las diferentes rondas, si el moderador dirige correctamente el proceso, el grado de consenso deberá ir aumentando. Por lo tanto

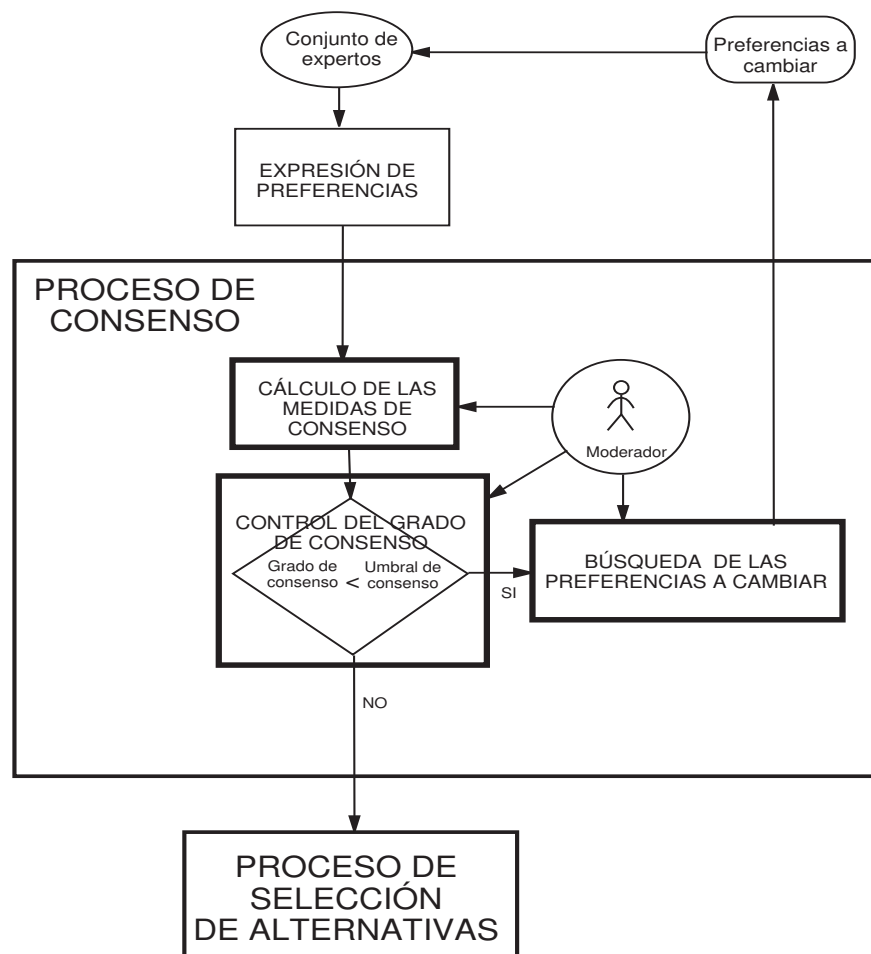


Figura 2.1: Fases del Proceso de Consenso

es primordial establecer o definir operadores y medidas de capaces de calcular y evaluar el nivel de acuerdo alcanzado entre los expertos a lo largo del proceso.

Para evaluar el grado de consenso, la mayoría de los autores [20, 29, 98, 106, 110, 174] utilizan un valor numérico cuantificado dentro del intervalo $[0, 1]$. Así, un grado de consenso próximo a 0 indica que el nivel de acuerdo es muy bajo y por el contrario, un valor próximo a 1 significa que las preferencias de los expertos son muy similares².

² Resaltar que Carlsson en [29] hace una interpretación del grado de consenso justo al contrario, es decir, un valor proximo a 0 indica un grado de consenso alto y un valor próximo a 1

Una variante al uso de valores numéricos en el intervalo $[0, 1]$ la podemos encontrar en [49, 77] para resolver problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos difusos. En este tipo de problemas, donde debido a la naturaleza cualitativa de las alternativas que se están valorando, los expertos expresan sus preferencias mediante términos lingüísticos y también se utilizan términos lingüísticos para evaluar el nivel de acuerdo.

Para calcular el grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso, todos los autores coinciden en la idea de medir la similitud entre las preferencias dadas por los expertos a cada una de las alternativas presentes en el problema de decisión. Las propuestas se diferencian en la forma de calcular esta similitud, distinguiendo dos posibles vías de cálculo:

1. *Cálculo de Distancias*. La idea es muy simple y consiste en utilizar funciones que permita medir la distancia entre las preferencias de los expertos. A partir de esos valores es posible obtener un valor que represente el grado de consenso alcanzado entre los expertos. Como ejemplos de funciones de distancia, los autores han utilizado distancias clásicas como:
 - Distancia Euclídea [40].
 - Distancia Geométrica [29].
 - L-1 norma [39].
 - El seno [9, 20] y coseno [70] del ángulo entre dos vectores.
2. *Cálculo de Coincidencias*. Consiste en medir el grado de coincidencia entre las preferencias de los expertos y a partir de estas obtener el grado de consenso.

un grado de consenso bajo.

Diremos que las preferencias de dos expertos coinciden si ambos asignan los mismos valores a dichas preferencias.

El grado de coincidencia se puede tratar desde dos puntos de vista [102]:

- a) Coincidencia rígida. Se hace una interpretación estricta del concepto de coincidencia, de ahí que el resultado de la comparación entre dos preferencias sólo admite dos valores:
- 1, si los valores de las preferencias son exactamente iguales
 - 0, en caso contrario
- b) Coincidencia flexible. Se hace una interpretación relajada del concepto de coincidencia en el sentido de que se tiene en cuenta la proximidad o cercanía de los valores asignados a las preferencias. El resultado de la comparación entre dos preferencias admite valores entre $[0, 1]$.

Ejemplo

Sean p_{e_1}, p_{e_2} las preferencias dadas por los expertos e_1, e_2 sobre una alternativa x_l y sea $c(p_{e_1}, p_{e_2}) \in [0, 1]$ la función que representa el grado de coincidencia entre ambas preferencias.

- a) Una interpretación rígida del grado de coincidencia asigna valores a $c(p_{e_1}, p_{e_2})$ conforme a las siguientes condiciones:

$$c(p_{e_1}, p_{e_2}) = \begin{cases} 1 & \text{para } |p_{e_1} - p_{e_2}| = 0 \\ 0 & \text{para } |p_{e_1} - p_{e_2}| \neq 0 \end{cases}$$

- b) Una interpretación flexible del grado de coincidencia asigna valores a $c(p_{e_1}, p_{e_2})$ conforme a las siguientes condiciones:

$$c(p_{e_1}, p_{e_2}) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq 0.05 \\ -10x + 1.5 & \text{para } 0.05 < x < 0.15 \\ 0 & \text{para } x \geq 0.15 \end{cases}$$

donde $x = |p_{e_1} - p_{e_2}|$

2.2.2. Control del grado de consenso

Una vez calculado el grado de consenso existente entre los expertos es necesario establecer una condición de parada del proceso de consenso. Esta condición consiste en comprobar si el nivel de acuerdo ha alcanzado un *umbral de consenso* fijado previamente. Este umbral de consenso representa el valor mínimo que debe alcanzar el grado de consenso para dar por finalizada la fase de consenso y dar paso al proceso de selección de alternativas. El valor del umbral de consenso suele estar comprendido en el intervalo $[0, 1]$ y su valor dependerá del tipo y objetivos del problema que se esté tratando en cada momento. Si las consecuencias de la decisión a tomar son muy importantes entonces se puede exigir que el valor mínimo del grado de consenso sea alto (ej. 0.8). Por otro lado, si es importante obtener la solución al problema rápidamente, entonces se puede plantear rebajar el umbral de consenso hasta un valor próximo a 0.5. Valores inferiores a 0.5 no tienen sentido porque podrían interpretarse como que existe consenso cuando ni siquiera la mitad de los expertos están de acuerdo en sus preferencias.

2.2.3. Búsqueda de las preferencias a cambiar

Si el grado de consenso no es suficiente significa que existe bastante discrepancia entre las preferencias de los expertos. En esta fase el moderador identifica a los expertos y/o preferencias que impiden que se alcance el grado de consenso deseado de la siguiente forma:

1. Se calcula la opinión o preferencia colectiva del grupo de expertos a partir de las preferencias individuales dadas por cada uno de ellos.
2. Se calcula la proximidad de las preferencias individuales respecto a la preferencia colectiva del grupo de expertos.

Teniendo en cuenta la proximidad es posible identificar las preferencias más alejadas de la opinión colectiva y por lo tanto las que más inciden negativamente en la consecución del consenso. El moderador sugerirá o aconsejará a los expertos que cambien sus preferencias más alejadas con el propósito de acercar sus opiniones y de este modo mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda de consenso.

Antes de finalizar este apartado tan sólo añadir que estas fases pueden sufrir variaciones y/o adaptaciones a los distintos contextos en los que se produzca la toma de decisiones tal y como se verá en el siguiente apartado.

2.3. Modelos de Consenso para Problemas de TDG

En esta sección haremos una revisión de distintos modelos de consenso presentes en la literatura aplicados en problemas de TDG [20, 77, 79, 89, 106, 107, 143, 176].

Los modelos revisados tienen una estructura similar al modelo mostrado en la Figura 2.1 aunque han debido de adaptarse a los distintos contextos para los cuales fueron diseñados.

Para la presentación de cada modelo, primero se hará una breve introducción de las novedades más sobresalientes de cada uno de ellos y a continuación se comentará de una forma resumida las características que lo definen.

2.3.1. Modelo de consenso para problemas de TDG con información difusa

Comenzaremos por el modelo presentado por Zadrozny. Este modelo recoge el concepto de soft consensus propuesto por Kacprzyk [100, 102] y que ha sido utilizado también por la mayoría de los modelos revisados en esta sección.

Zadrozny y otros [63, 175, 176] propusieron un modelo de consenso que se aproximara más a los problemas del mundo real, acudiendo a la Lógica Difusa para resolver alguno de los inconvenientes presentes en los problemas de decisión como puede ser la falta de precisión en las opiniones expresadas por los expertos. Según sus autores, este modelo de consenso podría ser una parte de un modelo mucho más amplio de un sistema de apoyo a la decisión en grupo.

En la Figura 2.2 se muestra de una forma gráfica las distintas fases que se han de llevar a cabo para alcanzar el consenso en este modelo. Iniciada la sesión de consenso, los expertos discuten entre ellos y expresan sus preferencias individuales. A partir de éstas se obtienen las preferencias del grupo. A continuación el moderador mide el grado de consenso. Si se ha alcanzado un nivel de acuerdo suficiente, la fase de consenso finaliza y se llevará a cabo un proceso de selección que se aplicará sobre las preferencias colectivas del grupo. En caso contrario, se

produce una realimentación del sistema en el que se tiene en cuenta las preferencias del grupo e información que permita a los expertos cambiar sus preferencias para aproximar sus opiniones.

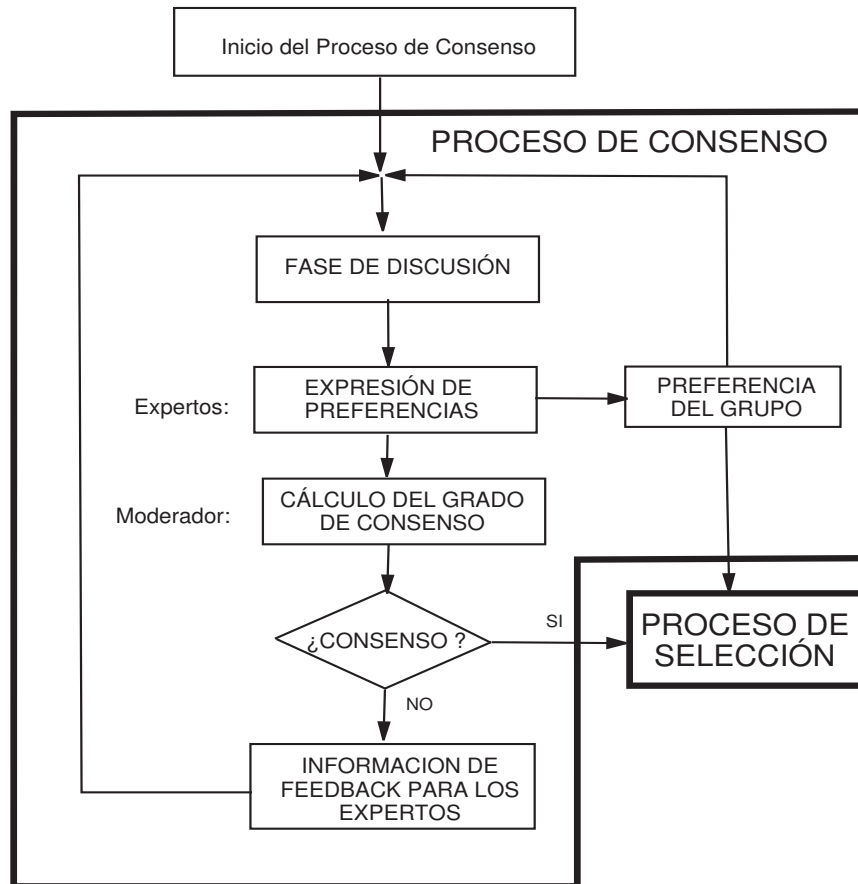


Figura 2.2: Modelo de consenso propuesto por Zadrozny

Las características principales de este modelo son las siguientes:

- a) Dado un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$) y un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$), los expertos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia difusas $P_{e_i} \subset X \times X$,

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

donde cada $p_i^{lk} \in [0, 1]$ representa la preferencia de la alternativa x_l sobre x_k .

- b) Define la función del moderador como el responsable de ejecutar eficientemente cada sesión de consenso. También es el encargado de medir el grado de consenso entre los expertos.
- c) Lleva a cabo un “análisis de la estructura del grupo de expertos” que consiste en agrupar el conjunto de expertos en diferentes subgrupos en función de la coincidencia de sus preferencias.
- d) Cálculo de grado de consenso. Para evaluar el grado de consenso alcanzado entre los expertos, Zadrozny hace una extensión del concepto de soft consensus propuesto por Kacprzyk [99, 100] y define el consenso en este contexto como: *“Existe consenso entre los expertos si la mayoría de los pares de expertos más importantes están de acuerdo sobre la mayoría de los pares de alternativas más relevantes”*. Teniendo en cuenta esta definición y que para representar formalmente el concepto de mayoría utiliza el cálculo de proposiciones cualificadas lingüísticamente propuesto por Zadeh [172], el grado de consenso entre el conjunto de expertos E sobre el conjunto de alternativas X , $CON(X, E)$, se calcula como:

$$CON(X, E) = Q2_{e_i, e_j} \left(\mu_{IEE}(e_i, e_j), Q1_{x_l, x_k} \left(\mu_{IXX}(x_l, x_k), \nu 1(e_i, e_j, x_l, x_k) \right) \right)$$

donde $Q2$ y $Q1$ representan los cuantificadores lingüísticos, μ_{IEE} es la función de pertenencia del conjunto difuso que define la importancia de los pares de

expertos, μ_{IXX} es la función de pertenencia del conjunto difuso que define la relevancia de los pares de alternativas y $\nu 1(e_i, e, x_l, x_k)$ es una función que devuelve el grado de consenso entre el experto i y el experto j sobre el par de alternativas (x_l, x_k) . Una descripción detallada del cálculo de $CON(X, E)$ se puede encontrar en [100, 176].

e) Define diferentes indicadores de consenso. Además de medir el grado de consenso entre los expertos, $CON(X, E)$, define otros dos grupos de indicadores de consenso, uno a nivel individual y el otro a nivel del grupo de expertos. Estos indicadores permiten conocer la similitud de las preferencias de los expertos y la contribución de cada experto al consenso. Pueden ser utilizados tanto por los expertos como por el moderador para conocer los detalles del proceso de consenso y para cambiar aquellas preferencias que no contribuyan a la búsqueda del acuerdo.

1. **Indicadores de consenso individuales.** Los siguientes indicadores permiten conocer la situación de las preferencias de cada experto dentro del espacio de preferencias del grupo de expertos.

- Contribución al consenso, $CTC(e_i)$. Dado un experto i , la contribución al consenso de este experto $CTC(e_i) \in [-1, 1]$ se obtiene como la diferencia entre el grado de consenso de todos los expertos y el grado de consenso de los expertos excluyendo al experto i .

$$CTC(e_i) = CON(X, E) - CON(X, E - \{e_i\})$$

Este indicador permite medir la influencia de la opinión del experto i en

la búsqueda del consenso y se interpreta como:

$$CTC(e_i) \begin{cases} < 0 & e_i \text{ influye negativamente en el consenso} \\ = 0 & e_i \text{ es indiferente para el consenso} \\ > 0 & e_i \text{ influye positivamente en el consenso} \end{cases}$$

- Grado de consenso personal, $PCD(e_i)$. Dado un experto i , el grado de consenso personal $PCD(e_i) \in [0, 1]$ mide la similitud entre las preferencias de e_i y la mayoría de los expertos más importantes en la mayoría de los pares de alternativas más relevantes:

$$PCD(e_i) = Q2_{e_i} \left(\mu_{IE}(e_j), Q1_{x_l, x_k} \left(\mu_{IXX}(x_l, x_k), \nu1(e_i, e_j, x_l, x_k) \right) \right)$$

donde $Q2, Q1$ son los cuantificadores lingüísticos y μ_{IE} es la función de pertenencia del conjunto difuso que define la importancia de los expertos. Los valores de $PCD(e_i)$ pueden interpretarse de la siguiente forma:

$$PCD(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{las preferencias de } e_i \text{ no son compartidas por} \\ & \text{la mayoría de los expertos importantes del grupo} \\ 0.5 & \text{la coincidencia de preferencias es intermedia} \\ 1 & \text{las preferencias de } e_i \text{ son compartidas por la} \\ & \text{mayoría de los expertos importantes del grupo} \end{cases}$$

- Grado de consenso personal detallado, $DPCD(e_i, x_l, x_k)$. Dado un experto i , el grado de consenso personal detallado $DPCD(e_i, x_l, x_k) \in [0, 1]$ sobre el par de alternativas (x_l, x_k) , mide la similitud entre la preferencia de e_i y las preferencias de la mayoría de expertos importantes dadas al par (x_l, x_k) . Se obtiene como:

$$DPCD(e_i, x_l, x_k) = Q2_{e_i} \left(\mu_{IE}(e_j), \nu1(e_i, e_j, x_l, x_k) \right)$$

donde $\nu 1(e_i, e_j, x_l, x_k)$ representa el grado de consenso entre los expertos i, j sobre el par de alternativas l, k . Como se puede observar es similar al grado de consenso personal $PCD(e_i)$ pero ahora centrado en un par de alternativas (x_l, x_k) concretas.

2. **Indicadores de consenso a nivel de grupo.** Estos indicadores proporcionan información adicional al moderador sobre el estado actual del consenso dentro del grupo:

- Contribución al consenso por alternativas, $CTCO(x_l)$. Dada la alternativa x_l , la contribución al consenso de dicha alternativa $CTCO(x_l) \in [-1, 1]$ se obtiene como la diferencia entre el grado de consenso teniendo en cuenta todas las alternativas y el grado de consenso excluyendo x_l .

$$CTCO(x_l) = CON(X, E) - CON(X - \{x_l\}, E)$$

Este indicador permite conocer como afecta al consenso las preferencias sobre cada una de las alternativas. Los valores de $CTCO(x_l)$ pueden ser interpretados en el mismo sentido que los de $CTC(e_i)$.

- Grado de consenso de la alternativa, $OCD(x_l)$. Dada la alternativa x_l , el grado de consenso de la alternativa $OCD(x_l) \in [0, 1]$ mide la coincidencia de preferencias de la mayoría de los expertos importantes sobre esta alternativa. Se calcula como:

$$OCD(x_l) = Q_{2_{e_i, e_j}} \left(\mu_{IEE}(e_i, e_j), Q_{1_{x_k}} \nu 1(e_i, e_j, x_l, x_k) \right)$$

donde μ_{IEE} es la función de pertenencia del conjunto difuso que define la importancia de los pares de expertos. Los valores de este indicador se

interpretan como sigue:

$$OCD(x_l) = \begin{cases} = 0 & \text{nula coincidencia de los expertos más} \\ & \text{importantes sobre las preferencias dadas a } x_l \\ < 0.5 & \text{coincidencia de las preferencias sobre } x_l \text{ baja} \\ > 0.5 & \text{coincidencia de las preferencias sobre } x_l \text{ alta} \\ = 1 & \text{coincidencia total de los expertos más} \\ & \text{importantes sobre las preferencias dadas a } x_l \end{cases}$$

Como se puede deducir de los puntos anteriores, este modelo define muchos indicadores de consenso que permiten analizar en detalle la similaridad de las preferencias de los expertos y la forma en la que contribuyen cada uno de ellos al acuerdo. A partir de estos indicadores y apoyándose en un mecanismo de realización se pueden mejorar aquellas preferencias que contribuyen negativamente al proceso de búsqueda del consenso (Figura 2.2).

2.3.2. Modelo de consenso para problemas de TDG con vectores de preferencia

Bryson presenta en [20, 21] un modelo de consenso que ha sido de gran interés para nuestra investigación al proponer algunas ideas que hemos recogido en nuestra propuesta:

- En [20] presenta un algoritmo detallado de los distintos pasos que se han de llevar a cabo para ir consensuando la opinión final del grupo.
- Este algoritmo contempla la posibilidad de ejecutarse cíclicamente hasta alcanzar el grado de consenso deseado o bien un número máximo de ciclos fijado previamente (MAXCICLOS).

- Utiliza medidas de similitud que permiten medir la semejanza entre las preferencias de los expertos y así obtener indicadores de consenso tanto a nivel individual como a nivel del grupo.
- Como consecuencia del punto anterior, se utilizan las medidas de similaridad para identificar las preferencias y expertos más alejados y se apoya en un mecanismo de realimentación para recomendar las preferencias que han de cambiar.

Las características más sobresalientes de este modelo son las siguientes:

- a) Dado un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$), cada experto i expresa su opinión utilizando un vector de preferencia,

$$w_i = (w_i^1, \dots, w_i^n)$$

que cumple que $\sum_L w_i^l = 1$ y que $w_i^l > 0$ para $l = 1, \dots, n$, siendo n el número de alternativas al problema. En esta representación, el ratio (w_i^l/w_i^k) refleja la preferencia del experto i sobre la idoneidad de la alternativa l frente a la alternativa k [21].

- b) Para obtener w_i , es necesario que cada experto defina una matriz de comparación de pares de alternativas $A_i = \{a_i^{lk}\}$,

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i^{11} & \cdots & a_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i^{n1} & \cdots & a_i^{nn} \end{pmatrix}$$

donde cada a_i^{lk} es un valor numérico que representa la importancia relativa de la alternativa l sobre la alternativa k .

c) El resultado final es un vector de preferencia colectivo

$$w_{GM} = (w_1, \dots, w_n)$$

que representa la preferencia del grupo de expertos y que se obtiene a partir de una matriz de comparación colectiva $A_{GM} = \{a^{lk}\}$. Los valores a^{lk} de esta matriz se calculan como la media geométrica de todas las matrices de comparación individuales,

$$a^{lk} = \left(\prod_{i \in T} a_i^{lk} \right)^{1/m}$$

donde T es el índice del conjunto de expertos y M el número de expertos.

d) Para evaluar el grado de acuerdo que existe entre dos vectores de preferencia w_i y w_j , define la siguiente medida de similitud,

$$s(w_i, w_j) = 1 - \text{seno}(w_i, w_j)$$

e) Define dos umbrales de consenso α y δ de forma que:

- Si $s(w_i, w_j) \geq \alpha$ entonces existe un gran acuerdo entre las preferencias de los expertos i, j .
- Si $s(w_i, w_j) \leq \delta$ entonces existe un gran desacuerdo entre las preferencias de los expertos i, j .

f) Define varios indicadores de consenso que permiten conocer tanto el nivel de acuerdo alcanzado entre los expertos así como aquellos expertos que contribuyen positiva o negativamente a alcanzar el consenso. Por citar algunos de estos indicadores, destacaremos:

- GSAQ. Mide la proporción de expertos con un nivel de acuerdo alto. Se obtiene como:

$$GSAQ = \sum_{t \in T} \Gamma(t, GM)/m$$

donde $\Gamma(t, GM)/m = 1$ si $s(w_i, w_{GM}) \geq \alpha$ y $\Gamma(t, GM)/m = 0$ si $s(w_i, w_{GM}) < \alpha$.

- GSDI. Calcula el valor del nivel de acuerdo más bajo entre dos miembros cualesquiera del grupo de expertos. Se obtiene como:

$$GSDI = \min\{s(w_i, w_j) - \delta, \quad \forall i, j \in T\}$$

- ISAQ. Mide el grado de consenso entre las preferencias de un experto i y las preferencias del grupo de expertos. Se obtiene como:

$$ISAQ_i = \sum_{r \in T} \Gamma(i, r)/m$$

Como hemos comentado anteriormente, en [20] Bryson describe con detalle el procedimiento a seguir para obtener una solución consensuada al problema planteado. Los distintos pasos que se ejecutarán en dicho procedimiento son los siguientes:

Paso 0. Preparación

- Especificar el número máximo de ciclos que se ejecutará este procedimiento, MAXCICLOS.
- Especificar los umbrales de consenso α , y δ que se utilizarán para comprobar si se ha alcanzado el consenso buscado y así poner fin al proceso de consenso.
- Inicializar el contador de ciclos, CICLO=0.

Paso 1. Discusión en grupo

- Los expertos se reúnen, discuten y argumentan sus opiniones según sus propios puntos de vista.

Paso 2. Determinación de las preferencias individuales

- $CICLOS = CICLOS + 1$.
- Cada experto i expresa sus preferencias mediante su matriz de comparación de pares de alternativas $A_i = \{a_i^{lk}\}$ a partir de la cual se calcula su vector de preferencias w_i .

Paso 3. Cálculo de los indicadores de consenso

- Se calculan los indicadores de consenso tanto a nivel individual como a nivel del grupo de expertos.

$$GSAQ = \sum_{t \in T} \Gamma(t, GM) / m$$

$$GSDI = \min\{s(w_i, w_j) - \delta, \quad \forall i, j \in T\}$$

$$ISAQ_i = \sum_{r \in T} \Gamma(i, r) / m$$

Paso 4. Finalización del procedimiento

- IF ($GSAQ \geq \alpha$) OR ($CICLO = MAXCICLOS$)

THEN

- El procedimiento termina obteniendo el vector de preferencia colectivo

$$w_{GM} = (w_1, \dots, w_n)$$

ELSE

- Ayudados por la figura de un moderador o facilitador del consenso, los miembros discuten y cambian sus opiniones teniendo en cuenta los valores de los indicadores de consenso.
- Ir al paso 2.

2.3.3. Modelo de consenso para problemas de TDG multiatributo

S.H. Kim y otros han propuesto en [106, 107, 108] un procedimiento para buscar el consenso denominado Procedimiento Interactivo para problemas de TDG multiatributo con información incompleta (imprecisa o parcial). Este procedimiento trata la medición del grado de consenso y el proceso para alcanzar el consenso de forma muy diferente a la del resto de modelos vistos en esta memoria. Se basa en la idea de representar las preferencias de los expertos mediante intervalos valorados entre 0 y 1 a los que denominan *rangos de utilidad*. Este tipo de representación permite comprobar fácilmente el grado de consenso existente entre los expertos y agregar las preferencias individuales de cada experto en una preferencia colectiva del grupo de expertos. También permite comparar rápidamente las preferencias de un experto respecto a la del grupo e identificar de esta manera a los expertos que no contribuyen positivamente al consenso.

Este modelo propone resolver el problema del consenso comparando el tamaño y los límites de los rangos de utilidad, descartando la utilización de medidas de distancia utilizadas en otros modelos.

El procedimiento está compuesto por cuatro pasos que describiremos a continuación:

Paso 1. Cálculo de los rangos de utilidad individuales

- Dado un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ ($k \geq 2$), un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ($m \geq 2$) y el conjunto de atributos a valorar para cada alternativa $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ($n \geq 2$), los expertos expresan sus preferencias sobre X utilizando rangos de utilidad individuales $u_i^k(x_m)$ (Figura 2.3).
- Cada rango de utilidad individual $u_i^k(x_m)$ se interpreta como la utilidad o preferencia del experto k sobre el atributo i de la alternativa m . Se representa como el intervalo $I([0, 1])$ calculado como:

$$u_i^k(x_m) = (\min u_i^k(x_m), \max u_i^k(x_m))$$

donde $\min u_i^k(x_m)$ y $\max u_i^k(x_m)$ representan el valor mínimo y máximo de valoraciones dadas a los $i = 1, \dots, n$ atributos de la alternativa x_m .

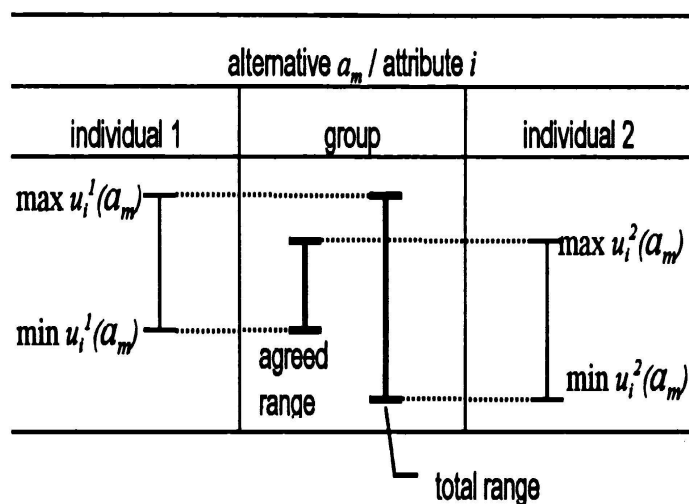


Figura 2.3: Representación de los rangos de utilidad

Paso 2. Agregación de preferencias

- Se calcula el rango de utilidad del grupo de expertos para cada alternativa m sobre cada atributo i , agregando los rango de utilidad individuales.
- Se definen dos tipos de rangos de utilidad del grupo cuyo significado se muestra gráficamente en la Figura 2.3:

1. Rango total del grupo. Representa el rango que se obtiene tras la unión de todos los rangos de utilidad individuales,

$$\text{Rango total} = (\min_k \min_{U_i^k} u_i^k(x_m), \max_k \max_{U_i^k} u_i^k(x_m))$$

2. Rango de consenso del grupo. Representa el rango que se obtiene como la intersección de los rangos de utilidad individuales,

$$\text{Rango de consenso} = (\max_k \min_{U_i^k} u_i^k(x_m), \min_k \max_{U_i^k} u_i^k(x_m))$$

Paso 3. Proceso de interacción entre los miembros del grupo de expertos

- En esta parte del procedimiento los expertos interaccionan al comparar sus preferencias individuales con la preferencia colectiva del grupo. Las comparaciones se realizan comparando la anchura de los rangos de utilidad individuales y del grupo.
- Para cada alternativa m y atributo i se calcula la anchura del rango total del grupo y del rango del consenso del grupo:

$$\text{anchoRTotal}_i(x_m) = (\max_k \max_{U_i^k} u_i^k(x_m) - \min_k \min_{U_i^k} u_i^k(x_m)) \quad (2.1)$$

$$\text{anchoRConsenso}_i(x_m) = (\min_k \max_{U_i^k} u_i^k(x_m) - \max_k \min_{U_i^k} u_i^k(x_m)) \quad (2.2)$$

- El grado de consenso entre los expertos sobre la alternativa m y atributo i se define como el cociente entre ambos rangos:

$$v_i(x_m) = \frac{\text{ancho}RC\text{onsenso}_i(x_m)}{\text{ancho}RT\text{otal}_i(x_m)}$$

donde el grado de consenso $v_i(x_m) \in [0, 1]$ representa el ratio entre la anchura del rango de consenso respecto al rango total.

- Respecto al valor $v_i(x_m)$ puede darse los siguientes tres casos que se muestran en la Figura 2.4:
 - 1) **Caso 1:** $v_i(x_m) \leq 0$. En este caso nos encontramos ante una posible inconsistencia de preferencias. Esto implica que todas los expertos deben revisar y modificar sus preferencias.
 - 2) **Caso 2:** $0 < v_i(x_m) < \delta_i$. En este caso encontramos que existe un determinado grado de consenso pero no lo suficiente alto para superar un umbral mínimo de consenso δ_i para el atributo i que permita finalizar el proceso de consenso. El valor δ_i es previamente fijado por los expertos en función de las características del problema. En este caso se recomendará que los expertos cambien sus rangos de utilidad individuales con el objetivo de acercar sus preferencias.
 - 3) **Caso 3:** $v_i(x_m) \geq \delta_i$. En esta situación, se puede afirmar que los expertos han alcanzado un grado de consenso satisfactorio en la alternativa m y atributo i . Si esta circunstancia se produce en todas las alternativas y atributos, se puede asumir que existe un consenso suficiente entre los expertos dando paso a la búsqueda de la solución al problema que se realiza en el Paso 4.

Paso 4. Búsqueda de relaciones de dominancia entre alternativas

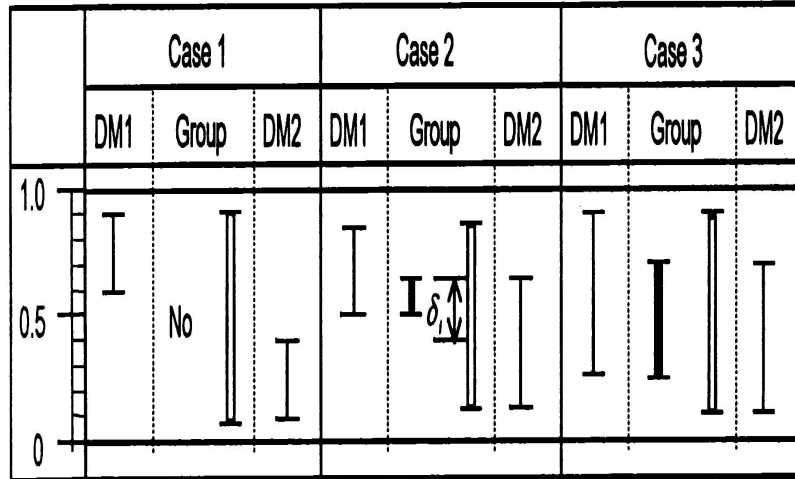


Figura 2.4: Rango de utilidad total del grupo y rango de consenso de las preferencias de los expertos DM_1 y DM_2

- La solución al problema se obtiene estableciendo un orden de selección de alternativas aplicando criterios de dominancia entre alternativas a partir de los rangos de utilidad del grupo de expertos.

Paso 5. Valoración del resultado

- Si algún miembro del grupo de expertos no está satisfecho con la solución obtenida, puede revisar sus preferencias comenzando de nuevo todo el proceso por el Paso 1. En caso contrario el procedimiento finaliza con el resultado obtenido en el Paso 4.

2.3.4. Modelo de consenso para problemas de TDG con valoraciones lingüísticas

F. Herrera y otros [77, 78, 79] propusieron a mediados de los 90 un modelo de consenso que nos ha servido de punto de partida para el desarrollo de los

modelos propuestos en esta memoria. En [77] se propuso un modelo para problemas de TDG definidos en un contexto lingüístico, característica que lo diferenciaba de otros modelos presentes en la literatura centrados en dominios numéricos [100, 175]. En el modelo inicial proponen un conjunto de medidas para evaluar el grado de consenso. Posteriormente, en [79] el modelo fue revisado y mejorado añadiéndole medidas de consistencia que permitían comprobar la consistencia de las opiniones de los expertos. Según los autores, si los valores de ambas medidas eran considerados como suficientes, la figura de un moderador pondría fin al proceso de consenso. En caso contrario, el moderador utilizaría estas medidas para recomendar los cambios en las preferencias de los expertos con el propósito de mejorar el grado de consenso en las siguientes rondas de consenso (Figura 2.5). En este modelo además de calcular el nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda,

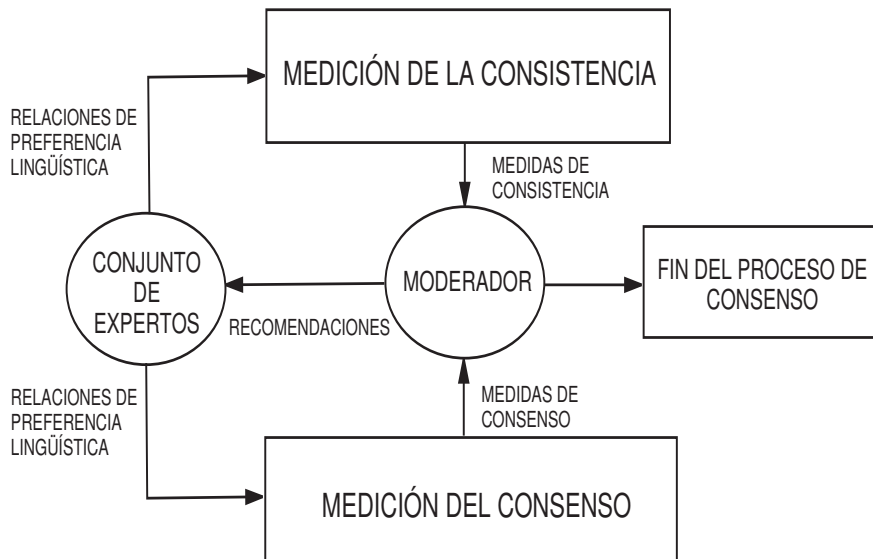


Figura 2.5: Modelo de consenso racional con valoraciones lingüísticas

también se calcula la distancia o proximidad de la preferencia de cada experto respecto a una preferencia colectiva. El significado de ambas medidas así como

otros detalles importantes de este modelo se presentan a continuación:

- a) Dado un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$), estos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) utilizando un conjunto de etiquetas lingüísticas $S = \{s_0, \dots, s_T\}$ apropiado para valorar X .
- b) Los expertos utilizan relaciones de preferencia lingüísticas $P_i \subset X \times X$ para representar sus preferencias sobre X ,

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

donde cada $p_i^{lk} \in S$ representa la preferencia de la alternativa x_l sobre x_k .

- c) A diferencia de otros modelos donde el consenso se valora numéricamente, en este modelo el grado de consenso se expresa en un dominio lingüístico.
- d) El grado de consenso y la proximidad de las preferencias de cada experto se calcula a nivel de experto, alternativa y pares de alternativas.
- e) Contempla la posibilidad de que tanto los expertos como las alternativas tengan un grado de importancia o relevancia diferente.
- f) El consenso se evalúa a partir del número de expertos que coinciden en la preferencia dada sobre cada par de alternativas (x_l, x_k) .
- g) Lleva a cabo de tres procesos principales. Para conocer los detalles en profundidad de cada uno de ellos, consultar [77]:

- 1) **Proceso de recuento.** Se calcula el número de expertos que coinciden en la misma preferencia sobre cada par de alternativas (x_l, x_k) y se almacena en un vector de coincidencia V_C^{lk} . Para hacer esto, primero se calcula un vector $V^{lk}[s_t]$ para las $T + 1$ etiquetas lingüísticas del conjunto S . Cada $V^{lk}[s_t]$ representa los expertos que han utilizado la etiqueta s_t para valorar la preferencia sobre el par (x_l, x_k) . Cada $V^{lk}[s_t]$ se calcula según la siguiente expresión:

$$V^{lk}[s_t] = \{i \mid p_i^{lk} = s_t, i = 1, \dots, m\}, \forall s_t \in S.$$

Una vez calculados todos los $V^{lk}[s_t]$, el vector de coincidencias individual V_C^{lk} contiene el número de expertos que han coincidido en asignar la etiqueta s_t al par de alternativas (x_l, x_k) ,

$$V_C^{lk}[s_t] = \#(V^{lk}[s_t]), \forall s_t \in S$$

donde $\#$ representa la cardinalidad del conjunto de términos.

- 2) **Proceso de coincidencia.** Este proceso se basa en la idea de evaluar la coincidencia entre las preferencias de los expertos, entendiendo por coincidencia la asignación de la misma etiqueta s_t a un par de alternativas (x_l, x_k) . En este proceso se persiguen dos objetivos:

- 1) Obtener la relación de consenso denominada $LCR = (lcr^{lk})$, donde cada elemento lcr^{lk} representa la etiqueta de consenso sobre el par de alternativas (x_l, x_k) . Esta etiqueta se obtiene agregando las etiquetas lingüísticas s_t obtenidas a partir de $V_C^{lk}[s_t]$ tal que $V_C^{lk}[s_t] > 1$. Para agregar estas etiquetas lingüísticas, se utiliza el operador de agregación LOWA con cuantificador F_{Q^1} definido en [87] tal que:

$$lcr^{lk} = \begin{cases} F_{Q^1}(l_1, \dots, l_q) & \text{si } \#(M^{lk}) > 1 \text{ y } l_j \in M^{lk}, j = 1, \dots, q \\ l_q & \text{si } \#(M^{lk}) = 1 \text{ y } l_q \in M^{lk} \\ \text{Indefinido} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde $q = \#(M^{lk})$ y M^{lk} contiene las etiquetas lingüísticas elegidas por más de un experto para evaluar el par de alternativas (x_l, x_k) ,

$$M^{lk} = \{s_y \mid V_C^{lk}[s_y] > 1, s_y \in S\}.$$

- 2) Obtener una relación de consenso individual denominada $ICR = (icr^{lk})$ donde cada elemento icr^{lk} representa el número proporcional de expertos cuyos valores de preferencia han sido utilizados para obtener la etiqueta de consenso lcr^{lk} . Se obtiene como una media aritmética del vector de coincidencia $V_C^{lk}[s_t]$:

$$icr^{lk} = \begin{cases} \frac{\sum_{s_y \in M^{lk}} (V_C^{lk}[s_y]/m)}{\#(M^{lk})} & \text{si } \#(M^{lk}) \neq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- 3) **Proceso de cálculo de las medidas de consenso lingüísticas.** Los autores proponen calcular dos tipos diferentes de medidas de consenso:

- a) *Grados de consenso lingüístico.* Utilizadas para evaluar el grado de consenso existente entre los expertos y decidir si el proceso de consenso debe continuar o no. Estas medidas se calculan a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia.

- Grado de consenso lingüístico a nivel de pares de alternativas. Mide el grado de consenso alcanzado entre los expertos sobre la preferencia dada

a cada par de alternativas (x_l, x_k) . Se representa mediante una matriz $n \times n$ denominada PCR , donde cada PCR^{lk} se obtiene como:

$$PCR^{lk} = Q^2(icr^{lk})$$

donde $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ y Q^2 es un cuantificador lingüístico utilizado para representar el concepto de mayoría difusa.

- Grado de consenso lingüístico a nivel de alternativas. Mide el grado de consenso alcanzado entre los expertos sobre cada una de las alternativas x_l y se denota PCR^l . Se calcula como:

$$PCR^l = Q^2 \left[\sum_{k=1, k \neq l}^n icr^{lk} / (n-1) \right]$$

con $l = 1, \dots, n$.

- Grado de consenso lingüístico a nivel de relación. Mide el grado de consenso total alcanzado entre los expertos. Se denomina RC y se calcula como:

$$RC = Q^2 \left[\left(\sum_l \sum_{k=1, k \neq l}^n icr^{lk} \right) / (n^2 - n) \right].$$

b) *Distancias lingüísticas*. Utilizadas para evaluar la distancia de las preferencias individuales de cada experto respecto a la preferencia colectiva. Permiten identificar las opiniones más discordantes. Estas medidas también se calculan a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia.

- Distancia lingüística a nivel de pares de alternativas. Mide la distancia entre las preferencias dadas por un experto i sobre el par (x_l, x_k) y su

respectiva etiqueta de consenso. Se denomina D_i^{lk} y se calcula como:

$$D_i^{lk} = \begin{cases} p_i^{lk} - lcr^{lk} & \text{si } p_i^{lk} > lcr^{lk} \\ lcr^{lk} - p_i^{lk} & \text{si } lcr^{lk} \geq p_i^{lk}, l \neq k \\ s_T & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

con $l, k = 1, \dots, n$ y $i = 1, \dots, m$.

- Distancia lingüística a nivel de alternativas. Mide la distancia entre los valores de preferencia de un experto i sobre una alternativa y su respectiva etiqueta de consenso. Se denomina D_i^k y se calcula como:

$$D_i^l = F_{Q^1}(D_i^{lk}, k = 1, \dots, n, l \neq k)$$

donde $i = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$, y F_{Q^1} es el operador de agregación LOWA con cuantificador Q^1 .

- Distancia lingüística a nivel de relaciones. Mide la distancia entre los valores de preferencia de un experto i sobre todas las alternativas y su respectiva etiqueta de consenso. Se representa como D_i^R y se calcula como:

$$D_i^R = F_{Q^1}(D_i^{lk}, l, k = 1, \dots, n, l \neq k)$$

con $i = 1, \dots, m$.

Con el propósito de introducir racionalidad y consistencia al proceso de toma de decisiones, en [79] añadieron a este modelo nuevas medidas que permitían medir el grado de consistencia de las opiniones de cada experto. Para definir estas medidas de consistencia partieron del concepto de “*acyclicity*” propuesta por Sen [145] y de la idea de considerar que la consistencia de los expertos puede tratarse como un concepto difuso propuesta por Montero en [127, 128]. Así, la

consistencia puede ser vista como un conjunto difuso definido por una apropiada función de pertenencia llamada medida de consistencia difusa. Esta función de pertenencia asocia valores de consistencia entre 0 y 1 a las preferencias de cada experto. Desarrollaron e introdujeron en el modelo de consenso ambas ideas para definir dos medidas de consistencia aplicadas en un contexto lingüístico.

- Medida de consistencia individual. Utilizada para evaluar el grado de consistencia individual de la opinión de cada experto.

- Medida de consistencia del grupo de experto. Utilizada para evaluar el grado de consistencia que el grupo de expertos presenta en sus opiniones.

Ambas medidas fueron enfocadas desde dos perspectivas diferentes, una cualitativa donde se pretendía medir la intensidad de la naturaleza de las inconsistencias y otra cuantitativa donde se evaluaba el número de inconsistencias detectadas en las preferencias de los expertos.

De este modo, el modelo propuesto en [79] (Figura 2.5) llevaría a cabo dos grandes procesos en paralelo, uno para obtener las medidas de consenso y otro para obtener las medidas de consistencia. Una vez obtenidas ambas medidas, estas serían utilizadas por el moderador para sugerir los cambios en las preferencias de los expertos y así mejorar el consenso en la siguiente ronda de consenso. Este modelo permitió trasladar los problemas de TDG que hasta ese momento habían sido resueltos en un contexto numérico a un contexto lingüístico. Además, añadiendo las medidas de consistencia se consiguió aportar mayor racionalidad a los procesos de toma de decisión en grupo.

2.3.5. Modelo de consenso para problemas de TDG con diferentes estructuras de preferencia

F. Chiclana y otros han publicado diferentes trabajos [36, 37, 89] donde han abordado el problema del consenso en problemas de toma de decisión en grupo con distintas estructuras de representación de preferencias. En concreto, en [89] proponen un modelo de consenso para problemas de TDG en la que los expertos expresan sus preferencias utilizando cuatro estructuras de preferencia diferentes: vectores de utilidad, órdenes de preferencia, relaciones de preferencia difusas y relaciones de preferencia multiplicativas.

Antes de enumerar las características más sobresalientes de esta propuesta, nos gustaría resaltar una de ellas por ser novedosa y diferente a la del resto de modelos tratados en este capítulo. En la mayoría de los modelos consultados en la literatura, primero se lleva a cabo un proceso de consenso donde los expertos discuten y cambian sus preferencias y a continuación se lleva a cabo el proceso de selección donde se selecciona la mejor o mejores alternativas para resolver el problema. A diferencia del resto de modelos, en éste se propone cambiar el orden de ambos procesos. En primer lugar los expertos llevan a cabo de forma individual un proceso de selección de alternativas cuyo resultado es un conjunto de soluciones individuales y particulares al problema. A continuación se llevaría a cabo el proceso de consenso sobre el conjunto de soluciones individuales con el propósito de obtener una solución consensuada que pueda ser considerada como solución final al problema. Este cambio del orden de ejecución de ambos procesos ya ha sido tratado por otros autores entre los que podemos citar a [20]. Según sus autores, esta forma de proceder se debe a que al utilizar los expertos diferentes estructuras para representar sus preferencias no resulta trivial intentar establecer

comparaciones entre las mismas, siendo más sencillo aplicar el proceso de consenso sobre el conjunto de soluciones individuales.

Las características de este modelo son las siguientes:

- a) Dado un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$), estos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) utilizando las siguientes estructuras de preferencia:

- Vectores de utilidad. El experto i expresa sus preferencias sobre X mediante un conjunto de valores de utilidad,

$$U^i = \{u_1^i, \dots, u_n^i\}$$

donde cada u_j^i representa la utilidad dada por e_i a la alternativa x_j . En el apartado 1.2.1 puede consultarse algunos ejemplos de este tipo de representación de preferencias.

- Órdenes de preferencia. El experto i expresa sus preferencias sobre X mediante un orden de preferencias individual,

$$O^i = \{o^i(1), \dots, o^i(n)\}$$

es decir, mediante un vector con las alternativas ordenadas desde la mejor hasta la peor. En el apartado 1.2.1 puede consultarse una definición más precisa de esta estructura así como algunos ejemplos.

- Relaciones de preferencia difusas. El experto i expresa sus preferencias sobre X mediante una matriz $P_i \subset X \times X$,

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz p_i^{lk} representa el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k dada por dicho experto. Algunos ejemplos de este tipo de estructuras pueden consultarse en 1.2.1.

- Relaciones de preferencia multiplicativas. El experto i expresa sus preferencias sobre X mediante una matriz $A_i \subset X \times X$, donde cada elemento de la matriz p_i^{lk} representa la razón de intensidad de la preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k , es decir, que x_l es p_i^{lk} veces mejor que x_k para el experto i . Saaty [141, 142] recomienda como rango para los elementos de la matriz A_i el intervalo cerrado $[1/9, 9]$ y que se cumpla la condición de reciprocidad multiplicativa $a_i^{lk} \cdot a_i^{kl} = 1$; $a_i^{lk} > 0, \forall l, k$. Un ejemplo de preferencias dadas por los expertos i, j utilizando relaciones de preferencia multiplicativas sería el siguiente:

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/3 & 4 \\ 2 & - & 1/3 & 1/9 \\ 3 & 3 & - & 7 \\ 1/4 & 9 & 1/7 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_j} = \begin{pmatrix} - & 1/5 & 1/4 & 1/2 \\ 5 & - & 2 & 4 \\ 4 & 1/2 & - & 3 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & - \end{pmatrix}$$

b) Medidas de consenso. Se definen dos tipos de medidas:

- Grado de consenso. Con esta medida se evalúa el nivel de acuerdo existente entre todos los expertos y se utiliza para poner fin al proceso de consenso cuando se haya alcanzado el grado de consenso deseado.
- Proximidad de cada experto. Esta medida evalúa el grado de coincidencia entre las soluciones individuales de cada experto y la solución colectiva.

Ambos criterios se obtienen comparando las posiciones de las alternativas en las soluciones individuales de los expertos respecto a solución colectiva del grupo.

- c) Contempla la posibilidad de llevar a cabo un proceso de realimentación que permite a los expertos cambiar sus preferencias con el propósito de acercar sus opiniones y así aumentar el nivel de acuerdo.
- d) Otorga mayor protagonismo a la figura del moderador. No sólo calcula el grado de consenso sino que también se encarga de recomendar las preferencias que deben cambiar los expertos y llevar a cabo el proceso de selección.
- e) Utiliza relaciones de preferencia difusas como estructura base para unificar el resto de estructuras de representación de preferencias utilizadas por los expertos.

La representación gráfica del funcionamiento del modelo se muestra en la Figura 2.6.

Teniendo en cuenta dicha representación, el modelo llevaría a cabo los siguientes pasos:

1. Los expertos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X . Estas preferencias se representan mediante órdenes de preferencia, vectores de utilidad, relaciones de preferencia difusas y relaciones de preferencia multiplicativas.
2. Comienza una fase para hacer uniformes las preferencias dadas por los expertos en el cual se transforman las diferentes estructuras de preferencia en una única representación uniforme. Para llevar a cabo esta fase se definen funciones de transformación que se encargan de transformar las estructuras de

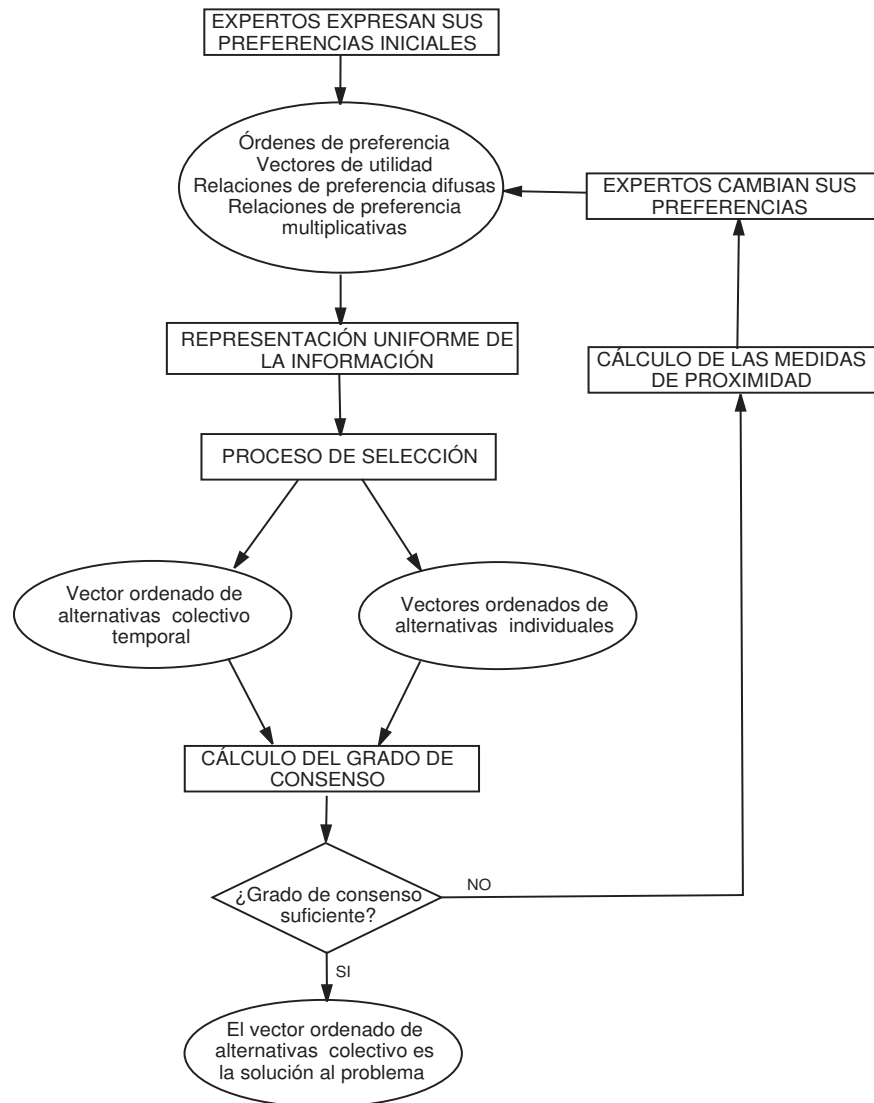


Figura 2.6: Modelo de consenso con diferentes estructuras de preferencia

preferencia individuales en relaciones de preferencia difusas individuales. En [36] se estudiaron funciones para transformar órdenes de preferencia y vectores de utilidad en relaciones de preferencia difusa, proponiendo la función de transformación,

$$p_i^{lk} = \varphi(\lambda_i^l, \lambda_i^k) = \frac{1}{2} [1 + \psi(\lambda_i^l, \lambda_i^k) - \psi(\lambda_i^k, \lambda_i^l)],$$

donde p_i^{lk} representa un elemento de la relación de preferencia difusa obtenida para el experto i , λ_i^l representa la evaluación dada por el experto i a la alternativa x_l y ψ es una función que ha de cumplir las siguientes dos condiciones:

- a) $\psi(z, z) = \frac{1}{2}, \forall z \in R$.
- b) ψ es no decreciente en el primer argumento y no creciente en el segundo argumento.

En [37] obtuvieron una función para transformar relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas,

$$p_i^{lk} = f(a_i^{lk}) = \frac{1}{2} (1 + \log_9 a_i^{lk}).$$

donde a_i^{lk} representa los valores de la relación de preferencia multiplicativa.

3. Se aplica el proceso de selección. Este proceso está compuesto por dos fases:

- Fase de agregación. En esta fase se obtiene una relación de preferencia difusa colectiva P_c que representa la preferencia global del grupo. P_c se calcula agregando las relaciones de preferencia difusas individuales $\{P_{e_1}, \dots, P_{e_m}\}$. La operación de agregación es llevada a cabo utilizando el operador OWA ϕ_Q [161],

$$p_c^{lk} = \phi_Q(p_1^{lk}, \dots, p_m^{lk}) = \sum_{z=1}^n w_z \cdot p_z^{lk},$$

donde Q es un cuantificador lingüístico difuso [172] que representa el concepto de mayoría difusa.

- Fase de explotación. En esta fase se obtiene un orden de alternativas que representan la solución al problema. Para establecer este ranking de alternativas se utilizan dos criterios de selección: *grado de dominancia guiado*

por cuantificador de la alternativa x_l ,

$$QGDD^l = \phi_Q(p_c^{lk}, l = 1, \dots, n)$$

y el grado de no dominancia guiado por cuantificador de la alternativa x_l ,

$$QGNDD^l = \phi_Q(1 - p_s^{kl}, k = 1, \dots, n)$$

donde $p_s^{kl} = \max\{p_c^{kl} - p_c^{lk}, 0\}$ representa el grado de dominancia estricta en el que x_l es estrictamente dominado por x_k .

El proceso de selección se aplica en dos direcciones:

- a) Sobre la relación de preferencia colectiva P_c obtenida en el proceso de agregación. El resultado es un vector ordenado de alternativas colectivo temporal (es decir, no definitivo),

$$V_c = (V_c^1, \dots, V_c^n)$$

donde cada V_c^l representa la posición de la alternativa x_l según las preferencias del grupo de expertos.

- b) Sobre cada una de las relaciones de preferencia difusas individuales $\{P_{e_1}, \dots, P_{e_m}\}$, obteniendo un vector ordenado de alternativas individual V_i para cada experto i ,

$$V_i = (V_i^1, \dots, V_i^n)$$

donde cada V_i^l representa la posición de la alternativa x_l según las preferencias del experto i

Estos vectores representan las soluciones al problema según la opinión colectiva del grupo de expertos y según las opiniones individuales de cada experto.

4. Se calcula el grado de consenso sobre cada alternativa $C(x_j)$, comparando la coincidencia de la posición de la alternativa j entre la solución individual del experto V_i y la colectiva V_c ,

$$C(x_j) = 1 - \sum_{i=1}^m \frac{p_i(x_j)}{m}$$

donde $p_i(x_j)$ representa la proximidad del experto i respecto a la alternativa j que se obtiene comparando su posición en la solución individual y en la solución colectiva:

$$p_i(x_j) = p(V_i, V_c)(x_j) = f\left(\frac{|V_c^j - V_i^j|}{n-1}\right)$$

5. A continuación, se calcula el grado de consenso total C_X agregando todos los grados de consenso a nivel de alternativas $C(x_j)$. Para hacer esta agregación se utiliza el operador de agregación S-OWA OR-LIKE definido por Yager y Filev en [167]:

$$C_X = S_{OWA \text{ OR-LIKE}}(\{C(x_s); x_s \in X_{sol}\},$$

$$\{C(x_t); x_t \in X - X_{sol}\}) = \\ (1 - \beta) \cdot \sum_{t=1}^{\nu} \frac{C(x_t)}{\nu} + \beta \cdot \sum_{s=1}^{\rho} \frac{C(x_s)}{\rho},$$

donde ρ es el cardinal del conjunto X_{sol} , ν es el cardinal del conjunto $X - X_{sol}$ y $\beta \in [0, 1]$ es un parámetro de control del comportamiento del operador de agregación.

Si C_X es mayor que un umbral de consenso fijado previamente, entonces podemos dar por concluido el proceso de consenso y la solución final al problema será el vector ordenado de preferencias colectivo obtenido temporalmente

$$V_c = (V_c^1, \dots, V_c^n).$$

En caso contrario se continuará por el punto 6.

6. Se produce un proceso de realimentación del modelo para cambiar las preferencias de los expertos más alejados de la preferencia colectiva. Para hacer esto es necesario calcular la proximidad de la solución de cada experto i respecto a la preferencia colectiva. Esta proximidad, denominada P_X^i , se obtiene agregando las proximidades a nivel de alternativas $p_i(x_s)$ y utilizando de nuevo el operador S-OWA OR-LIKE:

$$P_X^i = S_{OWA \text{ OR-LIKE}}(\{1 - |p_i(x_s)|; x_s \in X_{sol}\}, \\ \{1 - |p_i(x_t)|; x_t \in X - X_{sol}\}).$$

De esta operación se obtienen los expertos más alejados y por lo tanto los que deberán cambiar sus preferencias sobre X . A continuación se produce la realimentación que permitirá repetir de nuevo todo el proceso hasta que se alcance un grado de consenso suficiente o bien se haya llevado a cabo un número de rondas máximo fijado previamente y controlado por un contador.

2.3.6. Modelo teórico del proceso de consenso

Finalizaremos la revisión de los modelos de consenso presentando un modelo de consenso teórico. En este modelo se describe en detalle las diferentes operaciones y fases que se llevan a cabo en los procesos de consenso tal y como se desarrollan en situaciones reales dentro de una empresa u organización.

S. Saint y J.R. Lawson [143] aportan su visión del consenso desde una óptica empresarial donde la toma de decisiones por acuerdo o consenso ha ido desplazado poco a poco a la toma de decisiones individual o apoyada en una sola persona.

Ambos autores se dedican profesionalmente al asesoramiento de empresas que han optado por introducir esta técnica de decisión en sus órganos de dirección.

En [143] se presenta una descripción de los pasos, circunstancias y agentes que pueden intervenir en un proceso de consenso. El modelo es demasiado complejo para ser implementado directamente, pero es interesante porque aporta una visión diferente a la del resto de autores citados en esta memoria respecto al concepto y proceso a seguir para alcanzar el acuerdo.

S. Saint y J. Lawson define el consenso como:

*“A state of mutual agreement among members of a group where all legitimate concerns of individuals have been addressed to the satisfaction of the group”*³

Esta definición hace una interpretación más filosófica del consenso al considerarlo como el sentimiento o creencia por parte de los expertos de que todas sus opiniones han sido oídas y tenidas en cuenta para la elección de la decisión final. Hace más hincapié en la forma de alcanzar el consenso que en la valoración cuantitativa del mismo.

El hecho de que todas las opiniones o posibles inconvenientes sobre una determinada propuesta sean consideradas antes de tomar una decisión final, asegura que todos los expertos se sientan partícipes del proceso de toma de decisión. De esta forma se evitan situaciones en las que parte de los expertos puedan estar molestos porque sus opiniones no han sido tenidas en cuenta y por lo tanto no consideren la decisión final como la solución al problema planteado.

Esta visión del consenso difiere de las visiones anteriores basadas en la idea de medir el consenso exclusivamente como el “acuerdo de la mayoría de los expertos”, no teniendo en cuenta las opiniones de las minorías. En los modelos vistos

³ Estado de mutuo acuerdo entre los miembros de un grupo donde todas las preocupaciones o inconvenientes de los individuos han sido tenidos en cuenta para la satisfacción del grupo

anteriormente, el consenso se alcanza cambiando las preferencias de los expertos cuyas opiniones están más alejadas de una opinión colectiva. El moderador interviene recomendando que los expertos más alejados cambien sus preferencias con el propósito de aproximarlas a las del resto de expertos. Esto implica que sólo algunos expertos cambien de opinión y por lo tanto que se imponga la opinión de la mayoría sobre la minoría.

En este modelo se propone que todos los expertos cambien sus preferencias y acerquen sus opiniones utilizando como último recurso si no se alcanza el consenso deseado la imposición de la opinión de la mayoría. Esta idea nos ha parecido muy interesante y enriquecedora, de ahí que la hayamos incluido en la propuesta que se presentará en el Capítulo 4.

En la Figura 2.7 se muestra una representación gráfica del modelo propuesto por Saint y Lawson, el cual se puede dividir en tres fases principales:

1. Asimilación de la propuesta. En esta fase se lleva a cabo la presentación y aclaración de las posibles dudas que pueden surgir sobre la propuesta que se pretende aprobar por consenso. También se hace una primera consulta sobre la existencia de algún inconveniente a que la propuesta inicial sea considerada como la solución idónea al problema planteado.
2. Resolución de inconvenientes. Esta fase está compuesta por varias rondas de consenso donde los expertos expresan, discuten e intentan resolver los inconvenientes individuales que atribuyen a la propuesta inicial. Al final de cada ronda de consulta se comprueba si se ha alcanzado el acuerdo deseado.
3. Cierre del proceso. Llegar a esta fase significa que los expertos no han sido capaces de alcanzar un consenso sobre la idoneidad de la alternativa propuesta en el

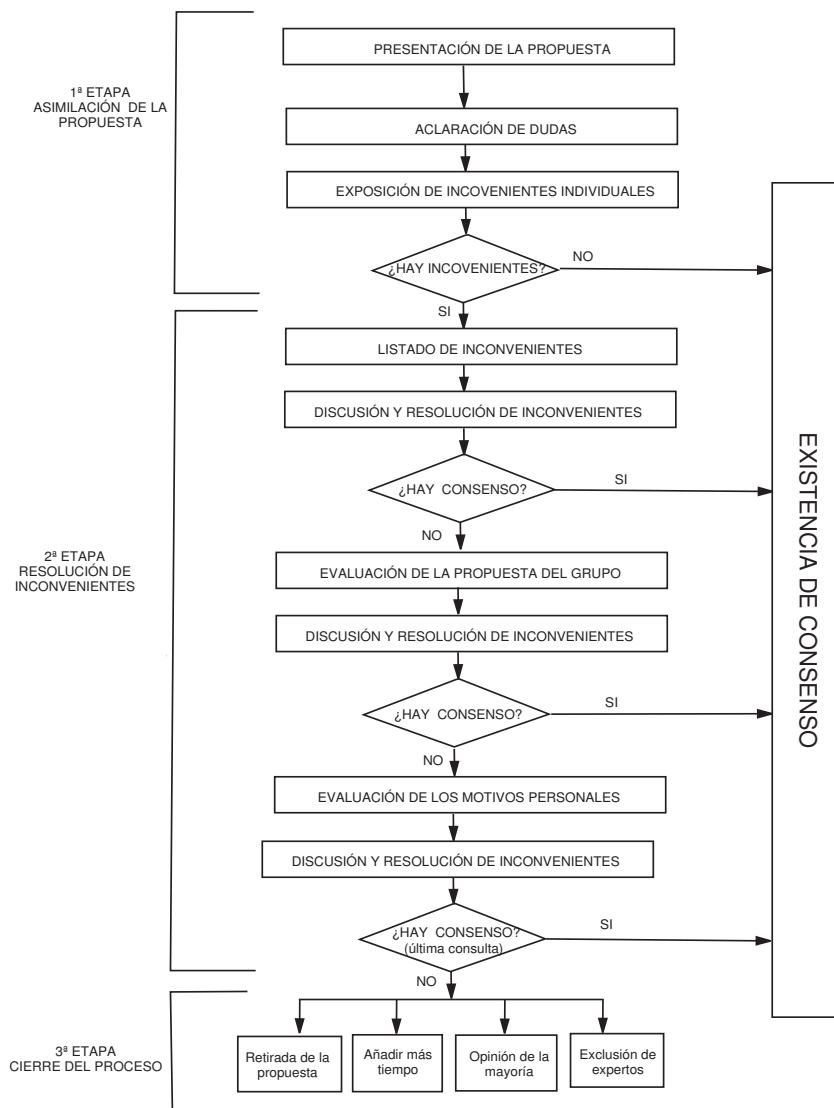


Figura 2.7: Modelo de consenso propuesto por Saint y Lawson

periodo de tiempo inicialmente establecido. Por lo tanto es necesario proceder al cierre la sesión de consenso tomando alguna de las siguientes medidas:

- Retirar la propuesta.
- Añadir más tiempo a la fase de resolución de inconvenientes.
- Tomar como decisión final la opinión de la mayoría.

- d) Excluir a los expertos que impiden alcanzar el consenso.

Finalmente resaltar que nos ha parecido interesante incluir en esta sección la clasificación que realizan los autores de los diferentes papeles que deben asignarse a los individuos que participan en el proceso de consenso. A diferencia de los modelos anteriores donde sólo se menciona la figura del moderador, Saint y Lawson proponen las siguientes figuras:

- a) **Moderador.** El moderador (también denominado monitor, mediador o facilitador) es una figura clave del proceso de consenso. Como ya hemos comentado varias veces, su función es la puesta en marcha de todo el proceso y el control de la correcta ejecución del mismo. Es el encargado de aconsejar a los participantes que cambien las opiniones más discrepantes y las acerquen a las del resto de miembros del grupo. Además de estas funciones, también se puede encargar de observar el flujo emocional del proceso, es decir, identificar a los participantes más tímidos y reprobar a los que quieran imponer sus opiniones al resto. Se aconseja que no sea una persona perteneciente a los niveles directivos de la organización para impedir que algunos de los participantes se sientan cohibidos a la hora de expresar sus opiniones.
- b) **Redactor del acta.** Como su propio nombre indica, esta persona es la encargada de redactar el acta de cada sesión de consenso donde se ha de recoger por escrito las conclusiones o decisiones que se hayan alcanzado. Es necesario que antes de abandonar la reunión, se proceda a la lectura del acta para evitar que los miembros la abandonen con ideas diferentes sobre las decisiones acordadas.
- c) **Controlador del tiempo.** Al igual que ocurre en cualquier reunión donde se vayan a abordar varios asuntos, es necesario asignar un tiempo determinado

a cada una de las fases que componen la sesión de consenso. El controlador de tiempo trabaja junto al moderador para controlar que se cumpla y no se exceda el tiempo asignado a cada una de estas fases. Se encargará de ir recordando periódicamente a los participantes el tiempo restante de cada fase con el propósito de sean conscientes del momento en el que se encuentran dentro de todo el proceso de consenso.

Capítulo 3

Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para Problemas de TDG definidos en Contextos Lingüísticos Multigranulares

En este capítulo presentamos un modelo de sistema de apoyo al consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos lingüísticos multigranulares.

Comenzaremos describiendo el contexto de definición del problema y a continuación se presentará en detalle el modelo de sistema de apoyo al consenso propuesto, analizando una por una las distintas fases en las que está dividido.

Finalmente se concluirá este capítulo con un ejemplo completo del funcionamiento de dicho modelo.

3.1. Problemas de TDG en Contextos Lingüísticos Multigranulares

Como ya se comentó en el Capítulo 1, un problema de TDG se define como una situación de decisión en la que intervienen varios expertos que pueden tener diferentes percepciones, actitudes y conocimiento sobre el problema y que intentan encontrar en común la mejor solución al mismo.

En los problemas de decisión, los expertos pueden valorar cuestiones o aspectos de naturaleza cuantitativa que admiten valoraciones numéricas más o menos precisas o bien aspectos cuya naturaleza cualitativa difícilmente admiten valoraciones numéricas. En este último caso es más apropiado que los expertos utilicen un modelado de preferencias que se adapten mejor a ese tipo de aspectos, como puede ser un modelado de preferencias lingüístico.

El uso del Enfoque Lingüístico Difuso [171] ha dado buenos resultados en la representación y valoración de información cualitativa, utilizando variables lingüísticas para representar este tipo de información [1, 5, 14, 17, 45, 47, 73, 155, 158, 164].

En los problemas de TDG es recomendable que intervengan un grupo amplio y variado de expertos que pertenezcan a diferentes áreas de trabajo. Cuanto mayor sea el número de fuentes de información diferentes, mayor será el número de puntos de vista desde los que se analizará el problema y mayor la garantía de éxito de la solución final que se obtenga.

En esta memoria centramos nuestro interés en problemas de TDG con información vaga o imprecisa en los que se evalúan fenómenos que por su naturaleza cualitativa recomiendan el uso de términos lingüísticos para expresar las preferencias. El hecho de que participen expertos de diferentes ámbitos puede implicar que tengan diferentes grados de conocimiento sobre el problema y de ahí que uti-

licen conjuntos de términos lingüísticos distintos para expresar sus preferencias. Si bien esta variedad de procedencias de los expertos es una condición deseable, puede traer consigo el problema de tener que trabajar con conjuntos de términos lingüísticos con una semántica y/o granularidad diferente. En este tipo de situaciones diremos que el problema TDG está definido en un contexto lingüístico multigranular [73, 80, 84, 88].

Formalmente, un problema de TDG está definido en un contexto lingüístico multigranular cuando dado un conjunto de expertos

$$E = \{e_1, \dots, e_m\},$$

cada e_i utiliza un conjunto de términos lingüísticos diferente

$$S_i = \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_{g_i}^i\}$$

para expresar sus preferencias sobre un conjunto de alternativas

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Cada S_i está caracterizado por su propia granularidad de la incertidumbre y/o semántica,

$$\#(S_i) = g_i + 1.$$

Sirva como ejemplo un problema de TDG donde dados dos expertos e_i y e_j , el experto i utiliza un conjunto con nueve términos o etiquetas lingüísticas $S_i = \{a_0, \dots, a_8\}$ para dar sus preferencias y el experto j otro diferente con sólo cinco etiquetas $S_j = \{c_0, \dots, c_4\}$ para dar las suyas.

3.2. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso para Problemas de TDG con Información Lingüística Multigranular

En cualquier problema de TDG cada experto tiene su propia opinión sobre cual es la mejor alternativa/s para resolver el problema planteado. Hemos visto que en la literatura este tipo de problemas ha sido resuelto llevando a cabo un proceso de selección de alternativas que consiste en realizar una serie de operaciones (agregación y explotación) con el propósito de buscar la mejor alternativa solución al problema a partir del conjunto de preferencias dadas por los expertos. Los detalles de este proceso pueden consultarse en el apartado 1.5.2 de esta memoria o en la numerosa bibliografía existente sobre el mismo [16, 31, 46, 47, 59, 61, 72, 75, 112, 114, 117, 120, 135, 159, 177].

Ahora bien, el hecho de resolver un problema de TDG llevando a cabo exclusivamente el proceso de selección no garantiza que la solución final obtenida sea asumida como la mejor por todo el grupo de expertos. De hecho puede existir expertos que a título individual tengan la sensación de que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución y por lo tanto la rechacen.

Para evitar estas situaciones no deseables, es recomendable realizar un proceso de consenso previo al proceso de selección. En este proceso, que ya ha sido descrito en detalle en la Sección 2.1, los expertos proponen, discuten y cambian sus preferencias con el fin de acercar sus opiniones y alcanzar un nivel de acuerdo mínimo que garantice que la solución final sea aceptada por todos ellos.

El intento de modelar este proceso de consenso nos ha llevado a proponer un modelo de sistema de apoyo al consenso (SAC) capaz de llevar a cabo el proceso

de búsqueda del consenso de forma automática y sin la intervención de la figura del moderador humano.

En la Figura 3.1 se describe gráficamente el papel que desempeñaría un modelo de SAC en el esquema general de resolución de un problema de TDG.

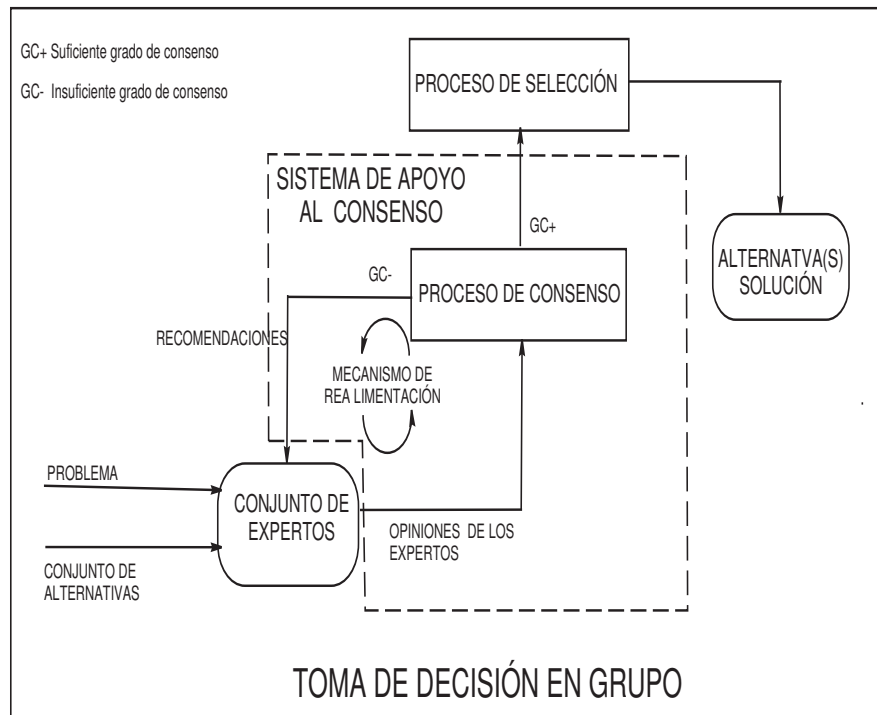


Figura 3.1: Modelo de SAC para problemas de TDG

Como se observa, una vez que los expertos han expresado sus opiniones, un proceso de consenso calcula el nivel de acuerdo entre ellos. Si el grado de consenso es aceptable, se da por finalizado el proceso de consenso, en caso contrario, se generan una serie de recomendaciones que apoyándose en un mecanismo de realimentación se hacen llegar a los expertos. A continuación se repite de nuevo todo el proceso.

El modelo que presentamos en este capítulo ha sido pensado para aplicarse en problemas de TDG en los que los expertos utilizan diferentes conjuntos de térmi-

nos lingüísticos para expresar sus preferencias, es decir, problemas definidos en contextos lingüísticos multigranulares. Por este motivo, además de proponer una metodología para tratar con información lingüística multigranular, se han definido una serie de medidas que permiten evaluar el nivel de acuerdo que existe entre los expertos en este tipo de contextos. Para conseguir automatizar el proceso de consenso, se ha diseñado un sistema de recomendaciones orientado cuya finalidad es identificar las preferencias en las que no existe suficiente acuerdo y recomendar a los expertos la dirección en las que han de cambiar tales preferencias con el propósito de aproximarlas y así mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda de consenso.

Las características y funcionamiento del modelo se presentan en los siguientes apartados de este capítulo.

3.2.1. Características del modelo

Siguiendo una estructura similar a la utilizada en la presentación de los modelos de consenso vistos en el Capítulo 2, antes de pasar a describir las distintas fases que componen el modelo propuesto, comentaremos las características más sobresalientes del mismo:

- a) Expresión de preferencias. Los expertos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas utilizando relaciones de preferencia lingüísticas difusas. Una descripción más formal del contexto de definición del problema sería la siguiente. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) el conjunto de alternativas finito valoradas por un conjunto de expertos $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$). Cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre X por medio de una relación de preferencia difusa $P_{e_i} : X \times X$ con función de pertenencia $\mu_{P_{e_i}} : X \times X \rightarrow S_i$,

donde cada valor $\mu_{P_{e_i}}(x_l, x_k) = p_i^{lk}$ denota el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k expresada por el experto e_i ,

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

$S_i = \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_{g_i}^i\}$ representa el conjunto de términos lingüísticos utilizados por e_i para dar sus preferencias y está caracterizado por su cardinalidad $\#(S_i) = g_i + 1$.

Las relaciones de preferencia permiten trabajar con tres niveles de información diferentes:

- A nivel de pares de alternativas. Fijada una alternativa x_l y una alternativa x_k , es posible conocer la información disponible sobre el par (x_l, x_k) .
- A nivel de alternativas. Fijada una alternativa x_l , es posible conocer la información disponible sobre esa alternativa a partir de los pares que la componen, (x_l, x_k) con $k = 1, \dots, n$
- A nivel de relación. Teniendo en cuenta la información aportada por todas las alternativas, se puede obtener un valor que represente la información contenida en la relación de preferencia.

Al considerar nuestra propuesta como un modelo general, en los ejemplos presentados en esta memoria no se requerirá que las relaciones de preferencia satisfagan las propiedades enumeradas en la página 23, dejando para cada problema particular la posibilidad de exigir el cumplimiento de alguna de estas propiedades.

b) Medición del consenso. Se definen dos tipos de medidas para estudiar el consenso:

- 1) Grados de consenso. El grado de consenso mide el grado o el nivel de acuerdo alcanzado entre los expertos en cada una de las rondas que componen el proceso de búsqueda del consenso. Está valorado dentro del intervalo $[0,1]$ de forma que un valor cercano a 1 indica un grado de consenso muy alto mientras que un valor cercano a 0 indica un grado de consenso muy bajo.
- 2) Medidas de proximidad. Las medidas de proximidad miden la distancia que existe entre las preferencias dadas por cada experto y la preferencia colectiva dada por el grupo de expertos. Al igual que el grado de consenso, la proximidad también se valora en $[0,1]$ de forma que una proximidad cercana a 1 indica que la opinión del experto está muy próxima a la opinión colectiva, mientras que un valor cercano a 0 indica que ambas opiniones son muy diferentes.

Ambas medidas se calcularán en los tres niveles descritos anteriormente:

- Pares de alternativas. Permiten conocer el grado de consenso y la proximidad de las valoraciones dadas a cada par de alternativas (x_l, x_k) .
- Alternativas. Permiten conocer el grado de consenso y la proximidad que existe en cada una de las alternativas al problema.
- Relaciones. Permiten conocer el grado de consenso total que existe entre los expertos así como la proximidad del conjunto de preferencias dadas por cada experto respecto a la opinión colectiva.

Con ambas medidas se podrá identificar por ejemplo los pares de alternativas en los que no hay consenso o aquellos expertos cuya opinión global esté más alejada de la opinión del grupo.

El cálculo y estudio del grado de consenso y proximidad a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones permite conocer en detalle la contribución de cada uno de ellos a la consecución del consenso buscado.

c) Sistema de recomendaciones orientado. En un proceso de consenso, la tarea de identificar a los expertos más discrepantes y recomendar que cambien sus preferencias ha sido siempre desempeñada por la figura del moderador, siendo esta una actividad fundamental para conseguir alcanzar el consenso en un periodo de tiempo no demasiado grande. En este modelo se propone un módulo al que hemos denominado sistema de recomendaciones orientado que se encargará de realizar esta tarea sirviéndose para ello de las medidas de consenso presentadas anteriormente, consiguiéndose de esta forma automatizar las tareas del moderador. Este módulo tiene asignada dos funciones:

- Identificar aquellas preferencias que no contribuyen a alcanzar un grado de consenso satisfactorio.
- Recomendar a los expertos los cambios que deben hacer en sus preferencias para mejorar el grado de consenso.

Comentadas las características más importantes del modelo, en la siguiente sección describiremos las diferentes fases que lo componen.

3.3. Fases del Modelo

En la Figura 3.2 se presenta un esquema general del modelo de SAC para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares.

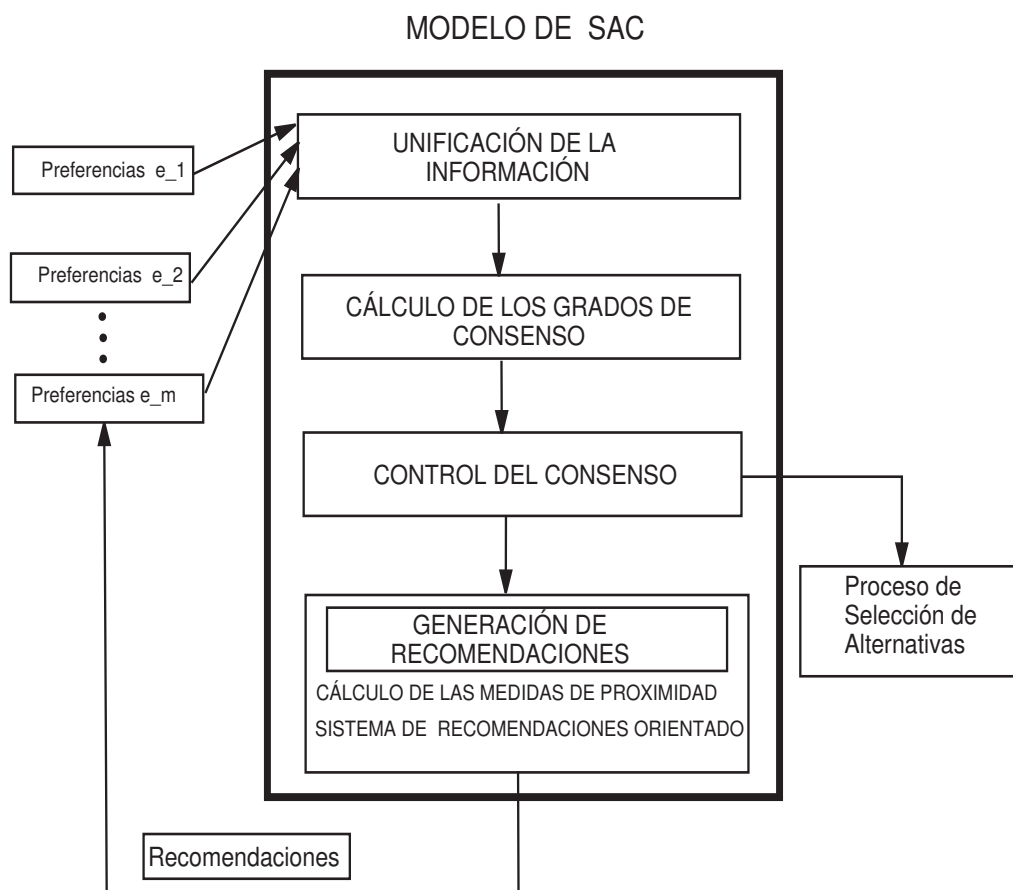


Figura 3.2: Modelo de SAC para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares

El modelo está dividido en cuatro grandes fases que presentamos brevemente a continuación y que se describirán en detalle en distintos apartados de esta sección:

1. **Unificación de la información.** En esta fase se lleva a cabo un proceso para unificar bajo un único dominio lingüístico todas las preferencias de los expertos

expresadas en distintos dominios lingüísticos. Este proceso de unificación es necesario para poder calcular las medidas de consenso descritas anteriormente.

2. **Cálculo de los grados de consenso.** En esta fase se calcula el grado de consenso alcanzado a nivel de pares de alternativas, alternativas y a nivel de relaciones de preferencia. Para hacer estos cálculos se definirá una función para medir la similitud entre las preferencias de los expertos.
3. **Control del consenso.** En esta fase se comprueba el grado de consenso alcanzado entre los expertos. Puede ocurrir que este grado de consenso sea suficiente, dando por finalizado el proceso de consenso, o bien insuficiente, continuando el modelo por la siguiente fase.
4. **Generación de recomendaciones.** Finalmente, en la última fase el modelo genera el conjunto de recomendaciones que los expertos deberían seguir para aproximar sus preferencias y mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda. Para hacer esto, primero se calcularán las medidas de proximidad. A continuación un sistema basado en reglas utilizará los grados de consenso y las medidas de proximidad para identificar y sugerir los cambios de preferencias que recomendará a los expertos.

Como puede verse en la descripción gráfica del modelo, estas cuatro fases se ejecutan secuencialmente y dentro de un ciclo que se corresponde con lo que podríamos entender por una “ronda de consenso”. El modelo de SAC recibe las preferencias de los expertos expresadas mediante relaciones de preferencia lingüísticas multigranulares. El modelo aplica un proceso de unificación de la información a partir del cual es posible calcular el grado de consenso alcanzado entre los expertos. A continuación se compara el grado de consenso alcanzado en esa ronda con

un umbral de consenso γ . Este umbral representa el grado de consenso mínimo que debe alcanzarse para dar por finalizado la fase de consenso y habrá sido acordado previamente por el conjunto de expertos e introducido como un parámetro al modelo. Si el grado de consenso es mayor que γ , finaliza el proceso de consenso y comenzará el proceso de selección de alternativas, en caso contrario, se generará un conjunto de recomendaciones que a través de un mecanismo de realimentación serán propuestas a los expertos.

Observación: Antes de presentar en detalle las diferentes fases, indicar que nos apoyaremos en un ejemplo sencillo al que hemos denominado “Ejemplo modelo” para explicar las distintas operaciones, cálculos y medidas obtenidas por el modelo.

Ejemplo modelo

Sean e_1 y e_2 dos expertos y sean $S_1 = \{a_0, \dots, a_8\}$ y $S_2 = \{c_0, \dots, c_4\}$ los dos conjuntos de términos lingüísticos de cardinalidades 9 y 5 utilizados por e_1 y e_2 respectivamente para expresar sus preferencias sobre un conjunto de 4 alternativas $X = \{x_1, \dots, x_4\}$. Las preferencias de los expertos utilizando ambos conjuntos de términos y relaciones de preferencia lingüísticas son las siguientes:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_5 & - & a_8 & a_4 \\ a_4 & a_1 & - & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_7 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_2} = \begin{pmatrix} - & c_0 & c_0 & c_2 \\ c_4 & - & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_0 & - & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_3 & - \end{pmatrix}$$

3.3.1. Unificación de la información

Trabajar con información lingüística multigranular significa que los expertos expresan sus preferencias utilizando conjuntos de términos lingüísticos con diferente granularidad, es decir, conjuntos con diferente cardinalidad y/o semántica.

Para operar con este tipo de información necesitamos llevar a cabo un proceso de unificación de la información, debido a que no existe operadores que trabajen directamente con información lingüística multigranular. La fase de unificación consiste en un proceso de transformación que permita expresar todas las preferencias lingüísticas dadas por los expertos en sus respectivos dominios particulares S_i en un único dominio lingüístico normalizado al que denominaremos conjunto básico de términos lingüísticos y que notaremos como S_T .

La primera cuestión que debemos resolver antes de llevar a cabo el proceso de transformación es la elección de un adecuado S_T . Este conjunto básico de términos lingüísticos ha de ser capaz de recoger los diferentes grados de incertidumbre presentes en los conjuntos de términos lingüísticos individuales utilizados por los expertos para expresar sus preferencias. De forma general y dentro de un contexto lingüístico multigranular, para la elección de un S_T apropiado se procede de la siguiente forma:

- Si existe un único conjunto de términos lingüísticos con máxima granularidad, entonces los seleccionaremos como S_T .
- Si existen dos o más conjuntos de términos lingüísticos con máxima granularidad, entonces la elección de S_T dependerá de la semántica asociada a cada uno de ellos teniendo en cuenta los siguientes casos:
 1. Si todos los conjuntos tienen idéntica semántica (aunque con términos lingüísticos diferentes), entonces cualquiera de ellos puede ser elegido como S_T .
 2. Si dos o más de estos conjuntos tienen diferente semántica, entonces S_T deberá ser un conjunto de términos lingüísticos con una cardinalidad mayor que

el número de términos que normalmente una persona es capaz de discriminar (alrededor de 7 o 9 términos [124]).

Una vez seleccionado S_T , ya se puede llevar a cabo el proceso para unificar todas las preferencias de los expertos en un sólo dominio lingüístico. Para hacer esta unificación, definiremos una función de transformación multigranular $\tau_{S_i S_T}(\cdot)$ que convierte cada etiqueta lingüística en un conjunto difuso definido sobre S_T , [73].

Definición 3.1. Sea $S = \{l_0, \dots, l_p\}$ y $S_T = \{c_0, \dots, c_g\}$ dos conjuntos de términos lingüísticos con $g \geq p$. Definimos una función de transformación multigranular, τ_{SS_T} como:

$$\tau_{SS_T} : S \longrightarrow F(S_T)$$

$$\tau_{SS_T}(l_i) = \{(c_h, \alpha_h) \mid h \in \{0, \dots, g\}\}, \forall l_i \in S$$

$$\alpha_h = \max_y \min\{\mu_{l_i}(y), \mu_{c_h}(y)\}$$

donde $F(S_T)$ es el conjunto de conjuntos difusos definidos sobre S_T , siendo $\mu_{l_i}(y)$ y $\mu_{c_h}(y)$ las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos asociados a los términos l_i y c_h , respectivamente.

Por tanto, el resultado de τ_{SS_T} para cualquier etiqueta lingüística de S es un conjunto difuso definido sobre el conjunto básico de términos lingüísticos S_T .

Ejemplo

Sean $S = \{l_0, l_1, \dots, l_4\}$ y $S_T = \{s_0, s_1, \dots, s_6\}$ dos conjuntos de términos lingüísticos con la siguiente semántica asociada cuya representación mediante números difusos triangulares se muestra en la Figura 3.3:

$$\begin{aligned}
 l_0 &= (0, 0, 0.25) & s_0 &= (0, 0, 0.16) \\
 l_1 &= (0, 0.25, 0.5) & s_1 &= (0, 0.16, 0.34) \\
 l_2 &= (0.25, 0.5, 0.75) & s_2 &= (0.16, 0.34, 0.5) \\
 l_3 &= (0.5, 0.75, 1) & s_3 &= (0.34, 0.5, 0.66) \\
 l_4 &= (0.75, 1, 1) & s_4 &= (0.5, 0.66, 0.84) \\
 & & s_5 &= (0.66, 0.84, 1) \\
 & & s_6 &= (0.84, 1, 1)
 \end{aligned}$$

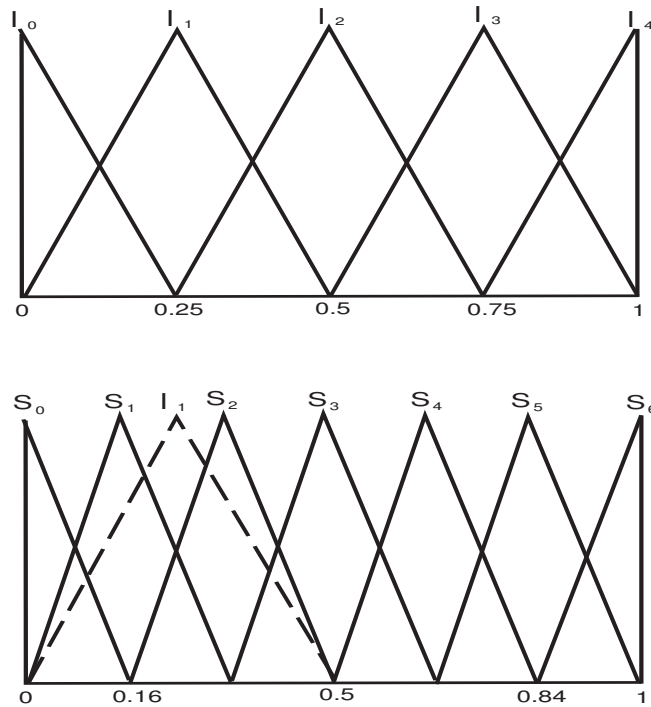


Figura 3.3: Transformación de $l_1 \in S$ en un conjunto difuso sobre S_T

El conjunto difuso obtenido después de aplicar la función de transformación multigranular τ_{SS_T} para la etiqueta l_1 es:

$$\tau_{SS_T}(l_1) = \{(s_0, 0.39), (s_1, 0.85), (s_2, 0.85), (s_3, 0.39), (s_4, 0), (s_5, 0), (s_6, 0)\}$$

Para unificar todas las preferencias de los expertos definimos una función de

transformación $\tau_{S_i S_T}(\cdot)$ para cada conjunto de términos lingüísticos S_i . En particular, teniendo en cuenta que las preferencias de cada experto i se expresan por medio de relaciones de preferencia P_{e_i} ,

$$P_{e_i} = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

cada preferencia lingüística p_i^{lk} será transformada en un conjunto difuso definido sobre $S_T = \{c_0, \dots, c_g\}$ y que notaremos por \tilde{p}_i^{lk} :

$$\tilde{p}_i^{lk} = \tau_{S_i S_T}(p_i^{lk}) = \{(c_h, \alpha_{ih}^{lk}) \mid h = 0, \dots, g\}$$

$$\alpha_{ih}^{lk} = \max_y \min\{\mu_{p_i^{lk}}(y), \mu_{c_h}(y)\}$$

donde al menos $\exists \alpha_{ih}^{lk} > 0$ y $\forall \alpha_{ih}^{lk} \in [0, 1]$.

Para simplificar la notación, utilizaremos sólo los grados de pertenencia $(\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ para representar cada conjunto difuso \tilde{p}_i^{lk} , transformado las relaciones de preferencia en matrices de conjuntos difusos:

$$\tilde{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_{i0}^{11}, \dots, \alpha_{ig}^{11}) & \cdots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_{i0}^{1n}, \dots, \alpha_{ig}^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_{i0}^{n1}, \dots, \alpha_{ig}^{n1}) & \cdots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_{i0}^{nn}, \dots, \alpha_{ig}^{nn}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo modelo

Volviendo sobre el ejemplo propuesto, los expertos 1 y 2 utilizan los conjuntos de términos lingüísticos $S_1 = \{a_0, \dots, a_8\}$ y $S_2 = \{c_0, \dots, c_4\}$ con cardinalidad $\#(S_1) = 9$ y $\#(S_2) = 5$ para dar sus preferencias. Como los dos conjuntos tienen diferente granularidad, según los criterios comentados anteriormente se seleccionará como S_T el conjunto con mayor granularidad, en este caso, $S_T = S_1$. Para llevar a cabo la unificación se aplican las funciones de transformación $\{\tau_{S_1 S_T}, \tau_{S_2 S_T}\}$

que transforman las etiquetas lingüísticas de ambos conjuntos en los conjuntos difusos definidos sobre S_T que se muestran en la siguiente Tabla 3.1:

$\tau_{S_1 S_T} :$	$\tau_{S_2 S_T} :$
$a_0 \mapsto (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_0 \mapsto (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$a_1 \mapsto (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_1 \mapsto (0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)$
$a_2 \mapsto (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_2 \mapsto (0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)$
$a_3 \mapsto (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_3 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)$
$a_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$c_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)$
$a_5 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$	
$a_6 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$	
$a_7 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	
$a_8 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	

Tabla 3.1: Conjuntos difusos obtenidos en la fase de unificación

Observación. Al utilizar como conjunto básico de términos lingüísticos S_T el propio S_1 , el resultado de aplicar la función de transformación $\tau_{S_1 S_T}$ a cada etiqueta lingüística de S_1 es un conjunto difuso con todos los grados de pertenencia $\alpha_{ih}^{lk} = 0$ salvo el que coincida en el índice con la etiqueta que se esté valorando que tomará un valor máximo, es decir, 1.

3.3.2. Cálculo del grado de consenso

Una vez que han sido unificadas todas las preferencias en un sólo dominio, ya es posible operar con tales preferencias y calcular el grado de consenso que existe entre los expertos. Para calcular el grado de consenso es necesario medir la similaridad que existe entre las preferencias de los expertos comparándolas entre sí y comprobando como de parecidas o diferentes son sus valoraciones.

3.3.2.1 Función de similaridad

El proceso de unificación transforma cada preferencia p_i^{lk} en un conjunto difuso

$$\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$$

definido sobre el conjunto básico de términos lingüísticos S_T .

Para medir la similaridad entre las preferencias decidimos utilizar funciones de distancia. En un primer momento interpretamos el conjunto difuso \tilde{p}_i^{lk} como un vector de grados de pertenencia y optamos por utilizar funciones de distancia clásicas como la Distancia Euclídea entre dos preferencias p_i^{lk} y p_j^{lk}

$$\delta_E(p_i^{lk}, p_j^{lk}) = \sqrt{\sum_{h=0}^g (\alpha_{ih}^{lk} - \alpha_{jh}^{lk})^2}$$

Analizando los resultados devueltos por esta función en varios ejemplos como el que presentamos a continuación, se pudo comprobar que estos no eran los resultados esperados.

Ejemplo 1

Sean $\tilde{p}_1^{12} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\tilde{p}_2^{12} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ y $\tilde{p}_3^{12} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ los tres conjuntos difusos obtenidos tras el proceso de unificación de las preferencias iniciales dadas por los expertos e_1, e_2 y e_3 sobre el par de alternativas (x_1, x_2) . Asumiendo que la información contenida en \tilde{p}_1^{12} se encuentra escorada a la izquierda, la contenida en \tilde{p}_2^{12} aproximadamente centrada y la de \tilde{p}_3^{12} escorada a la derecha, si se evalúa la similaridad de las tres preferencias cabe esperar que la similaridad entre \tilde{p}_1^{12} y \tilde{p}_2^{12} sea mayor que la similaridad entre \tilde{p}_1^{12} y \tilde{p}_3^{12} . Si embargo, si se mide la similaridad utilizando la Distancia Euclídea como función de similaridad se obtienen idénticos valores:

$$d(p_1^{12}, p_2^{12}) = \sqrt{\sum_{h=0}^g (\alpha_{1h}^{12} - \alpha_{2h}^{12})^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad d(p_1^{12}, p_3^{12}) = \sqrt{\sum_{h=0}^g (\alpha_{1h}^{12} - \alpha_{3h}^{12})^2} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto de este ejemplo se deduce que la Distancia Euclídea no es una función válida para evaluar la similaridad entre preferencias en el contexto en el que estamos trabajando. El problema reside en que para poder trabajar con el conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ es necesario tener en cuenta no sólo el valor de cada grado de pertenencia α_{ih}^{lk} sino también su posición h ($h = 0, \dots, g$) dentro del conjunto difuso. Para resolver este problema decidimos calcular el valor central de cada conjunto difuso, $cv(\tilde{p}_i^{lk})$ [46, 109]. El valor central representa la posición o el centro de gravedad de la información contenida en el conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ y se calcula como:

$$cv(\tilde{p}_i^{lk}) = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}}, \quad (3.1)$$

donde $index(s_h^i) = h$.

El rango de valores del valor central es el intervalo cerrado $[0, g]$. De hecho, de las siguientes desigualdades:

$$0 \leq index(s_h^i) \leq g \text{ y } 0 \leq \alpha_{ih}^{lk} \quad \forall i, h, k, l$$

se obtiene que

$$0 \leq index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk} \leq g \cdot \alpha_{ih}^{lk} \quad \forall i, h, k, l$$

y

$$0 \leq \sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk} \leq g \cdot \sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk} \quad \forall i, k, l.$$

Finalmente dividiendo por $\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}$ se obtiene que

$$0 \leq \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}} \leq g \quad \forall i, k, l$$

es decir, $cv(\tilde{p}_i^{lk}) \in [0, g] \quad \forall i, l, k$.

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo del valor central de varias preferencias de un experto.

Ejemplo 2

Sean $\tilde{p}_1^{14} = (0.3, 0.8, 0.6, 0, 0, 0)$, $\tilde{p}_1^{24} = (0, 0.3, 0.8, 0.6, 0, 0)$ y $\tilde{p}_1^{34} = (0, 0, 0, 0.3, 0.8, 0.6)$ tres conjuntos difusos que representan las preferencias dadas por el experto 1. Aplicando (3.1) se obtiene que el valor central de cada conjunto difuso es:

$$\begin{aligned} cv(\tilde{p}_1^{14}) &= \frac{0.3 \cdot 0 + 0.8 \cdot 1 + 0.6 \cdot 2}{0.3 + 0.8 + 0.6} = 1.18 \\ cv(\tilde{p}_1^{24}) &= \frac{0.3 \cdot 1 + 0.8 \cdot 2 + 0.6 \cdot 3}{0.3 + 0.8 + 0.6} = 2.18 \\ cv(\tilde{p}_1^{34}) &= \frac{0.3 \cdot 3 + 0.8 \cdot 4 + 0.6 \cdot 5}{0.3 + 0.8 + 0.6} = 4.18 \end{aligned}$$

Como se puede observar, conforme la información contenida en el conjunto difuso se va trasladando de izquierda a derecha, el valor central también se va desplazando en la misma dirección.

Considerando que el valor central representa la información contenida en un conjunto difuso, ya estamos en disposición de evaluar la similaridad entre los conjuntos difusos en los que han sido transformadas las preferencias de los expertos en la fase de unificación. Para ello definiremos la función de similaridad $s(\cdot)$ entre dos conjuntos difusos \tilde{p}_i^{lk} y \tilde{p}_j^{lk} evaluada en el intervalo unidad $[0, 1]$ como:

$$s : F(S_T) \times F(S_T) \rightarrow [0, 1]$$

$$s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_j^{lk})}{g} \right| \quad (3.2)$$

Un valor de $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$ cercano a 1 significa que ambas valoraciones son muy parecidas, mientras que un valor de $s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk})$ próximo a 0 significa que ambas

valoraciones son muy diferentes.

Con la función $s(\cdot)$, el problema que se nos presentó en el ejemplo 1 al utilizar la Distancia Euclídea queda ahora resuelto:

Ejemplo 3

Dados los tres conjuntos difusos del ejemplo 1 que representan la preferencias de tres expertos, $\tilde{p}_1^{12} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\tilde{p}_2^{12} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\tilde{p}_3^{12} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$, la similaridad entre las preferencias utilizando la función definida en (3.2) devuelve los siguientes valores:

$$s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_2^{12}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_1^{12}) - cv(\tilde{p}_2^{12})}{5} \right| = 1 - \left| \frac{0 - 3}{5} \right| = 0.4$$

$$s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_3^{12}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_1^{12}) - cv(\tilde{p}_3^{12})}{5} \right| = 1 - \left| \frac{0 - 5}{5} \right| = 0$$

Tal y como cabría esperar, la similaridad entre los conjuntos difusos $s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_2^{12})$ ha de ser mayor que la que existe entre los conjuntos difusos $s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_3^{12})$, siendo esta última mínima puesto que representan dos valoraciones que se encontrarían en los extremos de un posible rango de valores.

3.3.2.2 Grados de consenso

Definida la función de similaridad propuesta en (3.2), el modelo de SAC lleva a cabo la siguiente secuencia de operaciones con el propósito de calcular el grado de consenso existente entre los expertos:

1. **Cálculo de los valores centrales.** Se calcula el $cv(\tilde{p}_i^{lk})$ de cada conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ obtenido después del proceso de unificación. Los valores centrales se calculan a partir de la fórmula definida en (3.1),

$$cv(\tilde{p}_i^{lk}) = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}}$$

Ejemplo modelo

Para no repetir la misma operación sobre todas las preferencias dadas por los expertos tan sólo se muestran los cálculos realizados para las siguientes preferencias:

$$p_1^{12} = a_1 \mapsto \tilde{p}_1^{12} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$p_1^{43} = a_7 \mapsto \tilde{p}_1^{43} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$p_2^{12} = c_0 \mapsto \tilde{p}_2^{12} = (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$p_2^{41} = c_2 \mapsto \tilde{p}_2^{41} = (0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)$$

Los valores centrales de estas preferencias se calculan como:

$$cv(\tilde{p}_1^{12}) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

$$cv(\tilde{p}_1^{43}) = \frac{7 \cdot 1}{1} = 7$$

$$cv(\tilde{p}_2^{12}) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0.67 + 2 \cdot 0.33}{1 + 0.67 + 0.33} = \frac{1.33}{2} = 0.67$$

$$cv(\tilde{p}_2^{41}) = \frac{2 \cdot 0.33 + 3 \cdot 0.67 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0.67 + 6 \cdot 0.33}{0.32 + 0.66 + 1 + 0.68 + 0.34} = \frac{12.06}{3} = 4.02$$

En las Tablas 3.2 y 3.3 se muestran los valores centrales calculados para ambos conjuntos de términos lingüísticos.

S_1	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
a_0	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0
a_1	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	1
a_2	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2
a_3	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	3
a_4	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	4
a_5	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	5
a_6	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	6
a_7	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	7
a_8	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	8

Tabla 3.2: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales utilizados por el experto 1.

S_2	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
c_0	(1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0.67
c_1	(0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)	2.02
c_2	(0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)	4.02
c_3	(0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)	6.02
c_4	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)	7.34

Tabla 3.3: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales utilizados por el experto 2.

2. **Cálculo de las matrices de similitud.** Las matrices de similitud representan la coincidencia o similitud entre las preferencias de los expertos. Se calcula una matriz de similitud $SM_{ij} = (sm_{ij}^{lk})$ para cada par de expertos (e_i, e_j) ($i < j$),

$$SM_{ij} = \begin{pmatrix} sm_{ij}^{11} & \cdots & sm_{ij}^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sm_{ij}^{n1} & \cdots & sm_{ij}^{nn} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz se obtiene aplicando la función de similitud

definida en (3.2),

$$sm_{ij}^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_j^{lk}).$$

Cada SM_{ij} representa la similaridad entre las preferencias de los expertos i y j comparada a nivel de pares de alternativas.

Ejemplo modelo

La matriz de similaridad que se obtiene a partir de las preferencias de los expertos 1 y 2 es:

$$SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.96 & 0.58 & 0.88 \\ 0.71 & - & 0.75 & 0.58 \\ 0.75 & 0.96 & - & 1 \\ 0.88 & 0.75 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

Todos sus elementos se calculan de forma similar a los dos siguientes:

$$sm_{12}^{12} = s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_2^{12}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_1^{12}) - cv(\tilde{p}_2^{12})}{8} \right| = 1 - \left| \frac{1 - 0.67}{8} \right| = 0.96$$

$$sm_{12}^{41} = s(\tilde{p}_1^{41}, \tilde{p}_2^{41}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_1^{41}) - cv(\tilde{p}_2^{41})}{8} \right| = 1 - \left| \frac{5 - 4.02}{8} \right| = 0.88$$

3. **Cálculo de la matriz de consenso.** Conceptualmente esta matriz representa la similaridad entre todas las preferencias de todos los expertos y contiene la información a partir de la cual se va a calcular el grado de consenso,

$$CM = \begin{pmatrix} cm^{11} & \dots & cm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cm^{n1} & \dots & cm^{nn} \end{pmatrix}$$

Cada elemento de la matriz se obtiene agregando a nivel de pares de alternativas todas las matrices de similaridad,

$$cm^{lk} = \phi(sm_{ij}^{lk}); \quad i, j = 1, \dots, m \wedge \forall l, k = 1, \dots, n \wedge i < j.$$

En esta memoria se propone utilizar como función de agregación $\phi(\cdot)$ la media aritmética ya que consideramos a todos los expertos igualmente importantes, sin embargo podrían utilizarse otros operadores de agregación si los expertos tuviesen distinta importancia en el proceso de decisión.

Ejemplo modelo

Al existir en este ejemplo sólo dos expertos, se calcula una única matriz de similaridad SM_{12} , de ahí que no sea necesario realizar el proceso de agregación y que la matriz de consenso coincida con la matriz de similaridad, $CM = SM_{12}$:

$$CM = SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.96 & 0.58 & 0.88 \\ 0.71 & - & 0.75 & 0.58 \\ 0.75 & 0.96 & - & 1 \\ 0.88 & 0.75 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

4. **Cálculo de los grados de consenso.** Una de las características de este modelo es la posibilidad de conocer con detalle la distribución del consenso dentro del conjunto de preferencias dadas por los expertos. No sólo se mide el grado de consenso general alcanzado entre los expertos sino que también se mide el grado de consenso que existe en una alternativa o en cada par de alternativas concreto. Este conocimiento exhaustivo de la contribución de cada preferencia a alcanzar el consenso permite al modelo identificar de forma muy precisa aquella/s preferencias en las que existe mayor discrepancia y proponer que los cambios les afecten exclusivamente a ellas. De este modo se garantiza que las

preferencias en las que existe suficiente acuerdo no sean modificadas y aquellas en las que no existe, se pueda alcanzar en un futuro siempre y cuando los cambios se realicen en la dirección adecuada. Los detalles para llevar a cabo los cambios en las preferencias se verán más adelante en el apartado dedicado a la generación de recomendaciones, centrándonos ahora en las operaciones del cálculo de los distintos grados de consenso.

El modelo propone calcular el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Nivel 1. *Consenso sobre pares de alternativas.* El grado de consenso a nivel de pares de alternativas, denominado cp^{lk} , mide el nivel de acuerdo alcanzado entre todos los expertos sobre el par de alternativas (x_l, x_k) . Este viene definido por el elemento (l,k) de la matriz de consenso CM,

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \quad \wedge \quad l \neq k.$$

Con esta medida se puede identificar los pares de alternativas en los que existe un mayor o menor grado de consenso.

Ejemplo modelo.

Volviendo sobre nuestro ejemplo y teniendo en cuenta la matriz de consenso CM calculada anteriormente, el grado de consenso que existe entre ambos expertos a nivel de pares de alternativas es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} cp^{12} = 0.96 & cp^{13} = 0.58 & cp^{14} = 0.88 \\ cp^{21} = 0.71 & cp^{23} = 0.75 & cp^{24} = 0.58 \\ cp^{31} = 0.75 & cp^{32} = 0.96 & cp^{34} = 1 \\ cp^{41} = 0.88 & cp^{42} = 0.75 & cp^{43} = 0.88 \end{array}$$

Nivel 2 *Consenso sobre alternativas.* El grado de consenso a nivel de alternativas, denominado ca^l , mide el grado de acuerdo alcanzado entre todos los expertos sobre las preferencias dadas a una alternativa concreta x_l . Fijada una alternativa x_l , se calcula como la media aritmética de todos los cp^{lk} ,

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n - 1}$$

Con esta medida se puede saber el grado de consenso que existe sobre las preferencias dadas a cada alternativa.

Ejemplo modelo.

A partir de la matriz de consenso CM, el consenso a nivel de cada alternativa se calcula como la media aritmética de los valores de cada fila l :

$$ca^1 = \frac{0.96 + 0.58 + 0.88}{3} = 0.81$$

$$ca^2 = \frac{0.71 + 0.75 + 0.58}{3} = 0.68$$

$$ca^3 = \frac{0.75 + 0.96 + 1}{3} = 0.9$$

$$ca^4 = \frac{0.88 + 0.75 + 0.88}{3} = 0.83$$

Nivel 3 *Consenso sobre las relaciones de preferencia.* El grado de consenso a nivel de relación, denominado cr , mide el grado de acuerdo “general” alcanzado entre todas las preferencias de todos los expertos, es decir, el grado de consenso que existe entre todos los expertos del problema de TDG. Se calcula como la media aritmética del consenso a nivel de alternativas ca^l ,

$$cr = \frac{\sum_{l=1}^n ca^l}{n}$$

Este valor es fundamental ya que es utilizado por el modelo de SAC para conocer el nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda y como condición de parada del proceso de consenso tal y como veremos en el apartado 3.3.3.

Ejemplo modelo.

El grado de consenso alcanzado a nivel de relaciones de preferencia cr en este ejemplo es:

$$cr = \frac{0.81 + 0.68 + 0.9 + 0.83}{4} = 0.81$$

Como puede verse, un valor de $cr = 0.8$ puede considerarse como un nivel de consenso bastante alto debido principalmente en este caso a la participación de tan sólo dos expertos. Si el número de expertos fuese mayor y asumiendo que cada uno de ellos aporta un conjunto de preferencias diferente, el grado de consenso cr en las primeras rondas lógicamente sería inferior.

Para cualesquiera de las medidas presentados en este apartado tan sólo añadir que un valor próximo a 1 indica un grado de consenso alto mientras que un valor próximo a 0 indica un grado de consenso bajo.

3.3.3. Control del consenso

En esta fase el modelo de SAC lleva a cabo el control del consenso alcanzado entre los expertos. Este control consiste en comprobar si cr supera un umbral de consenso γ que se considera mínimo para dar por finalizado el proceso de búsqueda del consenso. En caso de no superarlo, el modelo continuaría por la siguiente fase del proceso.

El umbral de consenso ($\gamma/\gamma \in [0, 1]$), como su propio nombre indica, representa el nivel de acuerdo mínimo que los expertos han de alcanzar para que el modelo de SAC considere que existe un grado entendimiento suficiente entre los expertos para poner fin al proceso de consenso y dar paso al proceso de selección de alternativas. El valor de γ debe de ser acordado y fijado previamente al comienzo del proceso

e introducido como un parámetro al modelo. Su valor puede depender de las características y circunstancias del problema de decisión que se esté tratando. Por ejemplo, en problemas en los que las consecuencias de las decisiones que se tomen sean muy importantes, se puede exigir un umbral de consenso muy alto (valores de γ próximos al 0.9). En otros casos, donde lo más importante es obtener una solución rápida, se puede optar por un umbral de consenso próximo a 0.5.

En la Figura 3.4 se muestra gráficamente como se realiza el control teniendo en cuenta las siguientes condiciones :

- Si $cr \geq \gamma$, entonces los expertos han alcanzado el grado de consenso deseado, dándose por finalizado el proceso de consenso y dando lugar al comienzo del proceso de selección de alternativas.
- Si $cr < \gamma$, el proceso de consenso debe continuar.

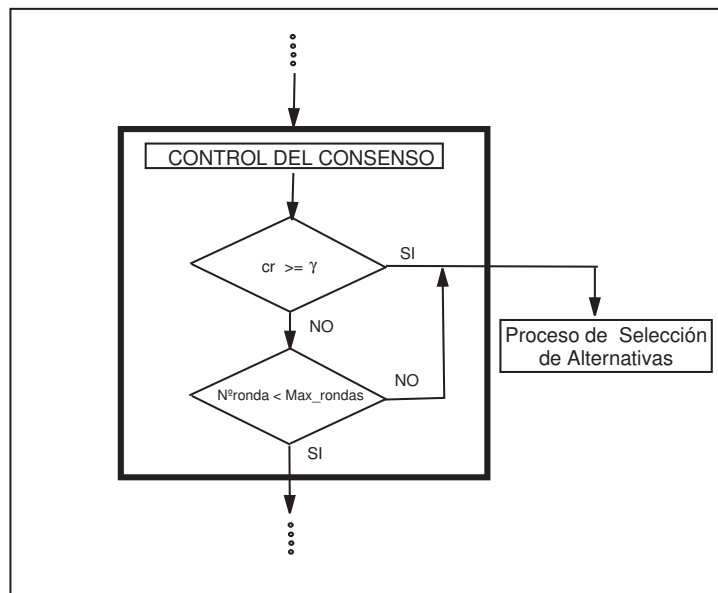


Figura 3.4: Control del consenso

Es necesario destacar que si el valor del umbral de consenso γ es muy alto, es posible que los expertos nunca alcancen un grado de consenso igual o superior a γ o bien que el tiempo empleado para alcanzarlo sea demasiado largo. Para evitar esta situación, se ha definido un parámetro denominado *Max_rondas*¹ que impide que se lleven a cabo un número mayor de rondas de consenso al previsto inicialmente. Si se llega a esta situación, hay varias formas de proceder tal y como se indica en [143], habiéndose optado en esta propuesta por la opción de dar por terminado el proceso de consenso, indicando que no se ha alcanzado el acuerdo deseado y dando paso al proceso de selección de alternativas.

Ejemplo modelo

Considerando un umbral de consenso $\gamma = 0.85$, el resultado de la fase de control sería continuar con el proceso de consenso puesto que:

$$cr = 0.81 < \gamma = 0.85$$

3.3.4. Generación de recomendaciones

Cuando se explicó el funcionamiento de los procesos de búsqueda del consenso en la Sección 2.1, comentamos que una tarea fundamental del moderador era la de aconsejar o recomendar a los expertos hacer cambios en sus preferencias más discrepantes para acercar sus posiciones y así incrementar el nivel de acuerdo. Este es el objetivo que se persigue en esta fase.

En la mayoría de los modelos revisados en el Capítulo 2 los autores comentan la idoneidad de llevar a cabo un proceso de recomendaciones pero ninguno de ellos describe en detalle un mecanismo para realizarlo. Desde el primer momento en el que nos planteamos proponer un modelo de SAC consideramos primordial desa-

¹ Al igual que γ , el valor de *Max_rondas* debe fijarse previamente e introducirse como parámetro al modelo de SAC.

rollar un mecanismo automático capaz de realizar esta labor de asesoramiento a los expertos, con el fin de ayudarles a cambiar sus preferencias en la dirección adecuada y así conseguir reducir el tiempo necesario para alcanzar el consenso deseado.

El resultado de las operaciones que se realizan en esta fase es un conjunto de recomendaciones donde se sugiere la dirección en la que los expertos deben cambiar las preferencias más discrepantes. Para hacer esto, primero es necesario calcular la medidas de proximidad de cada experto y a continuación aplicar un mecanismo de recomendaciones al que hemos denominado sistema de recomendaciones orientado. Cada una de estas operaciones se describen en las siguientes subsecciones.

3.3.4.1 Medidas de proximidad

Las medidas de proximidad evalúan la distancia entre las preferencias individuales de cada uno de los expertos y una preferencia colectiva que representa la preferencia del grupo de expertos. Son utilizadas en nuestro modelo para identificar los expertos cuyas opiniones están más alejadas de la opinión del grupo y de ahí que puedan ser consideradas como las más discrepantes.

Para calcular estas medidas el modelo realiza las siguientes operaciones:

1. Cálculo de la relación de preferencia colectiva.

Para identificar las preferencias más alejadas es necesario calcular previamente una preferencia que represente la posición intermedia en la que se encuentran todos los expertos. La relación de preferencia colectiva \tilde{P}_e se obtiene a partir de las relaciones de preferencia individuales y representa la preferencia media dada por el conjunto de expertos. Se calcula agregando todas las relaciones de preferencia individuales $\{\tilde{P}_{e_1}, \dots, \tilde{P}_{e_m}\}$ a nivel de pares,

$$\tilde{P}_{e_c} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_c^{11} & \cdots & \tilde{p}_c^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_c^{n1} & \cdots & \tilde{p}_c^{nn} \end{pmatrix}$$

Cada elemento de la matriz de preferencia colectiva $\tilde{p}_c^{lk} = (\alpha_{c0}^{lk}, \dots, \alpha_{cg}^{lk})$ es un conjunto difuso definido sobre S_T y calculado agregando todas la preferencias individuales $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$:

$$\alpha_{cj}^{lk} = \psi(\alpha_{1j}^{lk}, \dots, \alpha_{mj}^{lk}), \quad \forall j : 0, \dots, g$$

donde ψ es un “operador de agregación”.

Ejemplo modelo

En el ejemplo propuesto, la matriz de preferencia colectiva \tilde{P}_{e_c} se calcula agregando las matrices de preferencia individuales $\tilde{P}_{e_1}, \tilde{P}_{e_2}$ a nivel de pares de alternativas. Para el caso concreto del par \tilde{p}_c^{12} , éste se obtiene agregando las siguientes preferencias:

$$\begin{aligned} p_1^{12} = a_1 &\mapsto \tilde{p}_1^{12} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ p_2^{12} = c_0 &\mapsto \tilde{p}_2^{12} = (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Utilizando como operador de agregación la media aritmética $\alpha_{cj}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}^{lk}}{m}$, calculamos cada uno de los grados de pertenencia del valor colectivo \tilde{p}_c^{12} ,

$$\begin{aligned} \alpha_{c0}^{12} &= \frac{0 + 1}{2} = 0.5 \\ \alpha_{c1}^{12} &= \frac{1 + 0.67}{2} = 0.83 \\ \alpha_{c2}^{12} &= \frac{0 + 0.33}{2} = 0.17 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\alpha_{c8}^{12} = \frac{0+0}{2} = 0$$

dando como resultado el conjunto difuso colectivo $\tilde{p}_c^{12} = (0.5, 0.83, 0.17, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

El resto de valores de \tilde{P}_{ec} se calculan de la misma forma:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_c^{12} &= (0.5, 0.83, 0.17, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{13} &= (0.5, 0.33, 0.17, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{14} &= (0, 0, 0.17, 0.83, 0.5, 0.33, 0.17, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{21} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.17, 0.33, 0.5) \\ \tilde{p}_c^{23} &= (0, 0, 0, 0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.33, 0.67) \\ \tilde{p}_c^{24} &= (0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0.17, 0.33, 0.5) \\ \tilde{p}_c^{31} &= (0, 0, 0, 0, 0.67, 0.33, 0.5, 0.33, 0.17) \\ \tilde{p}_c^{32} &= (0.5, 0.83, 0.17, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{34} &= (0.17, 0.33, 1, 0.33, 0.17, 0, 0, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{41} &= (0, 0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.83, 0.17, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{42} &= (0.17, 0.33, 0.5, 0.33, 0.67, 0, 0, 0, 0) \\ \tilde{p}_c^{43} &= (0, 0, 0, 0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.83, 0.17)\end{aligned}$$

2. **Cálculo de la matriz de proximidad.** Una vez calculada la matriz de preferencias colectiva \tilde{P}_{ec} , se calcula una matriz de proximidad para cada experto, PM_i ,

$$PM_i = \begin{pmatrix} pm^{11} & \dots & pm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pm^{n1} & \dots & pm^{nn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de esta matriz representan la distancia entre las preferencias individuales del experto y la preferencia colectiva. Para medir esta distancia se

utiliza la función de similaridad de definida en la expresión (3.2),

$$pm_i^{lk} = s(\tilde{p}_i^{lk}, \tilde{p}_c^{lk})$$

Ejemplo modelo

Las matrices de similaridad de ambos expertos son respectivamente:

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & 0.97 & 0.72 & 0.91 \\ 0.81 & - & 0.81 & 0.72 \\ 0.81 & 0.97 & - & 1 \\ 0.91 & 0.81 & 0.91 & - \end{pmatrix} \quad PM_2 = \begin{pmatrix} - & 0.99 & 0.86 & 0.97 \\ 0.90 & - & 0.94 & 0.86 \\ 0.94 & 0.97 & - & 1 \\ 0.97 & 0.94 & 0.97 & - \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de ambas matrices se han calculado tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$pm_1^{12} = s(\tilde{p}_1^{12}, \tilde{p}_c^{12}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_1^{12}) - cv(\tilde{p}_c^{12})}{8} \right| = 1 - \left| \frac{1 - 0.78}{8} \right| = 0.97$$

$$pm_2^{31} = s(\tilde{p}_2^{31}, \tilde{p}_c^{31}) = 1 - \left| \frac{cv(\tilde{p}_2^{31}) - cv(\tilde{p}_c^{31})}{8} \right| = 1 - \left| \frac{6.02 - 5.5}{8} \right| = 0.94$$

donde los valores $cv(\tilde{p}_1^{12}) = 1$ y $cv(\tilde{p}_2^{31}) = 6.02$ ya han sido calculados anteriormente (Tablas 3.2 y 3.3) y los valores de $cv(\tilde{p}_c^{12})$ y $cv(\tilde{p}_c^{31})$ se obtienen como:

$$cv(\tilde{p}_c^{12}) = \frac{0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.83 + 2 \cdot 0.17}{0.5 + 0.87 + 0.17} = \frac{1.17}{1.5} = 0.78$$

$$cv(\tilde{p}_c^{31}) = \frac{4 \cdot 0.67 + 5 \cdot 0.33 + 6 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.33 + 8 \cdot 0.17}{0.67 + 0.33 + 0.5 + 0.33 + 0.17} = \frac{11}{2} = 5.5$$

- Cálculo de las medidas de proximidad.** Utilizando un razonamiento similar al utilizado para justificar el cálculo de las medidas de consenso en diferentes

niveles, el modelo también calcula proximidad a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia.

Nivel 1. *Proximidad de los pares de alternativas.* Dado un experto i , la medida de proximidad del par de alternativas (x_l, x_k) , denominada pp_i^{lk} , mide la distancia que existe en ese par entre la preferencia del experto y la preferencia colectiva, coincidiendo con la posición (l, k) de la matriz de proximidad PM_i , es decir,

$$pp_i^{lk} = pm_i^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \quad \wedge \quad l \neq k.$$

Ejemplo modelo

Como acabamos de decir, la proximidad a nivel de pares de alternativas coinciden con los valores contenidos en las matrices de proximidad PM_1 y PM_2 . Por lo tanto la proximidad de algunos de estos pares sería:

$$pm_1^{12} = 0.97 \quad pm_2^{12} = 0.99$$

$$pm_1^{13} = 0.72 \quad pm_2^{13} = 0.86$$

$$pm_1^{21} = 0.81 \quad pm_2^{21} = 0.9$$

$$pm_1^{41} = 0.91 \quad pm_2^{41} = 0.97$$

Observación. La proximidad del experto 1 y experto 2 a la preferencia colectiva en el par de alternativas (x_1, x_2) es muy alta (0.97 y 0.99 respectivamente), por lo que cabe pensar que las preferencias de ambos expertos han de ser muy parecidas. Siendo esto así, entonces el grado de consenso sobre ese par también debe ser muy alto tal y como se puede comprobar en la matriz

de consenso calculada en la página 127, donde $cp^{12} = 0.96$. El mismo razonamiento puede aplicarse sobre el par de alternativas (x_2, x_4) , donde un grado de consenso relativamente bajo $cp^{24} = 0.58$ ha de implicar que las proximidades de los expertos en ese par sean inferiores ($pp_1^{24} = 0.72, pp_2^{24} = 0.86$).

Nivel 2. Proximidad de las alternativas. Dado un experto i , la medida de proximidad de la alternativa l , denominada pa^l , mide la distancia entre las preferencias del experto y la preferencia colectiva evaluada a nivel de esa alternativa. Fijada una alternativa l , pa_i^l se calcula como la media aritmética de todos los pp_i^{lk} ,

$$pa_i^l = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^n pp_i^{lk}}{n-1}$$

Ejemplo modelo

A partir de las matrices de proximidad de cada experto, la proximidad de cada alternativa se calcula como la media aritmética de los valores de cada fila l :

$$pa_1^1 = \frac{0.97+0.72+0.91}{3} = 0.87 \quad pa_2^1 = \frac{0.99+0.86+0.97}{3} = 0.94$$

$$pa_1^2 = \frac{0.81+0.81+0.72}{3} = 0.78 \quad pa_2^2 = \frac{0.9+0.94+0.86}{3} = 0.9$$

$$pa_1^3 = \frac{0.81+0.97+1}{3} = 0.93 \quad pa_2^3 = \frac{0.94+0.99+1}{3} = 0.97$$

$$pa_1^4 = \frac{0.91+0.81+0.91}{3} = 0.88 \quad pa_2^4 = \frac{0.97+0.94+0.97}{3} = 0.96$$

Nivel 3. Proximidad de la relación. Dado un experto i , la medida de proximidad de la relación de preferencia P_{e_i} , denominada pr_i , mide la distancia global entre el conjunto de preferencias del experto y la preferencia colectiva. Se calcula como la media aritmética de las proximidades a nivel de alternativas pa^l ,

$$pr_i = \frac{\sum_{l=1}^n pa_i^l}{n}$$

Ejemplo modelo.

La proximidad a nivel de relaciones de preferencia de cada experto es:

$$pr_1 = \frac{0.87 + 0.78 + 0.93, 0.88}{4} = 0.86$$

$$pr_2 = \frac{0.94 + 0.9 + 0.97, 0.96}{4} = 0.94$$

Respecto a los valores del conjunto de medidas de proximidad, valores cercanos a 1 indican que las preferencias del experto están muy próximas a las preferencias del grupo de expertos y por lo tanto podemos asumir que las preferencias del experto contribuyen positivamente a alcanzar el consenso. En caso contrario, valores cercanos a 0 indican que las preferencias del experto están muy alejadas de las preferencias del grupo y por lo tanto penalizan la consecución del consenso.

3.3.4.2 Sistema de Recomendaciones Orientado

Un proceso de búsqueda del consenso puede verse como un proceso de acercamiento de unas posturas u opiniones iniciales que inexorablemente va a llevar aparejado una serie de cambios en las preferencias de los expertos. Un problema que se les puede plantear a los expertos a la hora de cambiar sus preferencias es

la elección de la dirección más adecuada en la que han de hacer los cambios para conseguir acercar sus opiniones. Hemos de tener en cuenta que si los cambios no se realizan en la dirección correcta se producirá un alejamiento de las preferencias y por lo tanto una disminución en el grado de consenso. En situaciones de decisión del mundo real este problema queda resuelto con la intervención del moderador que al conocer con detalle las opiniones de los expertos, recomienda la dirección de los cambios más idónea para aproximar las preferencias.

En nuestro modelo esta función la realiza un sistema de recomendaciones orientado consiguiendo de esta forma eliminar la figura del moderador. Este sistema tiene asignados dos objetivos:

- 1) Identificar de una forma precisa los expertos, alternativas y pares de alternativas que no contribuyen favorablemente a la consecución del consenso.
- 2) Recomendar la dirección en la que los expertos deben cambiar sus preferencias para aproximar sus opiniones y por lo tanto incrementar el grado de acuerdo en las siguientes rondas de consenso.

Para conseguir ambos objetivos se han definido dos conjuntos de reglas cuya descripción y funcionamiento se presentan a continuación:

- A) **Reglas de identificación (IR).** Las reglas identificación seleccionan los pares de alternativas que los expertos han de cambiar. Con estas reglas se consigue que el modelo propuesto recomiende cambiar sólo aquellas preferencias en las que no existe suficiente consenso dejando de lado aquellas otras en las que el consenso es satisfactorio. De este modo se asegura que el nivel de acuerdo vaya aumentando a lo largo del proceso de consenso siempre y cuando los cambios se produzcan en la dirección apropiada.

Hemos definido tres reglas que se aplican secuencialmente que identifican en primer lugar a los expertos que han de cambiar sus preferencias, a continuación las alternativas en las que no hay consenso y finalmente los pares más alejados en dichas alternativas y por lo tanto las que deben modificarse.

IR.1) Regla para la identificación de expertos.

Esta regla identifica los expertos que han de cambiar alguna de sus preferencias. Para llevar a cabo esta identificación es necesario dar respuesta a las siguientes dos cuestiones:

i) ¿Qué expertos deben cambiar sus preferencias?

Parece lógico pensar que los expertos más alejados han de ser los que cambien sus preferencias, por lo tanto aquellos cuya proximidad a nivel de relación pr_i sea menor.

ii) ¿Cuántos expertos han de cambiar sus preferencias?

Para resolver esta cuestión se ha definido un parámetro n^{lex} que va a contener el número o tanto por ciento de expertos que deben cambiar sus preferencias. Si se quiere que la mayoría de los expertos cambien sus preferencias, entonces se elegirá un valor n^{lex} alto, por ejemplo $n^{lex}=75\%$. En caso contrario, si $n^{lex}=25\%$ entonces implicará que sólo los expertos más alejados cambiarán sus preferencias.

El valor n^{lex} debe ser fijado e introducido al modelo antes de comenzar el proceso de consenso. Se utilizará para definir el conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias, denominado *EXPCH*,

$$EXPCH = \{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n^{lex})}\},$$

donde σ es una permutación sobre el conjunto de proximidades de las relaciones de preferencia definida como $pr_{\sigma(j)} \leq pr_{\sigma(i)} \forall j \leq i$.

Formalmente esta regla se expresaría de la siguiente forma:

IR.1 $\forall e_i \in (E \cap EXPCH)$, e_i deberá cambiar alguna de sus preferencias.

IR.2) Regla para la identificación de alternativas.

Esta regla identifica las alternativas en las que no existe un grado de consenso suficiente y por lo tanto las que contienen las preferencias que los expertos $e_i \in EXPCH$ deberían cambiar. El modelo utiliza el grado de consenso a nivel de alternativas $\{ca^l, l = 1, \dots, n\}$ para definir el conjunto de alternativas que deben cambiar:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < \gamma\}$$

donde γ es el umbral de consenso definido anteriormente.

Una descripción más formal de esta regla sería la siguiente:

IR.2. $\forall x_l \in (X \cap ALT)$ y $\forall e_i \in EXPCH$, e_i debería considerar cambiar alguna de sus valoraciones asociadas al conjunto de pares de alternativas $\{(x_l, x_k), k = 1, \dots, n\}$, asociadas a la alternativa l .

IR.3) Regla para la identificación de pares de alternativas.

Una vez identificados los expertos $e_i \in EXPCH$ y las alternativas $x_l \in ALT$, tan sólo resta identificar los pares de alternativas concretos (x_l, x_k) que deben ser cambiados. Para hacer esto el modelo de SAC utiliza las medidas de proximidad a nivel de pares de alternativas, definiendo el conjunto de pares de alternativas que cada experto i debe cambiar como:

$$PALT_i = \{(x_l, x_k) \mid x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH \wedge pp_i^{lk} < \beta\}.$$

El parámetro β actúa como un umbral de proximidad para seleccionar el conjunto de pares que han de cambiar. Cuanto mayor sea su valor, mayor será el número de cambios que se recomendará realizar a los expertos.

Formalmente esta regla se puede expresar así:

IR.3. $\forall (x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH)$, si $(x_l, x_k) \in PALT_i$ entonces e_i debería cambiar la preferencia p_i^{lk} .

Ejemplo modelo

Aplicaremos estas tres reglas para identificar el experto, alternativas y pares de alternativas en nuestro ejemplo que deberán cambiar. Previamente al comienzo del proceso de consenso deberemos decidir la proporción de expertos a cambiar. Tanto para este ejemplo como para el presentado en la siguiente sección se ha considerado apropiado que la mitad de los expertos deberían cambiar sus preferencias, por lo tanto $n_{ex} = (n^{\circ} \text{ de expertos})/2$.

IR.1) Expertos. En este caso con tan sólo dos expertos, sólo uno de ellos deberá cambiar sus preferencias, es decir $n_{ex}=1$. Teniendo en cuenta las proximidades de los expertos ordenadas de mayor a menor, $pr_2 = 0.94$ y $pr_1 = 0.85$, el conjunto de expertos que deben cambiar sus preferencias es:

$$EXPCH = \{e_1\}$$

IR.2) Alternativas. Supuesto un umbral de consenso $\gamma = 0.85$, el conjunto de alternativas en el que el grado de consenso no es suficiente es:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.85\} = \{x_1, x_2, x_4\}.$$

Aplicando la regla IR.2 el modelo indicará que e_1 deberá cambiar alguna de las preferencias dadas para tales alternativas.

IR.3) Pares de alternativas. Supuesto un umbral de proximidad $\beta = 0.75$, el sistema obtiene el conjunto de pares de alternativas que deben cambiar:

$$PALT_i = \{(x_l, x_k) \mid x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH \wedge pp_i^{lk} < 0.75\}$$

$$PALT_1 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_4)\}$$

Finalmente aplicando la regla IR.3 el sistema recomendará que el experto 1 cambie las valoraciones dadas sobre los pares de alternativas $(x_1, x_3), (x_2, x_4)$.

B) **Reglas de dirección (DR).** Identificado los pares de alternativas $(x_l, x_k) \in PALT_i$ que cada experto i debe modificar, el sistema recomienda la dirección en la que han de hacerse tales cambios para mejorar el acuerdo. El resultado de aplicar las reglas de dirección será recomendar que se incremente o decremente las valoraciones de las preferencias a cambiar. Por ejemplo, si un experto i ha de cambiar la preferencia $p_i^{lk} = s_j$, entonces el sistema le recomendará incrementarla, $p_i^{lk} = s_{j+1}$, o decrementarla, $p_i^{lk} = s_{j-1}$.

Para sugerir la dirección de los cambios, el modelo calcula dos pares de parámetros a los que hemos llamado *parámetros de dirección*. Un par para el conjunto difuso \tilde{p}_i^{lk} que representa la preferencia del experto a cambiar y otro para el conjunto difuso de la preferencia colectiva \tilde{p}_c^{lk} . Estos pares de parámetros de dirección contienen la posición (*pos*) y el grado de pertenencia (*val*) de la primera ($ml \in S_T$) y segunda ($sl \in S_T$) etiqueta más significativa de los conjuntos difusos \tilde{p}_i^{lk} y \tilde{p}_c^{lk} entendiéndose por más significativas aquellas con mayor grado de pertenencia. Por lo tanto para cada par de alternativas $(x_l, x_k) \in PALT_i$ se obtiene el siguiente conjunto de parámetros:

$$\tilde{p}_i^{lk} \rightarrow (\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{val}))$$

$$\tilde{p}_c^{lk} \rightarrow (\tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val})\tilde{p}_c^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{val}))$$

Las reglas de dirección comparan los valores de los parámetros de dirección entre las preferencias individuales \tilde{p}_i^{lk} y la colectiva \tilde{p}_c^{lk} , obteniendo la dirección de los cambios conforme a las siguientes condiciones:

DR.1. Si $\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}) > \tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos})$ entonces el experto i debería decrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.2. Si $\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}) < \tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos})$ entonces el experto i debería incrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.3. Si $\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}) = \tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos})$ entonces las reglas DR.1 y DR.2 se aplican comparando los valores de los grados de pertenencia de la etiqueta principal, $\tilde{p}_i^{lk}(ml_{val})$ y $\tilde{p}_c^{lk}(ml_{val})$.

DR.4. Si $(\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}) = \tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}) \wedge \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}) = \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val}))$, entonces las reglas DR.1, DR.2, y DR.3 se aplican comparando la posición y el valor del grado de pertenencia de la segunda etiqueta más significativa sl .

Respecto a la aplicación de las reglas de dirección es necesario tener en cuenta un par de excepciones:

Excp 1): El decremento o incremento de las valoraciones asociadas a las preferencias se llevará a cabo siempre que sea posible, es decir, siempre y cuando el valor actual de la preferencia no se corresponda ni con la primera ni con la última etiqueta del conjunto de términos lingüísticos utilizado por el experto para dar sus preferencias. Si se diese alguno de estos casos el experto no modificará su valoración actual.

Excp 2): En los conjuntos difusos \tilde{p}_i^{lk} y \tilde{p}_c^{lk} puede darse la circunstancia de que dos o más etiquetas puedan ser consideradas como ml .² Si se diese esta situación, el sistema optará por descartarlas y seguirá buscando la etiqueta ml entre las restantes, pudiendo incluso darse el caso de que quedara sin asignarse.

Ejemplo modelo

Identificadas las preferencias que el experto 1 ha de cambiar, $PALT_1 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_4)\}$, el sistema de recomendaciones procede de la siguiente forma:

1. Calcula los parámetros de dirección de cada par $(x_l, x_k) \in PALT_1$ de la preferencia individual y colectiva . Dadas las preferencias a cambiar y sus respectivos conjuntos difusos individuales y colectivos,

$$p_1^{13} = a_4 \mapsto \tilde{p}_1^{13} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \quad \tilde{p}_c^{13} = (0.5, 0.33, 0.17, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0)$$

$$p_1^{24} = a_4 \mapsto \tilde{p}_1^{24} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \quad \tilde{p}_c^{24} = (0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0.17, 0.33, 0.5)$$

los parámetros de dirección de estas preferencias se muestran en la Tabla 3.4:

	$(\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{val}))$	$(\tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{val}))$
\tilde{p}_1^{13}	(4, 1, *)	(1, 0.33, 2, 0.17)(**)
\tilde{p}_1^{24}	(4, 1, *)	(7, 0.33, 6, 0.17)(**)

Tabla 3.4: Parámetros de dirección

(*) El * lo utilizaremos para indicar que no ha sido posible asignar valores a la etiqueta secundaria sl conforme a la Excp 2).

(**) En los conjuntos difusos \tilde{p}_c^{13} y \tilde{p}_c^{24} también se produce la Excp 2) al existir dos etiquetas que pueden actuar como primarias ml , procediendo a descartarlas y eligiendo la siguiente etiqueta más significativa.

² También puede darse el caso en las etiquetas secundarias sl

2. Aplica las reglas de dirección:

- Como $\tilde{p}_1^{13}(ml_{pos}) = 4 > \tilde{p}_c^{13}(ml_{pos}) = 1$ entonces según la regla DR1 el experto 1 debería decrementar la valoración dada a esta preferencia, es decir:

$$p_1^{13} = a_4 \rightarrow a_3$$

- Como $\tilde{p}_1^{24}(ml_{pos}) = 4 < \tilde{p}_c^{24}(ml_{pos}) = 7$, entonces según la regla DR2 el experto 1 debería incrementar la valoración dada a esta preferencia, es decir:

$$p_1^{24} = a_4 \rightarrow a_5$$

3.4. Ejemplo de Funcionamiento del Modelo de SAC

A lo largo de este capítulo hemos utilizado un ejemplo sencillo para explicar el funcionamiento del modelo y mostrar como se obtienen las medidas de consenso y proximidad. En esta sección presentaremos un ejemplo más completo de su funcionamiento en un problema de toma de decisión real.

Supongamos que una cadena de supermercados a nivel nacional se ha planteado la compra y distribución en exclusividad de una marca de vinos de mesa. Consultados varios productores, se han decantado por comprar una marca concreta entre cuatro posibles:

- x_1 , Marqués de Cáceres, Denominación de Origen Rioja.
- x_2 , Los Molinos, Denominación de Origen Valdepeñas.
- x_3 , Viña Mayor, Denominación de Origen Ribera del Duero.
- x_4 , René Barbier, Denominación de Origen Penedés.

Para ayudarles a tomar la decisión, los directivos de la empresa han decidido contratar un panel de 8 expertos-catadores $E = \{e_1, \dots, e_8\}$ que darán sus preferencias sobre las distintas marcas de vino. Los expertos han acordado alcanzar un grado de consenso mínimo entre sus preferencias antes de llevar a cabo el proceso de selección en el que se elegirá el mejor vino.

Para expresar sus preferencias, los expertos van a utilizar valoraciones lingüísticas en lugar de valoraciones numéricas, utilizando tres conjuntos de términos lingüísticos con diferente cardinalidad:

- Los expertos e_3 y e_7 proporcionan sus preferencias utilizando un conjunto con 9 términos lingüísticos, $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$.
- Los expertos e_4, e_5 y e_8 proporcionan sus preferencias utilizando un conjunto con 7 términos lingüísticos, $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$.
- Los expertos e_1, e_2 y e_6 proporcionan sus preferencias utilizando un conjunto con 5 términos lingüísticos, $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$.

Cada conjunto de términos tiene su propia semántica que se representa mediante números difusos triangulares (Tabla 3.5):

ConjuntoA	ConjuntoB	ConjuntoC
$a_0 = (0, 0, 0.13)$	$b_0 = (0, 0, 0.17)$	$c_0 = (0, 0, 0.25)$
$a_1 = (0, 0.13, 0.25)$	$b_1 = (0, 0.17, 0.33)$	$c_1 = (0, 0.25, 0.5)$
$a_2 = (0.12, 0.25, 0.38)$	$b_2 = (0.17, 0.33, 0.5)$	$c_2 = (0.25, 0.5, 0.75)$
$a_3 = (0.25, 0.38, 0.5)$	$b_3 = (0.33, 0.5, 0.67)$	$c_3 = (0.5, 0.75, 1)$
$a_4 = (0.38, 0.5, 0.63)$	$b_4 = (0.5, 0.67, 0.83)$	$c_4 = (0.75, 1, 1)$
$a_5 = (0.5, 0.63, 0.75)$	$b_5 = (0.67, 0.83, 1)$	
$a_6 = (0.63, 0.75, 0.88)$	$b_6 = (0.83, 1, 1)$	
$a_7 = (0.75, 0.88, 1)$		
$a_8 = (0.88, 1, 1)$		

Tabla 3.5: Semántica de los conjuntos de etiquetas

Consultados los expertos, estos aportan sus preferencias utilizando las siguientes relaciones de preferencia lingüísticas:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & c_0 & c_0 & c_2 \\ c_4 & - & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_0 & - & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_3 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_2} = \begin{pmatrix} - & c_2 & c_0 & c_4 \\ c_1 & - & c_1 & c_1 \\ c_3 & c_3 & - & c_1 \\ c_0 & c_4 & c_3 & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_{e_3} &= \begin{pmatrix} - & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_5 & - & a_8 & a_4 \\ a_4 & a_1 & - & a_2 \\ a_5 & a_5 & a_7 & - \end{pmatrix} & P_{e_4} &= \begin{pmatrix} - & b_0 & b_4 & b_5 \\ b_6 & - & b_1 & b_6 \\ b_3 & b_4 & - & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_4 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_5} &= \begin{pmatrix} - & b_4 & b_1 & b_6 \\ b_2 & - & b_3 & b_2 \\ b_4 & b_3 & - & b_2 \\ b_0 & b_5 & b_3 & - \end{pmatrix} & P_{e_6} &= \begin{pmatrix} - & c_2 & c_3 & c_1 \\ c_2 & - & c_0 & c_1 \\ c_0 & c_4 & - & c_4 \\ c_4 & c_4 & c_0 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_7} &= \begin{pmatrix} - & a_0 & a_3 & a_7 \\ a_8 & - & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_8 & - & a_5 \\ a_1 & a_4 & a_3 & - \end{pmatrix} & P_{e_8} &= \begin{pmatrix} - & b_6 & b_1 & b_3 \\ b_0 & - & b_0 & b_5 \\ b_6 & b_6 & - & b_5 \\ b_4 & b_1 & b_0 & - \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A partir del conjunto de preferencias de los expertos, utilizaremos el modelo de SAC propuesto en este capítulo para automatizar el proceso de búsqueda del consenso e intentar alcanzar un nivel de acuerdo satisfactorio antes de aplicar el proceso de selección de alternativas.

Previamente a la puesta en marcha del proceso de consenso, es necesario fijar los valores del conjunto de parámetros de entrada al modelo:

- El umbral de consenso mínimo deseado (γ) para dar por finalizado el proceso de consenso. Para este ejemplo se ha fijado un valor $\gamma = 0.75$.
- El umbral de proximidad (β) utilizado para seleccionar las preferencias que deben ser cambiadas. Se ha fijado un valor $\beta = 0.8$.
- El número de expertos que han de cambiar sus preferencias (n^{oex}). Hemos considerado que la mitad de los expertos deben cambiar sus preferencias, por

lo tanto $n^{\circ}ex=4$.

- El número máximo de rondas de consenso (Max_rondas) que llevará a cabo el modelo si previamente no se ha alcanzado el consenso deseado. Se ha fijado un valor $Max_rondas = 10$.

El valor de estos parámetros puede ser acordado previamente por la directiva o por el conjunto de expertos según las características del problema que se esté tratando.

3.4.1. Primera ronda de consenso

Comienza la primera ronda de consenso. El modelo de SAC tomará como información de entrada las preferencias iniciales dadas por los expertos y aplicará secuencialmente las distintas fases descritas en la Sección 3.3

1. Unificación de la información

En esta fase se lleva a cabo el proceso de unificación de las preferencias de los expertos. Para hacerlo el modelo selecciona el conjunto de términos lingüísticos básicos S_T más apropiado conforme a las condiciones descritas en el apartado 3.3.1. En este caso el conjunto de términos con mayor cardinalidad es A , siendo este el conjunto utilizado para unificar el resto de conjuntos, es decir, $S_T = A$. A continuación se unifican las preferencias aplicando las funciones de transformación $\{\tau_{AS_T}, \tau_{BS_T}, \tau_{CS_T}\}$, obteniendo para cada término lingüístico un conjunto difuso sobre S_T tal y como se muestra en la Tabla 3.6.

2. Cálculo de los grados de consenso

En esta fase el modelo de SAC calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia llevando a cabo las siguientes

$\tau_{AS_T} :$	$\tau_{BS_T} :$	$\tau_{CS_T} :$
$a_0 \mapsto (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_0 \mapsto (1, 0.57, 0.14, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_0 \mapsto (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$a_1 \mapsto (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_1 \mapsto (0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_1 \mapsto (0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)$
$a_2 \mapsto (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_2 \mapsto (0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43, 0, 0, 0, 0)$	$c_2 \mapsto (0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)$
$a_3 \mapsto (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_3 \mapsto (0, 0, 0.14, 0.57, 1, 0.57, 0.14, 0, 0)$	$c_3 \mapsto (0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)$
$a_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$b_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0)$	$c_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)$
$a_5 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$b_5 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43)$	
$a_6 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$	$b_6 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.14, 0.57, 1)$	
$a_7 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$		
$a_8 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$		

Tabla 3.6: Conjuntos difusos obtenidos tras el proceso de unificación

operaciones:

1. *Cálculo de los valores centrales:* Se calcula el valor central de todas las etiquetas lingüísticas utilizadas por los expertos para expresar sus preferencias (Tablas 3.7, 3.8, 3.9):

A	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
a_0	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0
a_1	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	1
a_2	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2
a_3	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	3
a_4	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	4
a_5	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	5
a_6	(, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	6
a_7	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	7
a_8	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	8

Tabla 3.7: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos A.

2. *Matrices de similitud:*

El modelo propuesto calcula una matriz de similitud para cada par de expertos. Los valores de estas matrices representan la similitud entre las preferencias de cada experto respecto al resto de expertos. Se obtienen comparando todas las preferencias de todos los expertos a nivel de pares de alternativas:

B	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
b_0	(1, 0.57, 0.14, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0.5
b_1	(0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0, 0, 0, 0, 0)	1.38
b_2	(0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43, 0, 0, 0, 0)	2.63
b_3	(0, 0, 0.14, 0.57, 1, 0.57, 0.14, 0, 0)	4
b_4	(0, 0, 0, 0, 0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0)	5.38
b_5	(0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43)	6.63
b_6	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.14, 0.57, 1)	7.5

Tabla 3.8: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos B.

C	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
c_0	(1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0.67
c_1	(0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)	2.02
c_2	(0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)	4.02
c_3	(0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)	6.02
c_4	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)	7.34

Tabla 3.9: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos C.

$$SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.58 & 1 & 0.58 \\ 0.33 & - & 0.5 & 0.33 \\ 1 & 0.33 & - & 1 \\ 0.58 & 0.33 & 1 & - \end{pmatrix} \quad SM_{13} = \begin{pmatrix} - & 0.96 & 0.58 & 0.88 \\ 0.71 & - & 0.75 & 0.58 \\ 0.75 & 0.96 & - & 1 \\ 0.88 & 0.63 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{14} = \begin{pmatrix} - & 0.98 & 0.41 & 0.67 \\ 0.98 & - & 0.42 & 0.98 \\ 0.75 & 0.41 & - & 0.92 \\ 0.56 & 0.92 & 0.92 & - \end{pmatrix} \quad SM_{15} = \begin{pmatrix} - & 0.41 & 0.91 & 0.56 \\ 0.41 & - & 0.75 & 0.41 \\ 0.92 & 0.58 & - & 0.92 \\ 0.56 & 0.42 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{16} = \begin{pmatrix} - & 0.58 & 0.33 & 0.75 \\ 0.58 & - & 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & 0.17 & - & 0.33 \\ 0.58 & 0.33 & 0.33 & - \end{pmatrix} \quad SM_{17} = \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.71 & 0.63 \\ 0.92 & - & 0.25 & 0.58 \\ 0.75 & 0.08 & - & 0.63 \\ 0.63 & 0.75 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{18} = \begin{pmatrix} - & 0.15 & 0.91 & 1 \\ 0.15 & - & 0.31 & 0.91 \\ 0.81 & 0.15 & - & 0.42 \\ 0.83 & 0.92 & 0.31 & - \end{pmatrix} \quad SM_{23} = \begin{pmatrix} - & 0.63 & 0.58 & 0.46 \\ 0.63 & - & 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.38 & - & 1 \\ 0.46 & 0.71 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{24} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.41 & 0.91 \\ 0.31 & - & 0.92 & 0.31 \\ 0.75 & 0.92 & - & 0.92 \\ 0.98 & 0.26 & 0.92 & - \end{pmatrix} \quad SM_{25} = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.91 & 0.98 \\ 0.92 & - & 0.75 & 0.92 \\ 0.92 & 0.75 & - & 0.92 \\ 0.98 & 0.91 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{26} = \begin{pmatrix} - & 1 & 0.33 & 0.33 \\ 0.75 & - & 0.83 & 1 \\ 0.33 & 0.83 & - & 0.33 \\ 0.17 & 1 & 0.33 & - \end{pmatrix} \quad SM_{27} = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.71 & 0.96 \\ 0.25 & - & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.63 \\ 0.96 & 0.58 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{28} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.91 & 0.58 \\ 0.81 & - & 0.81 & 0.42 \\ 0.81 & 0.81 & - & 0.42 \\ 0.41 & 0.26 & 0.31 & - \end{pmatrix} \quad SM_{34} = \begin{pmatrix} - & 0.94 & 0.83 & 0.55 \\ 0.69 & - & 0.17 & 0.56 \\ 1 & 0.45 & - & 0.92 \\ 0.44 & 0.55 & 0.80 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{35} = \begin{pmatrix} - & 0.45 & 0.67 & 0.44 \\ 0.7 & - & 0.5 & 0.83 \\ 0.83 & 0.63 & - & 0.92 \\ 0.44 & 0.8 & 0.63 & - \end{pmatrix} \quad SM_{36} = \begin{pmatrix} - & 0.63 & 0.75 & 0.88 \\ 0.88 & - & 0.08 & 0.75 \\ 0.58 & 0.21 & - & 0.33 \\ 0.71 & 0.71 & 0.21 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{37} = \begin{pmatrix} - & 0.88 & 0.88 & 0.5 \\ 0.63 & - & 0 & 1 \\ 1 & 0.13 & - & 0.63 \\ 0.5 & 0.88 & 0.5 & - \end{pmatrix} \quad SM_{38} = \begin{pmatrix} - & 0.19 & 0.67 & 0.88 \\ 0.44 & - & 0.06 & 0.67 \\ 0.56 & 0.19 & - & 0.42 \\ 0.95 & 0.55 & 0.19 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{45} = \begin{pmatrix} - & 0.39 & 0.5 & 0.89 \\ 0.39 & - & 0.67 & 0.39 \\ 0.83 & 0.83 & - & 1 \\ 1 & 0.34 & 0.83 & - \end{pmatrix} \quad SM_{46} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.92 & 0.42 \\ 0.56 & - & 0.91 & 0.31 \\ 0.58 & 0.76 & - & 0.41 \\ 0.15 & 0.26 & 0.41 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{47} = \begin{pmatrix} - & 0.94 & 0.7 & 0.95 \\ 0.94 & - & 0.83 & 0.56 \\ 1 & 0.67 & - & 0.7 \\ 0.94 & 0.67 & 0.7 & - \end{pmatrix} \quad SM_{48} = \begin{pmatrix} - & 0.13 & 0.5 & 0.67 \\ 0.13 & - & 0.89 & 0.89 \\ 0.56 & 0.73 & - & 0.5 \\ 0.39 & 1 & 0.39 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{56} = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.42 & 0.31 \\ 0.83 & - & 0.58 & 0.92 \\ 0.41 & 0.58 & - & 0.41 \\ 0.15 & 0.91 & 0.58 & - \end{pmatrix} \quad SM_{57} = \begin{pmatrix} - & 0.33 & 0.8 & 0.94 \\ 0.33 & - & 0.5 & 0.83 \\ 0.83 & 0.5 & - & 0.7 \\ 0.94 & 0.67 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{58} = \begin{pmatrix} - & 0.73 & 1 & 0.56 \\ 0.73 & - & 0.56 & 0.5 \\ 0.73 & 0.56 & - & 0.5 \\ 0.39 & 0.34 & 0.56 & - \end{pmatrix} \quad SM_{67} = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.63 & 0.38 \\ 0.5 & - & 0.92 & 0.75 \\ 0.58 & 0.92 & - & 0.71 \\ 0.21 & 0.58 & 0.71 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{68} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.42 & 0.75 \\ 0.56 & - & 0.98 & 0.42 \\ 0.15 & 0.98 & - & 0.91 \\ 0.76 & 0.26 & 0.98 & - \end{pmatrix} \quad SM_{78} = \begin{pmatrix} - & 0.06 & 0.8 & 0.63 \\ 0.06 & - & 0.94 & 0.67 \\ 0.56 & 0.94 & - & 0.8 \\ 0.45 & 0.67 & 0.69 & - \end{pmatrix}$$

3. *Matriz de consenso.*

La matriz de consenso se obtiene agregando a nivel de pares el conjunto de matrices de similaridad calculadas previamente. Como operador de agregación, se utiliza la media aritmética. Esta matriz representa el consenso existente entre los expertos en cada ronda y se utiliza para obtener las diferentes medidas de consenso.

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.6 & 0.69 & 0.68 \\ 0.58 & - & 0.58 & 0.66 \\ 0.71 & 0.58 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.61 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso.* Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .* El grado de consenso en cada par de alternativas (x_l, x_k) coincide con las posiciones (l, k) de la matriz de consenso CM .

$$\begin{aligned} cp^{12} &= 0.6 & cp^{13} &= 0.69 & cp^{14} &= 0.68 \\ cp^{21} &= 0.58 & cp^{23} &= 0.58 & cp^{24} &= 0.66 \\ cp^{31} &= 0.71 & cp^{32} &= 0.58 & cp^{34} &= 0.69 \\ cp^{41} &= 0.61 & cp^{42} &= 0.61 & cp^{43} &= 0.63 \end{aligned}$$

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El consenso a nivel de alternativas se obtiene como la media aritmética de todos los pares pertenecientes a cada alternativa:

$$ca^1 = 0.65 \quad ca^2 = 0.6 \quad ca^3 = 0.66 \quad ca^4 = 0.62$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones, cr .* Este valor mide el grado de consenso actual alcanzado por los expertos y se obtiene como la media aritmética del consenso evaluado a nivel de alternativas. En esta primera ronda el grado de consenso general es:

$$cr = 0.634$$

3. Control del consenso

En esta fase el modelo de SAC lleva a cabo el control del grado de consenso alcanzado, comparando el grado de consenso a nivel de relaciones $cr = 0.634$ con el umbral de consenso $\gamma = 0.75$.

Como $cr < \gamma$, esto significa que no se ha alcanzado el acuerdo suficiente para dar por terminado el proceso de consenso, debiendo continuar el modelo por la siguiente fase.

4. Generación de recomendaciones

El sistema genera un conjunto de recomendaciones donde sugiere a los expertos las preferencias que han de cambiar para conseguir aproximar sus opiniones y por lo tanto incrementar el grado de consenso en la siguiente ronda. Para hacer esto lleva a cabo dos tareas:

4.1 Cálculo de las medidas de proximidad.

1. *Cálculo de la relación de preferencias colectiva.* Para poder calcular las medidas de proximidad previamente es necesario obtener una relación de preferencias colectiva \tilde{P}_{e_c} que represente las preferencias del grupo de expertos. Esta relación se obtiene agregando las relaciones de preferencia individuales, utilizando como operador de agregación la media aritmética aplicada a nivel de pares de alternativas. Los valores de \tilde{P}_{e_c} en esta primera ronda son:

$$\tilde{p}_c^{12} = (0.38, 0.28, 0.14, 0.17, 0.3, 0.27, 0.19, 0.11, 0.13)$$

$$\tilde{p}_c^{13} = (0.36, 0.38, 0.26, 0.2, 0.22, 0.19, 0.21, 0.12, 0.04)$$

$$\tilde{p}_c^{14} = (0.04, 0.08, 0.18, 0.36, 0.29, 0.19, 0.21, 0.39, 0.3)$$

$$\tilde{p}_c^{21} = (0.17, 0.19, 0.27, 0.27, 0.22, 0.21, 0.1, 0.15, 0.38)$$

$$\tilde{p}_c^{23} = (0.47, 0.35, 0.29, 0.19, 0.21, 0.15, 0.14, 0.08, 0.17)$$

$$\tilde{p}_c^{24} = (0.08, 0.2, 0.34, 0.27, 0.39, 0.03, 0.15, 0.26, 0.3)$$

$$\tilde{p}_c^{31} = (0.13, 0.08, 0.06, 0.07, 0.51, 0.35, 0.38, 0.27, 0.21)$$

$$\tilde{p}_c^{32} = (0.13, 0.21, 0.06, 0.07, 0.22, 0.26, 0.29, 0.27, 0.42)$$

$$\tilde{p}_c^{34} = (0.08, 0.24, 0.55, 0.38, 0.19, 0.16, 0.13, 0.19, 0.18)$$

$$\tilde{p}_c^{41} = (0.38, 0.35, 0.12, 0.08, 0.18, 0.32, 0.17, 0.12, 0.13)$$

$$\tilde{p}_c^{42} = (0.15, 0.3, 0.3, 0.15, 0.17, 0.16, 0.17, 0.27, 0.3)$$

$$\tilde{p}_c^{43} = (0.25, 0.15, 0.07, 0.2, 0.26, 0.35, 0.36, 0.33, 0.08)$$

2. *Matrices de proximidad, PM_i .* Se calcula una matriz de proximidad para cada experto:

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & 0.67 & 0.72 & 0.89 \\ 0.6 & - & 0.61 & 0.61 \\ 0.86 & 0.45 & - & 0.8 \\ 0.91 & 0.73 & 0.78 & - \end{pmatrix} \quad PM_2 = \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.72 & 0.69 \\ 0.73 & - & 0.89 & 0.72 \\ 0.86 & 0.88 & - & 0.8 \\ 0.68 & 0.6 & 0.78 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_3 = \begin{pmatrix} - & 0.71 & 0.86 & 0.76 \\ 0.9 & - & 0.36 & 0.97 \\ 0.89 & 0.49 & - & 0.8 \\ 0.78 & 0.89 & 0.66 & - \end{pmatrix} \quad PM_4 = \begin{pmatrix} - & 0.65 & 0.69 & 0.78 \\ 0.58 & - & 0.81 & 0.59 \\ 0.89 & 0.96 & - & 0.88 \\ 0.65 & 0.65 & 0.86 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_5 = \begin{pmatrix} - & 0.74 & 0.81 & 0.67 \\ 0.81 & - & 0.86 & 0.8 \\ 0.94 & 0.87 & - & 0.88 \\ 0.65 & 0.69 & 0.97 & - \end{pmatrix} \quad PM_6 = \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.61 & 0.64 \\ 0.98 & - & 0.73 & 0.72 \\ 0.47 & 0.71 & - & 0.53 \\ 0.49 & 0.6 & 0.55 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_7 = \begin{pmatrix} - & 0.58 & 0.99 & 0.74 \\ 0.52 & - & 0.64 & 0.97 \\ 0.89 & 0.63 & - & 0.83 \\ 0.72 & 0.98 & 0.84 & - \end{pmatrix} \quad PM_8 = \begin{pmatrix} - & 0.48 & 0.81 & 0.89 \\ 0.54 & - & 0.7 & 0.7 \\ 0.67 & 0.69 & - & 0.62 \\ 0.74 & 0.65 & 0.53 & - \end{pmatrix}$$

3. *Medidas de proximidad.* Se calcula la proximidad de las preferencias de cada experto a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Proximidad sobre pares de alternativas, pp_i^{lk} .* La proximidad a nivel de cada par de alternativas (x_l, x_k) queda recogida en las posiciones (l, k) de cada una de las matrices de proximidad PM_i .

Level 2. *Proximidad de las alternativas, pa_i^l .* La proximidad de cada alternativa x_l de cada experto i se calcula como la media aritmética de las proximidades de todos los pares pertenecientes a x_l :

x_1	x_2	x_3	x_4
$pa_1^1 = 0.76$	$pa_1^2 = 0.61$	$pa_1^3 = 0.70$	$pa_1^4 = 0.81$
$pa_2^1 = 0.78$	$pa_2^2 = 0.78$	$pa_2^3 = 0.85$	$pa_2^4 = 0.69$
$pa_3^1 = 0.78$	$pa_3^2 = 0.74$	$pa_3^3 = 0.73$	$pa_3^4 = 0.78$
$pa_4^1 = 0.71$	$pa_4^2 = 0.66$	$pa_4^3 = 0.91$	$pa_4^4 = 0.72$
$pa_5^1 = 0.74$	$pa_5^2 = 0.82$	$pa_5^3 = 0.89$	$pa_5^4 = 0.77$
$pa_6^1 = 0.72$	$pa_6^2 = 0.81$	$pa_6^3 = 0.57$	$pa_6^4 = 0.55$
$pa_7^1 = 0.77$	$pa_7^2 = 0.71$	$pa_7^3 = 0.78$	$pa_7^4 = 0.85$
$pa_8^1 = 0.72$	$pa_8^2 = 0.65$	$pa_8^3 = 0.66$	$pa_8^4 = 0.64$

Level 3. *Proximidad de la relación, pr_i .* La proximidad de cada experto se obtiene como la media aritmética de las proximidades a nivel de alternativas. Esta medida indica la proximidad de la opinión de cada experto respecto a la opinión colectiva. Las proximidades de los 8 expertos son las siguientes:

$$pr_1 = 0.72 \quad pr_2 = 0.77 \quad pr_3 = 0.76 \quad pr_4 = 0.75$$

$$pr_5 = 0.81 \quad pr_6 = 0.66 \quad pr_7 = 0.78 \quad pr_8 = 0.67$$

4.2. Sistema de Recomendaciones Orientado

El modelo utiliza un sistema basado en reglas para identificar las preferencias de los expertos que deben ser cambiadas y la dirección de estos cambios. El significado y funcionamiento de estas reglas ya ha sido presentado en el apartado 3.3.4.

A. Reglas de Identificación, *IR*.

1. *IR1. Identificación del conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias, $EXPCH$.* Se establece un ranking de los expertos ordenados de mayor a

menor según sus valores de proximidad: $\{e_5, e_7, e_2, e_3, e_4, e_1, e_8, e_6\}$. Se utiliza el parámetro $n^{\circ}ex=4$ para seleccionar el conjunto de expertos que al tener menor proximidad han de cambiar sus preferencias:

$$EXPCH = \{e_4, e_1, e_8, e_6\}.$$

2. *IR2. Identificación del conjunto de alternativas cuyas valoraciones han de ser modificadas, ALT.* Los expertos han de modificar todas las alternativas cuyo consenso a nivel de alternativas sea menor que el umbral de consenso:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.75\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

3. *IR3. Identificación de los pares de alternativas que han de cambiarse, $PALT_i$.* En este punto el SAC utiliza el umbral de proximidad $\beta = 0.8$ para identificar las preferencias p_i^{lk} que el experto i debería cambiar. En este ejemplo se obtendrían los siguientes conjuntos:

$$PALT_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), \\ (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

$$PALT_4 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), \\ (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$$

$$PALT_6 = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), \\ (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

$$PALT_8 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), \\ (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

B. Reglas de dirección DR.

1. *Parámetros de dirección.* Se calculan los parámetros de dirección ml y sl de las preferencias individuales y colectiva. A continuación mostramos los valores de los conjuntos difusos individuales y colectivos del experto 1 a partir de los cuales se calculan los parámetros de dirección.

$$\begin{array}{ll}
p_1^{12} = c_0 \mapsto \tilde{p}_1^{12} = (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0) & \tilde{p}_c^{12} = (0.38, 0.28, 0.14, 0.17, 0.3, 0.27, 0.19, 0.11, 0.13) \\
p_1^{13} = c_0 \mapsto \tilde{p}_1^{13} = (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0) & \tilde{p}_c^{13} = (0.36, 0.38, 0.26, 0.2, 0.22, 0.19, 0.21, 0.12, 0.04) \\
p_1^{21} = c_4 \mapsto \tilde{p}_1^{21} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1) & \tilde{p}_c^{21} = (0.17, 0.19, 0.27, 0.27, 0.22, 0.21, 0.1, 0.15, 0.38) \\
p_1^{23} = c_3 \mapsto \tilde{p}_1^{23} = (0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33) & \tilde{p}_c^{23} = (0.47, 0.35, 0.29, 0.19, 0.21, 0.15, 0.14, 0.08, 0.17) \\
p_1^{24} = c_4 \mapsto \tilde{p}_1^{24} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1) & \tilde{p}_c^{24} = (0.08, 0.2, 0.34, 0.27, 0.39, 0.03, 0.15, 0.26, 0.3) \\
p_1^{32} = c_0 \mapsto \tilde{p}_1^{32} = (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0) & \tilde{p}_c^{32} = (0.13, 0.21, 0.06, 0.07, 0.22, 0.26, 0.29, 0.27, 0.42) \\
p_1^{34} = c_1 \mapsto \tilde{p}_1^{34} = (0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0) & \tilde{p}_c^{34} = (0.08, 0.24, 0.55, 0.38, 0.19, 0.16, 0.13, 0.19, 0.18) \\
p_1^{42} = c_1 \mapsto \tilde{p}_1^{42} = (0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0) & \tilde{p}_c^{42} = (0.15, 0.3, 0.3, 0.15, 0.17, 0.16, 0.17, 0.27, 0.3) \\
p_1^{43} = c_3 \mapsto \tilde{p}_1^{43} = (0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33) & \tilde{p}_c^{43} = (0.25, 0.15, 0.07, 0.2, 0.26, 0.35, 0.36, 0.33, 0.08)
\end{array}$$

Para el resto de preferencias se procede de la misma forma teniendo en cuenta los conjuntos difusos mostrados en la Tabla 3.6 y los conjuntos difusos colectivos. En la Tabla 3.10 se muestran los parámetros de dirección de las preferencias a cambiar:

2. *Aplicación de las reglas de dirección.*

- Según la regla DR1, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$\begin{array}{llll}
p_1^{21} = c_4 \rightarrow c_3 & p_4^{13} = b_4 \rightarrow b_3 & p_6^{13} = c_3 \rightarrow c_2 & p_8^{12} = b_6 \rightarrow b_5 \\
p_1^{23} = c_3 \rightarrow c_2 & p_4^{14} = b_5 \rightarrow b_4 & p_6^{32} = c_4 \rightarrow c_3 & p_8^{41} = b_4 \rightarrow b_3 \\
p_1^{24} = c_4 \rightarrow c_3 & p_4^{21} = b_6 \rightarrow b_5 & p_6^{34} = c_4 \rightarrow c_3 & p_8^{24} = b_5 \rightarrow b_4 \\
p_1^{34} = c_1 \rightarrow c_0 & p_4^{24} = b_6 \rightarrow b_5 & p_6^{41} = c_4 \rightarrow c_3 & p_8^{31} = b_6 \rightarrow b_5 \\
p_1^{43} = c_3 \rightarrow c_2 & p_6^{42} = c_4 \rightarrow c_3 & p_8^{32} = b_6 \rightarrow b_5 & p_8^{34} = b_5 \rightarrow b_4
\end{array}$$

	$(\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{val}))$	$(\tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{val}))$
\tilde{p}_1^{12}	(0, 1, 1, 0.67)	(0, 0.38, 4, 0.3)
\tilde{p}_1^{13}	(0, 1, 1, 0.67)	(1, 0.38, 0, 0.36)
\tilde{p}_1^{21}	(8, 1, 7, 0.64)	(8, 0.38, 4, 0.22)
\tilde{p}_1^{23}	(6, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_1^{24}	(8, 1, 7, 0.64)	(4, 0.39, 2, 0.34)
\tilde{p}_1^{32}	(0, 1, 1, 0.67)	(8, 0.42, 6, 0.29)
\tilde{p}_1^{34}	(2, 1, *)	(2, 0.55, 3, 0.38)
\tilde{p}_1^{42}	(4, 1, *)	(8, 0.3, 7, 0.27)
\tilde{p}_1^{43}	(6, 1, *)	(6, 0.36, 5, 0.35)
\tilde{p}_4^{12}	(0, 1, 1, 0.57)	(0, 0.38, 4, 0.3)
\tilde{p}_4^{13}	(5, 0.86, 6, 0.71)	(1, 0.38, 0, 0.36)
\tilde{p}_4^{14}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(7, 0.39, 3, 0.36)
\tilde{p}_4^{21}	(8, 1, 7, 0.57)	(8, 0.38, 4, 0.22)
\tilde{p}_4^{24}	(8, 1, 7, 0.57)	(4, 0.39, 2, 0.34)
\tilde{p}_4^{41}	(0, 1, 1, 0.57)	(0, 0.38, 1, 0.35)
\tilde{p}_4^{42}	(1, 0.86, 2, 0.71)	(8, 0.3, 7, 0.27)
\tilde{p}_6^{13}	(6, 1, *)	(1, 0.38, 0, 0.36)
\tilde{p}_6^{14}	(2, 1, *)	(7, 0.39, 3, 0.36)
\tilde{p}_6^{23}	(0, 1, 1, 0.67)	(4, 0.39, 2, 0.34)
\tilde{p}_6^{24}	(2, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_6^{31}	(0, 1, 1, 0.67)	(4, 0.51, 6, 0.38)
\tilde{p}_6^{32}	(8, 1, 7, 0.64)	(8, 0.42, 6, 0.29)
\tilde{p}_6^{34}	(8, 1, 7, 0.64)	(3, 0.38, 1, 0.24)
\tilde{p}_6^{41}	(8, 1, 7, 0.64)	(0, 0.38, 1, 0.35)
\tilde{p}_6^{42}	(8, 1, 7, 0.64)	(8, 0.3, 7, 0.27)
\tilde{p}_6^{43}	(0, 1, 1, 0.67)	(6, 0.36, 5, 0.35)
\tilde{p}_8^{12}	(8, 1, 7, 0.57)	(0, 0.38, 4, 0.3)
\tilde{p}_8^{21}	(0, 1, 1, 0.57)	(8, 0.38, 4, 0.22)
\tilde{p}_8^{23}	(0, 1, 1, 0.57)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_8^{24}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(4, 0.39, 2, 0.34)
\tilde{p}_8^{31}	(8, 1, 7, 0.57)	(4, 0.51, 6, 0.38)
\tilde{p}_8^{32}	(8, 1, 7, 0.57)	(8, 0.42, 6, 0.29)
\tilde{p}_8^{34}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(2, 0.55, 3, 0.38)
\tilde{p}_8^{41}	(5, 0.86, 6, 0.71)	(0, 0.38, 1, 0.35)
\tilde{p}_8^{42}	(1, 0.86, 2, 0.71)	(8, 0.3, 7, 0.27)
\tilde{p}_8^{43}	(0, 1, 1, 0.57)	(6, 0.36, 5, 0.35)

Tabla 3.10: Parámetros de dirección

- Según la regla DR2, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$p_1^{13} = c_0 \rightarrow c_1$$

$$p_1^{32} = c_0 \rightarrow c_1$$

$$p_1^{42} = c_2 \rightarrow c_3$$

$$p_4^{42} = b_1 \rightarrow b_2$$

$$p_6^{14} = c_1 \rightarrow c_2$$

$$p_6^{31} = c_0 \rightarrow c_1$$

$$p_6^{24} = c_1 \rightarrow c_2$$

$$p_6^{43} = c_0 \rightarrow c_1$$

$$p_8^{21} = b_0 \rightarrow b_1$$

$$p_8^{42} = b_1 \rightarrow b_2$$

$$p_8^{43} = b_0 \rightarrow b_1$$

- Según la excepción Excp 1), los expertos no modificarán las siguientes preferencias:

$$p_1^{12}, p_4^{12}, p_4^{41}, p_6^{23}, p_8^{23}$$

3.4.2. Segunda ronda de consenso

Para evitar extender demasiado el ejemplo y no volver a repetir los resultados de algunos pasos intermedios que no son interesantes para comprobar el funcionamiento del modelo, no incluiremos en esta ronda ni en las sucesivas los resultados devueltos por las matrices de similaridad.

1. Modificación de las preferencias.

Siguiendo las recomendaciones dadas por el modelo, los expertos e_1, e_4, e_6 y e_8 cambiarán sus preferencias dando comienzo a una nueva ronda de consenso. Los cambios afectarán sólo a las preferencias en negrita manteniéndose todas las demás.

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{c_0} & \mathbf{c_1} & c_2 \\ \mathbf{c_3} & - & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\ c_3 & \mathbf{c_1} & - & \mathbf{c_0} \\ c_2 & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_2} & - \end{pmatrix} \quad P_{e_4} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{b_0} & \mathbf{b_3} & \mathbf{b_4} \\ \mathbf{b_5} & - & b_1 & \mathbf{b_5} \\ b_3 & b_4 & - & b_2 \\ \mathbf{b_0} & \mathbf{b_2} & b_4 & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_6} = \begin{pmatrix} - & c_2 & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_2} \\ c_2 & - & \mathbf{c_0} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{c_3} & - & \mathbf{c_3} \\ \mathbf{c_3} & \mathbf{c_3} & \mathbf{c_1} & - \end{pmatrix} \quad P_{e_8} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{b_5} & b_1 & b_3 \\ \mathbf{b_1} & - & \mathbf{b_0} & \mathbf{b_4} \\ \mathbf{b_5} & \mathbf{b_5} & - & \mathbf{b_4} \\ \mathbf{b_3} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_1} & - \end{pmatrix}$$

2. Cálculo de los grados de consenso

1. *Cálculo de los valores centrales:* No han cambiado respecto a los calculados en la primera ronda.
2. *Matrices de similitud:*

Se calculan de nuevo las matrices de similitud para cada par de expertos.

3. *Matriz de consenso.*

La matriz de consenso obtenida en la segunda ronda es:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.63 & 0.8 & 0.74 \\ 0.64 & - & 0.62 & 0.76 \\ 0.78 & 0.65 & - & 0.72 \\ 0.67 & 0.73 & 0.7 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso.* Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .* El grado de consenso en cada par de alternativas (x_l, x_k) es:

$$\begin{aligned} cp^{12} &= 0.63 & cp^{13} &= 0.8 & cp^{14} &= 0.74 \\ cp^{21} &= 0.64 & cp^{23} &= 0.62 & cp^{24} &= 0.76 \\ cp^{31} &= 0.78 & cp^{32} &= 0.65 & cp^{34} &= 0.72 \\ cp^{41} &= 0.67 & cp^{42} &= 0.73 & cp^{43} &= 0.7 \end{aligned}$$

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El grado de consenso en cada alternativa es:

$$ca^1 = 0.72 \quad ca^2 = 0.68 \quad ca^3 = 0.71 \quad ca^4 = 0.7$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones, cr .* El grado de consenso alcanzado en la segunda ronda es:

$$cr = 0.703$$

3. Control del consenso

Como puede observarse, los cambios recomendados por el sistema de recomendaciones orientado y realizados por los expertos en sus preferencias han producido un incremento en el grado de consenso, pasando del 0.634 de la primera ronda

al 0.703 de esta segunda ronda. Aunque el incremento del grado de consenso es considerable todavía no alcanza el umbral fijado inicialmente $\gamma = 0.75$ y por lo tanto el proceso debe continuar.

4. Generación de recomendaciones

De nuevo se pone en marcha el proceso para generar las recomendaciones.

4.1 Cálculo de las medidas de proximidad.

1. Cálculo de la matriz de preferencias colectiva. Los nuevos valores de la matriz colectiva son:

$$\tilde{p}_c^{12} = (0.38, 0.28, 0.14, 0.17, 0.3, 0.31, 0.26, 0.14, 0.05)$$

$$\tilde{p}_c^{13} = (0.27, 0.38, 0.4, 0.43, 0.42, 0.15, 0.06, 0, 0)$$

$$\tilde{p}_c^{14} = (0, 0, 0.1, 0.36, 0.43, 0.35, 0.25, 0.32, 0.25)$$

$$\tilde{p}_c^{21} = (0.09, 0.23, 0.35, 0.31, 0.26, 0.33, 0.26, 0.19, 0.22)$$

$$\tilde{p}_c^{23} = (0.47, 0.35, 0.33, 0.27, 0.29, 0.15, 0.06, 0, 0.13)$$

$$\tilde{p}_c^{24} = (0.04, 0.12, 0.26, 0.27, 0.57, 0.31, 0.35, 0.23, 0.09)$$

$$\tilde{p}_c^{31} = (0.04, 0.08, 0.14, 0.15, 0.55, 0.38, 0.45, 0.31, 0.14)$$

$$\tilde{p}_c^{32} = (0.04, 0.21, 0.14, 0.15, 0.3, 0.38, 0.45, 0.31, 0.26)$$

$$\tilde{p}_c^{34} = (0.17, 0.24, 0.47, 0.3, 0.24, 0.32, 0.21, 0.12, 0.04)$$

$$\tilde{p}_c^{41} = (0.38, 0.35, 0.14, 0.15, 0.29, 0.36, 0.18, 0.08, 0.04)$$

$$\tilde{p}_c^{42} = (0, 0.07, 0.22, 0.3, 0.4, 0.33, 0.3, 0.27, 0.22)$$

$$\tilde{p}_c^{43} = (0.09, 0.19, 0.27, 0.4, 0.39, 0.35, 0.27, 0.24, 0.04)$$

2. *Matrices de proximidad, PM_i .* Se calcula la matriz de proximidad de cada experto.

$$\begin{aligned}
PM_1 &= \begin{pmatrix} - & 0.66 & 0.94 & 0.86 \\ 0.76 & - & 0.81 & 0.79 \\ 0.86 & 0.64 & - & 0.66 \\ 0.88 & 0.9 & 0.99 & - \end{pmatrix} & PM_2 &= \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.77 & 0.72 \\ 0.74 & - & 0.94 & 0.71 \\ 0.86 & 0.86 & - & 0.83 \\ 0.7 & 0.68 & 0.74 & - \end{pmatrix} \\
PM_3 &= \begin{pmatrix} - & 0.71 & 0.81 & 0.74 \\ 0.89 & - & 0.31 & 0.96 \\ 0.89 & 0.51 & - & 0.83 \\ 0.76 & 0.97 & 0.62 & - \end{pmatrix} & PM_4 &= \begin{pmatrix} - & 0.64 & 0.81 & 0.96 \\ 0.68 & - & 0.86 & 0.71 \\ 0.89 & 0.94 & - & 0.91 \\ 0.68 & 0.73 & 0.82 & - \end{pmatrix} \\
PM_5 &= \begin{pmatrix} - & 0.75 & 0.86 & 0.7 \\ 0.82 & - & 0.81 & 0.79 \\ 0.93 & 0.89 & - & 0.91 \\ 0.68 & 0.77 & 0.99 & - \end{pmatrix} & PM_6 &= \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.81 & 0.86 \\ 0.99 & - & 0.77 & 0.96 \\ 0.64 & 0.86 & - & 0.67 \\ 0.63 & 0.85 & 0.76 & - \end{pmatrix} \\
PM_7 &= \begin{pmatrix} - & 0.58 & 0.94 & 0.76 \\ 0.51 & - & 0.69 & 0.96 \\ 0.89 & 0.61 & - & 0.79 \\ 0.74 & 0.9 & 0.88 & - \end{pmatrix} & PM_8 &= \begin{pmatrix} - & 0.59 & 0.86 & 0.86 \\ 0.66 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.78 & 0.78 & - & 0.75 \\ 0.88 & 0.73 & 0.68 & - \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. *Medidas de proximidad.* Se calcula la proximidad de las preferencias de los expertos a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Proximidad sobre pares de alternativas, pp_i^k .* Coinciden con los valores de las matrices de proximidad, PM_i .

Level 2. *Proximidad de las alternativas, pa_i^l .* Las proximidades a nivel de alternativas de cada experto son:

x_1	x_2	x_3	x_4
$pa_1^1 = 0.82$	$pa_1^2 = 0.79$	$pa_1^3 = 0.72$	$pa_1^4 = 0.93$
$pa_2^1 = 0.8$	$pa_2^2 = 0.79$	$pa_2^3 = 0.85$	$pa_2^4 = 0.71$
$pa_3^1 = 0.75$	$pa_3^2 = 0.72$	$pa_3^3 = 0.75$	$pa_3^4 = 0.78$
$pa_4^1 = 0.81$	$pa_4^2 = 0.75$	$pa_4^3 = 0.91$	$pa_4^4 = 0.74$
$pa_5^1 = 0.77$	$pa_5^2 = 0.8$	$pa_5^3 = 0.91$	$pa_5^4 = 0.81$
$pa_6^1 = 0.86$	$pa_6^2 = 0.91$	$pa_6^3 = 0.73$	$pa_6^4 = 0.75$
$pa_7^1 = 0.76$	$pa_7^2 = 0.72$	$pa_7^3 = 0.77$	$pa_7^4 = 0.84$
$pa_8^1 = 0.77$	$pa_8^2 = 0.76$	$pa_8^3 = 0.77$	$pa_8^4 = 0.76$

Level 3. *Proximidad de la relación, pr_i .* Proximidades de los 8 expertos en la segunda ronda:

$$pr_1 = 0.81 \quad pr_2 = 0.79 \quad pr_3 = 0.75 \quad pr_4 = 0.8$$

$$pr_5 = 0.82 \quad pr_6 = 0.81 \quad pr_7 = 0.77 \quad pr_8 = 0.77$$

4.2. Sistema de Recomendaciones Orientado

A. Reglas de Identificación, *IR*.

1. *IR1. Identificación del conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias, EXPCH.* Se establece el ranking de los expertos ordenados de mayor a menor según sus valores de proximidad: $e_5, e_1, e_6, e_4, e_2, e_7, e_8, e_3$. El conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias es:

$$EXPCH = \{e_2, e_7, e_8, e_3\}.$$

2. *IR2. Identificación del conjunto de alternativas cuyas valoraciones han de ser modificadas, ALT.* Los expertos han de modificar todas las alternativas cuyo

consenso a nivel de alternativas sea menor que el umbral de consenso:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.75\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

3. *IR3. Identificación de los pares de alternativas que han de cambiarse, $PALT_i$.*

Utilizando como umbral de proximidad $\beta = 0.8$ las preferencias que los expertos deberían cambiar en esta ronda son:

$$PALT_2 = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), \\ (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

$$PALT_3 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), \\ (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_3)\}$$

$$PALT_7 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), \\ (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_1)\}$$

$$PALT_8 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), \\ (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$$

B. Reglas de dirección *DR*.

1. *Parámetros de dirección.* Los parámetros de dirección ml y sl de estas preferencias se muestran en la Tabla 3.11:

	$(\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{val}))$	$(\tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{val}))$
\tilde{p}_2^{13}	(0, 1, 1, 0.67)	(3, 0.43, 4, 0.42)
\tilde{p}_2^{14}	(8, 1, 7, 0.67)	(4, 0.43, 3, 0.36)
\tilde{p}_2^{21}	(2, 1, *)	(2, 0.35, 5, 0.33)
\tilde{p}_2^{24}	(2, 1, *)	(4, 0.57, 6, 0.35)
\tilde{p}_2^{41}	(0, 1, 1, 0.67)	(0, 0.38, 5, 0.36)
\tilde{p}_2^{42}	(8, 1, 7, 0.67)	(4, 0.4, 5, 0.33)
\tilde{p}_2^{43}	(6, 1, *)	(3, 0.4, 4, 0.39)
\tilde{p}_3^{12}	(1, 1, *)	(0, 0.38, 5, 0.31)
\tilde{p}_3^{14}	(3, 1, *)	(4, 0.43, 3, 0.36)
\tilde{p}_3^{23}	(8, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_3^{32}	(1, 1, *)	(6, 0.45, 5, 0.38)
\tilde{p}_3^{41}	(5, 1, *)	(0, 0.38, 5, 0.36)
\tilde{p}_3^{43}	(7, 1, *)	(3, 0.4, 4, 0.39)
\tilde{p}_7^{12}	(0, 1, *)	(0, 0.38, 5, 0.31)
\tilde{p}_7^{14}	(7, 1, *)	(4, 0.43, 3, 0.36)
\tilde{p}_7^{21}	(8, 1, *)	(2, 0.35, 5, 0.33)
\tilde{p}_7^{23}	(0, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_7^{32}	(8, 1, *)	(6, 0.45, 5, 0.38)
\tilde{p}_7^{34}	(5, 1, *)	(2, 0.47, 5, 0.32)
\tilde{p}_7^{41}	(1, 1, *)	(0, 0.38, 5, 0.36)
\tilde{p}_8^{12}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(0, 0.38, 5, 0.31)
\tilde{p}_8^{21}	(1, 0.86, 2, 0.71)	(2, 0.35, 5, 0.33)
\tilde{p}_8^{23}	(0, 1, 1, 0.57)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_8^{31}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(4, 0.55, 6, 0.45)
\tilde{p}_8^{32}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(6, 0.45, 5, 0.38)
\tilde{p}_8^{34}	(5, 0.86, 6, 0.71)	(2, 0.47, 5, 0.32)
\tilde{p}_8^{42}	(3, 0.84, 2, 0.71)	(4, 0.4, 5, 0.33)
\tilde{p}_8^{43}	(1, 0.86, 3, 0.71)	(3, 0.4, 4, 0.39)

Tabla 3.11: Parámetros de dirección

2. *Aplicación de las reglas de dirección.*

- Según la regla DR1, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas

a las siguientes preferencias:

$$\begin{array}{ll}
 p_2^{14} = c_4 \rightarrow c_3 & p_7^{14} = a_7 \rightarrow a_6 \\
 p_2^{21} = c_1 \rightarrow c_0 & p_7^{21} = a_8 \rightarrow a_7 \\
 p_2^{42} = c_4 \rightarrow c_3 & p_7^{32} = a_8 \rightarrow a_7 \\
 p_2^{43} = c_3 \rightarrow c_2 & p_7^{34} = a_5 \rightarrow a_4 \\
 p_3^{12} = a_1 \rightarrow a_0 & p_7^{41} = a_1 \rightarrow a_0 \\
 p_3^{23} = a_8 \rightarrow a_7 & p_8^{12} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 p_3^{41} = a_5 \rightarrow a_4 & p_8^{31} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 p_3^{43} = a_7 \rightarrow a_6 & p_8^{32} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 & p_8^{34} = b_4 \rightarrow b_3
 \end{array}$$

- Según la regla DR2, los expertos han de incrementar las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$\begin{array}{l}
 p_2^{13} = c_0 \rightarrow c_1 \\
 p_2^{24} = c_1 \rightarrow c_2 \\
 p_3^{14} = a_3 \rightarrow a_4 \\
 p_3^{32} = a_1 \rightarrow a_2 \\
 p_8^{21} = b_1 \rightarrow b_2 \\
 p_8^{42} = b_2 \rightarrow b_3 \\
 p_8^{43} = b_1 \rightarrow b_2
 \end{array}$$

- Según la excepción Excp 1), los expertos no modificarán las siguientes preferencias:

$$p_2^{41}, p_7^{12}, p_7^{23}, p_8^{23}$$

3.4.3. Tercera ronda de consenso

1. Modificación de las preferencias.

Siguiendo las recomendaciones dadas por el modelo, los expertos e_2, e_3, e_7 y e_8 cambiarán sus preferencias:

$$P_{e_2} = \begin{pmatrix} - & c_2 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_0 & - & c_1 & \mathbf{c}_2 \\ c_3 & c_3 & - & c_1 \\ c_0 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_2 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_3} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{a}_0 & a_4 & \mathbf{a}_4 \\ a_5 & - & \mathbf{a}_7 & a_4 \\ a_4 & \mathbf{a}_2 & - & a_2 \\ \mathbf{a}_4 & a_5 & \mathbf{a}_6 & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_7} = \begin{pmatrix} - & a_0 & a_3 & \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_7 & - & a_0 & a_4 \\ a_4 & \mathbf{a}_7 & - & \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_0 & a_4 & a_3 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_8} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{b}_4 & b_1 & b_3 \\ \mathbf{b}_2 & - & b_0 & b_4 \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_4 & - & \mathbf{b}_3 \\ b_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & - \end{pmatrix}$$

Con estos nuevos valores comenzará la tercera ronda.

2. Cálculo de los grados de consenso

1. *Cálculo de los valores centrales:* No han cambiado respecto a los calculados en la primera ronda.
2. *Matrices de similitud:*

Se calculan de nuevo las matrices de similitud para cada par de expertos.

3. *Matriz de consenso.*

La matriz de consenso obtenida en la tercera ronda es:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.65 & 0.83 & 0.81 \\ 0.66 & - & 0.66 & 0.81 \\ 0.81 & 0.73 & - & 0.76 \\ 0.67 & 0.8 & 0.8 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso.* Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .* Grado de consenso en cada par de alternativas:

$$\begin{aligned} cp^{12} &= 0.65 & cp^{13} &= 0.83 & cp^{14} &= 0.81 \\ cp^{21} &= 0.66 & cp^{23} &= 0.66 & cp^{24} &= 0.81 \\ cp^{31} &= 0.81 & cp^{32} &= 0.73 & cp^{34} &= 0.76 \\ cp^{41} &= 0.67 & cp^{42} &= 0.8 & cp^{43} &= 0.8 \end{aligned}$$

Si comparamos con la matriz de consenso obtenida en la segunda ronda podemos comprobar como prácticamente se mejora el grado de consenso en todos los pares de alternativas.

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El grado de consenso al nivel de alternativas es:

$$ca^1 = 0.76 \quad ca^2 = 0.71 \quad ca^3 = 0.77 \quad ca^4 = 0.76$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones o consenso total, cr .* El grado de consenso total en la tercera ronda es:

$$cr = 0.749$$

3. Control del consenso

El grado de consenso en la tercera ronda se ha quedado a una milésima del umbral de consenso que estamos buscando, $cr = 0.749 < \gamma = 0.75$. El modelo seguirá ejecutando la siguiente fase y recomendará de nuevo hacer cambios en las preferencias de los expertos, dando lugar a una cuarta ronda. Es de prever que con estos nuevos cambios y estando tan cerca el umbral de consenso, éste se alcance en la siguiente ronda.

4. Generación de recomendaciones

4.1 Cálculo de las medidas de proximidad.

1. Cálculo de la matriz de preferencias colectiva. Los nuevos valores de la matriz colectiva son:

$$\tilde{p}_c^{12} = (0.5, 0.15, 0.14, 0.17, 0.36, 0.38, 0.26, 0.07, 0)$$

$$\tilde{p}_c^{13} = (0.19, 0.38, 0.49, 0.52, 0.46, 0.15, 0.06, 0, 0)$$

$$\tilde{p}_c^{14} = (0, 0, 0.1, 0.24, 0.6, 0.43, 0.46, 0.19, 0.17)$$

$$\tilde{p}_c^{21} = (0.13, 0.15, 0.26, 0.3, 0.27, 0.33, 0.26, 0.32, 0.09)$$

$$\tilde{p}_c^{23} = (0.47, 0.35, 0.33, 0.27, 0.29, 0.15, 0.06, 0.13, 0)$$

$$\tilde{p}_c^{24} = (0, 0.03, 0.17, 0.27, 0.65, 0.39, 0.39, 0.23, 0.09)$$

$$\tilde{p}_c^{31} = (0.04, 0.08, 0.14, 0.15, 0.61, 0.45, 0.45, 0.24, 0.08)$$

$$\tilde{p}_c^{32} = (0.04, 0.08, 0.27, 0.15, 0.36, 0.45, 0.45, 0.36, 0.08)$$

$$\tilde{p}_c^{34} = (0.17, 0.24, 0.49, 0.37, 0.44, 0.15, 0.14, 0.08, 0.04)$$

$$\tilde{p}_c^{41} = (0.5, 0.23, 0.14, 0.15, 0.42, 0.24, 0.18, 0.08, 0.04)$$

$$\tilde{p}_c^{42} = (0, 0.03, 0.15, 0.26, 0.51, 0.48, 0.4, 0.27, 0.14)$$

$$\tilde{p}_c^{43} = (0.04, 0.12, 0.32, 0.55, 0.52, 0.35, 0.32, 0.03, 0)$$

2. *Matrices de proximidad, PM_i .* Se calcula una matriz de proximidad para cada experto.

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & 0.69 & 0.92 & 0.88 \\ 0.77 & - & 0.8 & 0.83 \\ 0.84 & 0.66 & - & 0.69 \\ 0.87 & 0.89 & 0.97 & - \end{pmatrix} \quad PM_2 = \begin{pmatrix} - & 0.89 & 0.92 & 0.87 \\ 0.56 & - & 0.95 & 0.92 \\ 0.84 & 0.84 & - & 0.86 \\ 0.71 & 0.86 & 0.97 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_3 = \begin{pmatrix} - & 0.61 & 0.83 & 0.88 \\ 0.9 & - & 0.43 & 0.92 \\ 0.91 & 0.66 & - & 0.86 \\ 0.87 & 0.99 & 0.72 & - \end{pmatrix} \quad PM_4 = \begin{pmatrix} - & 0.67 & 0.83 & 0.95 \\ 0.69 & - & 0.87 & 0.76 \\ 0.91 & 0.92 & - & 0.94 \\ 0.69 & 0.72 & 0.79 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_5 = \begin{pmatrix} - & 0.72 & 0.85 & 0.69 \\ 0.81 & - & 0.8 & 0.74 \\ 0.91 & 0.91 & - & 0.94 \\ 0.69 & 0.78 & 0.97 & - \end{pmatrix} \quad PM_6 = \begin{pmatrix} - & 0.89 & 0.83 & 0.88 \\ 0.98 & - & 0.78 & 0.92 \\ 0.66 & 0.84 & - & 0.64 \\ 0.62 & 0.86 & 0.78 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_7 = \begin{pmatrix} - & 0.61 & 0.95 & 0.87 \\ 0.65 & - & 0.7 & 0.92 \\ 0.91 & 0.72 & - & 0.89 \\ 0.63 & 0.89 & 0.91 & - \end{pmatrix} \quad PM_8 = \begin{pmatrix} - & 0.72 & 0.85 & 0.88 \\ 0.81 & - & 0.76 & 0.91 \\ 0.91 & 0.92 & - & 0.89 \\ 0.87 & 0.89 & 0.86 & - \end{pmatrix}$$

3. *Medidas de proximidad:*

Level 1. *Proximidad sobre pares de alternativas, pp_i^{lk} .* Coinciden con los valores de las matrices de proximidad, PM_i .

Level 2. *Proximidad de las alternativas, pa_i^l .* Los valores de proximidad de cada alternativa para cada experto son:

x_1	x_2	x_3	x_4
$pa_1^1 = 0.83$	$pa_1^2 = 0.8$	$pa_1^3 = 0.73$	$pa_1^4 = 0.91$
$pa_2^1 = 0.9$	$pa_2^2 = 0.81$	$pa_2^3 = 0.85$	$pa_2^4 = 0.85$
$pa_3^1 = 0.77$	$pa_3^2 = 0.75$	$pa_3^3 = 0.81$	$pa_3^4 = 0.86$
$pa_4^1 = 0.82$	$pa_4^2 = 0.77$	$pa_4^3 = 0.92$	$pa_4^4 = 0.74$
$pa_5^1 = 0.75$	$pa_5^2 = 0.78$	$pa_5^3 = 0.92$	$pa_5^4 = 0.81$
$pa_6^1 = 0.86$	$pa_6^2 = 0.89$	$pa_6^3 = 0.72$	$pa_6^4 = 0.75$
$pa_7^1 = 0.81$	$pa_7^2 = 0.75$	$pa_7^3 = 0.84$	$pa_7^4 = 0.81$
$pa_8^1 = 0.81$	$pa_8^2 = 0.83$	$pa_8^3 = 0.91$	$pa_8^4 = 0.87$

Level 3. *Proximidad de la relación, pr_i .* Los valores de proximidad obtenidos son:

$$pr_1 = 0.82 \quad pr_2 = 0.85 \quad pr_3 = 0.8 \quad pr_4 = 0.81$$

$$pr_5 = 0.82 \quad pr_6 = 0.81 \quad pr_7 = 0.8 \quad pr_8 = 0.86$$

4.2. Sistema de Recomendaciones Orientado

A. Reglas de Identificación, *IR*.

1. *IR1. Identificación del conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias, $EXPCH$.* El ranking de expertos ordenados de mayor a menor según sus valores de proximidad es: $e_8, e_2, e_1, e_5, e_4, e_6, e_3, e_7$. El conjunto de expertos que han de cambiar sus preferencias es:

$$EXPCH = \{e_4, e_6, e_3, e_7\}.$$

2. *IR2. Identificación del conjunto de alternativas cuyas valoraciones han de ser modificadas, ALT .* El conjunto de alternativas que han de cambiar los expertos es:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.75\} = \{x_2\}.$$

En la tercera ronda los cambios deben afectar exclusivamente a las preferencias de la alternativa x_2 , de ahí que el número de cambios debe reducirse considerablemente.

3. *IR3. Identificación de los pares de alternativas que han de cambiarse, $PALT_i$.* Utilizando como umbral de proximidad $\beta = 0.8$, las preferencias que los expertos deben cambiar en esta ronda son:

$$PALT_3 = \{(x_2, x_3)\}$$

$$PALT_4 = \{(x_2, x_1), (x_2, x_4)\}$$

$$PALT_7 = \{(x_2, x_1), (x_2, x_3)\}$$

$$PALT_6 = \{(x_2, x_3)\}$$

B. Reglas de dirección DR.

1. Parámetros de dirección.

	$(\tilde{p}_i^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_i^{lk}(sl_{val}))$	$(\tilde{p}_c^{lk}(ml_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(ml_{val}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{pos}), \tilde{p}_c^{lk}(sl_{val}))$
\tilde{p}_3^{23}	(7, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_4^{21}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(5, 0.33, 7, 0.32)
\tilde{p}_4^{24}	(7, 0.86, 6, 0.71)	(4, 0.65, 3, 0.27)
\tilde{p}_6^{23}	(0, 1, 1, 0.67)	(0, 0.47, 1, 0.35)
\tilde{p}_7^{21}	(7, 1, *)	(5, 0.33, 7, 0.32)
\tilde{p}_7^{23}	(0, 1, *)	(0, 0.47, 1, 0.35)

Tabla 3.12: Parámetros de dirección

2. Aplicación de las reglas de dirección.

- Según la regla DR1, los expertos han de decrementar las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$p_3^{23} = a_7 \rightarrow a_6 \quad p_7^{21} = a_7 \rightarrow a_6$$

$$p_4^{21} = b_5 \rightarrow b_4$$

$$p_4^{24} = b_5 \rightarrow b_4$$

- Según la excepción Excp 1), los expertos no modificarán las preferencias:

$$p_6^{23}, p_7^{23}$$

3.4.4. Cuarta ronda de consenso

1. Modificación de las preferencias.

Los expertos e_3, e_4, e_6 y e_7 modifican las preferencias recomendadas en la tercera ronda:

$$P_{e_3} = \begin{pmatrix} - & a_0 & a_4 & a_4 \\ a_5 & - & \mathbf{a_6} & a_4 \\ a_4 & a_2 & - & a_2 \\ a_4 & a_5 & a_6 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_4} = \begin{pmatrix} - & b_0 & b_3 & b_4 \\ \mathbf{b_4} & - & b_1 & \mathbf{b_4} \\ b_3 & b_4 & - & b_2 \\ b_0 & b_2 & b_4 & - \end{pmatrix}$$

$$P_{e_6} = \begin{pmatrix} - & c_2 & c_2 & c_2 \\ c_2 & - & c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 & - & c_3 \\ c_3 & c_3 & c_1 & - \end{pmatrix} \quad P_{e_7} = \begin{pmatrix} - & a_0 & a_3 & a_6 \\ \mathbf{a_6} & - & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_7 & - & a_4 \\ a_0 & a_4 & a_3 & - \end{pmatrix}$$

2. Cálculo de los grados de consenso

1. *Cálculo de los valores centrales:* No han cambiado respecto a los calculados en la primera ronda.

2. *Matrices de similaridad:*

Se calculan de nuevo las matrices de similaridad para cada par de expertos tal y como se muestra en la ronda primera.

3. *Matriz de consenso.*

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.65 & 0.83 & 0.81 \\ 0.72 & - & 0.69 & 0.85 \\ 0.81 & 0.73 & - & 0.76 \\ 0.67 & 0.8 & 0.8 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso:*

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} :*

$$\begin{aligned} cp^{12} &= 0.65 & cp^{13} &= 0.83 & cp^{14} &= 0.81 \\ cp^{21} &= 0.72 & cp^{23} &= 0.69 & cp^{24} &= 0.85 \\ cp^{31} &= 0.81 & cp^{32} &= 0.73 & cp^{34} &= 0.76 \\ cp^{41} &= 0.67 & cp^{42} &= 0.8 & cp^{43} &= 0.8 \end{aligned}$$

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El grado de consenso al nivel de alternativas es:

$$ca^1 = 0.76 \quad ca^2 = 0.75 \quad ca^3 = 0.77 \quad ca^4 = 0.76$$

Se puede comprobar como ha mejorado el grado de consenso de la alternativa 2 a raíz de los cambios propuestos en la anterior ronda pasando de 0.71 a 0.75.

Level 3. *Consenso sobre las relaciones o consenso total, cr .* El grado de consenso total en la cuarta ronda es:

$$cr = 0.759$$

3. Control del consenso

El grado de consenso en la cuarta ronda ha superado el umbral de consenso que se fijó al inicio del proceso, $cr = 0.759 > \gamma = 0.75$. Por tanto el SAC indica que se ha alcanzado el consenso buscado y pone fin al proceso de consenso.

A partir de este momento ya se puede llevar a cabo el proceso de selección de alternativas tomando como punto de partida las preferencias de los expertos tal y como han quedado tras el proceso de consenso.

Capítulo 4

Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo

El intento de mejorar y optimizar la automatización de los procesos de consenso ha dado como resultado la propuesta de un nuevo modelo de sistema de apoyo al consenso al que hemos denominado modelo de SAC Adaptativo. En este modelo se adapta el proceso búsqueda del consenso al nivel de acuerdo existente en cada ronda de consenso.

Comenzaremos este capítulo presentando las propuestas de mejora del modelo de sistema de apoyo al consenso. A continuación y tomando como base el modelo presentado en el Capítulo 3, aplicaremos estas mejoras para optimizar el proceso de consenso en problemas de TDG en contextos lingüísticos multigranulares. Finalmente aplicando el modelo de SAC Adaptativo resolveremos el problema planteado en el capítulo anterior con el propósito de establecer una comparación entre los resultados obtenidos por ambos modelos.

4.1. Fundamentos del Modelo de SAC Adaptativo

Como ha quedado de manifiesto en el Capítulo 2, han sido varios los autores que han tratado en sus investigaciones los procesos de búsqueda de consenso [20, 77, 89, 106, 143, 176]. Prácticamente todos ellos han definido mecanismos, medidas y operadores para evaluar el consenso desde diferentes puntos de vista y para diferentes contextos. Sin embargo, en todas estas investigaciones, consideramos que hay una cuestión que no ha sido tratada suficientemente como es la optimización de los procesos de consenso. En este capítulo abordamos esta cuestión y proponemos optimizar el proceso de consenso adaptando el número de preferencias a cambiar al nivel de acuerdo conseguido en cada ronda de consenso.

En cualquier problema de decisión en el que participan varios expertos, inicialmente las preferencias de los expertos suelen ser bastante diferentes y por tanto el grado de consenso bajo. En esta situación es lógico pensar que el moderador (en nuestro caso el modelo de consenso) recomendará hacer muchos cambios con el propósito de acercar las opiniones. Asumiendo que los expertos siguen las recomendaciones del modelo, conforme se van desarrollando las diferentes rondas de consenso, el grado de consenso se irá incrementando y el número de cambios reduciendo, consiguiéndose finalmente alcanzar el acuerdo deseado. Esta idea es la que está recogida en los modelos presentes en la literatura así como en el presentado en el Capítulo 3 para tratar el caso concreto de problemas con información lingüística multigranular.

Todos estos modelos tienen en común que siempre llevan a cabo la misma secuencia de operaciones independientemente del nivel de acuerdo existente, lo que ha llevado a plantearnos la siguiente interrogante, ¿el patrón de funcionamiento

de un proceso de consenso debe ser siempre el mismo?. Parece lógico pensar que las operaciones que se realicen para buscar el consenso han de depender del nivel de acuerdo existente en cada ronda. Esto significa que el proceso de búsqueda del consenso ha de cambiar conforme el grado de consenso vaya mejorando. Esta idea es la que hemos intentado recoger proponiendo un nuevo modelo de sistema de apoyo al consenso, denominado modelo de SAC Adaptativo. Este modelo se comportará de forma diferente según el grado de consenso alcanzado en cada una de las rondas que componen el proceso de consenso. De este modo, en aquellas rondas en las que el grado de consenso se considere bajo, esto indicará que el acuerdo está aún muy lejano y propondremos que todos los expertos cambien todas las preferencias en las que no hay consenso. Por el contrario, cuando el grado de consenso haya mejorado pero sin ser aún lo suficientemente alto para finalizar el proceso de consenso, propondremos que sólo los expertos más discrepantes cambien las preferencias en las que no haya suficiente acuerdo.

El hecho de utilizar diferentes criterios para buscar las preferencias a cambiar puede interpretarse como una optimización del proceso de consenso con el cual se consiguen tres objetivos:

- Aumentar la velocidad de convergencia hacia el nivel de acuerdo buscado.
- Reducir el número de rondas necesarias para alcanzarlo.
- Disminuir el número de cambios de preferencias en las rondas finales del proceso de consenso.

El nuevo modelo se caracteriza por proponer tres procesos diferentes para llevar a cabo la búsqueda de las preferencias que el sistema recomendará cambiar a los expertos. La ejecución de cada uno de estos procesos dependerá del grado de

consenso alcanzado en cada una de las rondas de consenso y devolverá un conjunto diferente de preferencias.

La descripción básica de estos tres procesos es la siguiente:

- a) Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está muy lejano. Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso es bajo. Identifica los pares de alternativas en los que no hay suficiente consenso y recomienda a todos los expertos que los cambien.
- b) Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está lejano. Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso toma un valor que se considera intermedio. Identifica las alternativas y pares de alternativas pertenecientes a estas alternativas en las que no hay suficiente consenso. Recomienda que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en dichas alternativas se encuentren más alejados de la opinión colectiva del grupo de expertos.
- c) Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está próximo. Se lleva a cabo en situaciones en las que el grado de consenso es alto y está cercano al umbral de consenso buscado. Identifica las alternativas y pares de alternativas en las que no hay suficiente consenso y recomienda que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esas alternativas y pares concretos se encuentren más alejados de la opinión colectiva.

Cada uno de estos procesos realiza un análisis del consenso desde un punto de vista diferente, vinculándolo a los tres niveles de representación de la información en las relaciones de preferencia, de forma que:

- Cuando el acuerdo esté muy lejano, se analizará el consenso a nivel de pares de alternativas.

- Cuando el acuerdo esté lejano, se analizará el consenso a nivel de alternativas.
- Cuando el acuerdo esté próximo, se analizará el consenso a nivel de expertos.

Antes de finalizar este apartado y dar paso a los siguientes en los que se comentan detalladamente el funcionamiento y objetivos de cada proceso, cabe destacar que esta propuesta de modelo de SAC Adaptativo puede ser aplicada en cualquier problema de TDG en el que los expertos proporcionen sus opiniones por medio de relaciones de preferencia, independientemente del dominio de información en el que expresen sus preferencias y siempre que utilicen las medidas de consenso apropiadas a cada contexto de definición del problema.

4.1.1. Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está muy lejano

Al comienzo de un proceso de consenso, en la primera o primeras rondas del mismo, las preferencias de los expertos suelen ser bastante diferentes y por lo tanto el consenso está aún muy lejano. En esta situación el nivel de acuerdo es bajo y será necesario que los expertos modifiquen muchas de sus opiniones para intentar aproximarlas. En el contexto en el que estamos trabajando esta situación se traduce en recomendar a los expertos que modifiquen muchas de sus preferencias con el propósito de acercarlas entre sí y así mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda de consenso.

Llegado a este punto nos debemos plantear qué expertos han de cambiar sus preferencias. En el modelo presentado en el capítulo anterior se propone que un tanto por ciento de los expertos más alejados cambien sus preferencias. En esta nueva propuesta se recomienda que cuando se considere que el acuerdo está muy lejano, “*todos*” los expertos han de cambiar sus preferencias iniciales. Antes de

continuar nos gustaría profundizar un poco más en esta idea que ya fue presentada en la Sección 2.1 dedicada a los procesos de consenso. El término consenso debería implicar que ninguno de los expertos rechace la solución propuesta por considerar que sus preferencias u opiniones no han sido escuchadas ni tenidas en cuenta. Para conseguirlo es necesario que todos los expertos modifiquen sus posiciones iniciales y tiendan a aproximar sus preferencias. Si el proceso de consenso no se desarrolla de esta forma y sólo algunos de ellos cambian sus preferencias, estos podrían considerar que están siendo forzados a la búsqueda del consenso y rechazar por este motivo la solución propuesta. Esta forma de proceder es conocida en la literatura como “Tiranía de la Mayoría” y consiste en imponer consciente o inconscientemente las preferencias de un grupo mayoritario de expertos al resto de miembros del grupo, haciéndoles a estos tender hacia las opiniones del grupo mayoritario. En estos casos pensamos que se estaría haciendo un uso incorrecto del término consenso coincidiendo en esta idea con las manifestadas por Saint y Lawson en [143]. Sin querer extendernos demasiado en estas reflexiones y teniendo en cuenta que también podría darse el caso contrario de la imposición de la opinión de las minorías, en este modelo proponemos una solución más razonable. Esta consiste en recomendar que todos los expertos cambien sus preferencias cuando el grado de consenso sea bajo y por lo tanto el acuerdo esté muy lejano. Conforme el grado de consenso vaya mejorando se irá seleccionando y por lo tanto reduciendo el número de expertos que deberán cambiar sus preferencias.

Volviendo sobre las preferencias a cambiar, hemos destacado que se pretende llevar a cabo un número elevado de cambios. Para conseguirlo proponemos que todos los expertos cambien todos los pares de alternativas (x_l, x_k) en los que no se alcance suficiente consenso.

Ambas ideas se muestran de forma gráfica en la Figura 4.1.

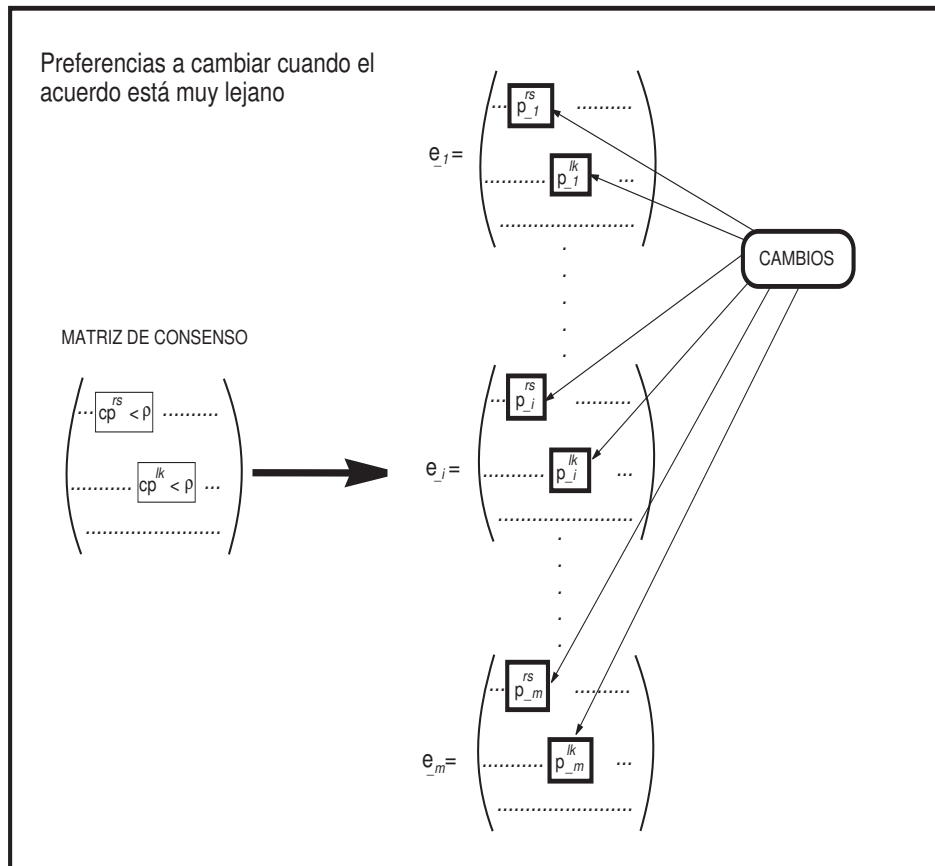


Figura 4.1: Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está muy lejano

Definido el umbral de consenso ρ que representa el valor mínimo que ha de alcanzar el consenso a nivel de pares de alternativas para ser considerado como suficiente, se identifican las preferencias en la matriz de consenso presentada en el Capítulo 3 cuyo grado de consenso es inferior a ρ , $cp^{lk} < \rho$. A continuación se recomendará a todos los expertos $\{e_1, \dots, e_m\}$ cambiar las preferencias dadas sobre esos pares. De esta forma se consigue que en situaciones en las que el nivel de acuerdo es muy bajo, todos los expertos cambien todas las preferencias en las que no hay acuerdo, generándose por lo tanto un número elevado de cambios.

4.1.2. Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está lejano

Tras la primera/s ronda/s de consenso y asumiendo que los expertos han realizado los numerosos cambios propuestos por el anterior proceso, cabe esperar que el nivel de acuerdo haya mejorado. En esta situación, las preferencias de los expertos se encuentran ahora más próximas y de ahí que parezca lógico reducir tanto el número de expertos como el número de preferencias a modificar de aquí en adelante. Este nuevo proceso se lleva a cabo en situaciones en las que el nivel de acuerdo ha mejorado pero se considera que el consenso está aún lejano. Supone un cambio en la estrategia seguida para buscar las preferencias y expertos a cambiar, añadiendo dos nuevas restricciones que afectan a la selección de preferencias y expertos a modificar:

- a) Preferencias. En el proceso anterior se propone cambiar todos los pares de alternativas en los que no existe un consenso suficiente. Ahora nos centraremos exclusivamente en las alternativas en las que no hay acuerdo y dentro de estas en los pares en los que el consenso es insuficiente.
- b) Expertos. En el proceso anterior se propone que cambien todos los expertos, ahora proponemos cambiar sólo los expertos más alejados a nivel de alternativas, es decir, aquellos expertos cuya proximidad a nivel de alternativas es menor que un umbral de proximidad específico β_1^l ,

$$\{e_i \mid pa_i^l < \beta_1^l, \beta_1^l \in [0, 1], i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

La descripción gráfica del proceso se muestra en la Figura 4.2.

¹ El parámetro β_1^l representa un umbral de proximidad a nivel de alternativas utilizado para seleccionar los expertos más alejados y dependerá del problema en cuestión que se esté resolviendo en cada momento.

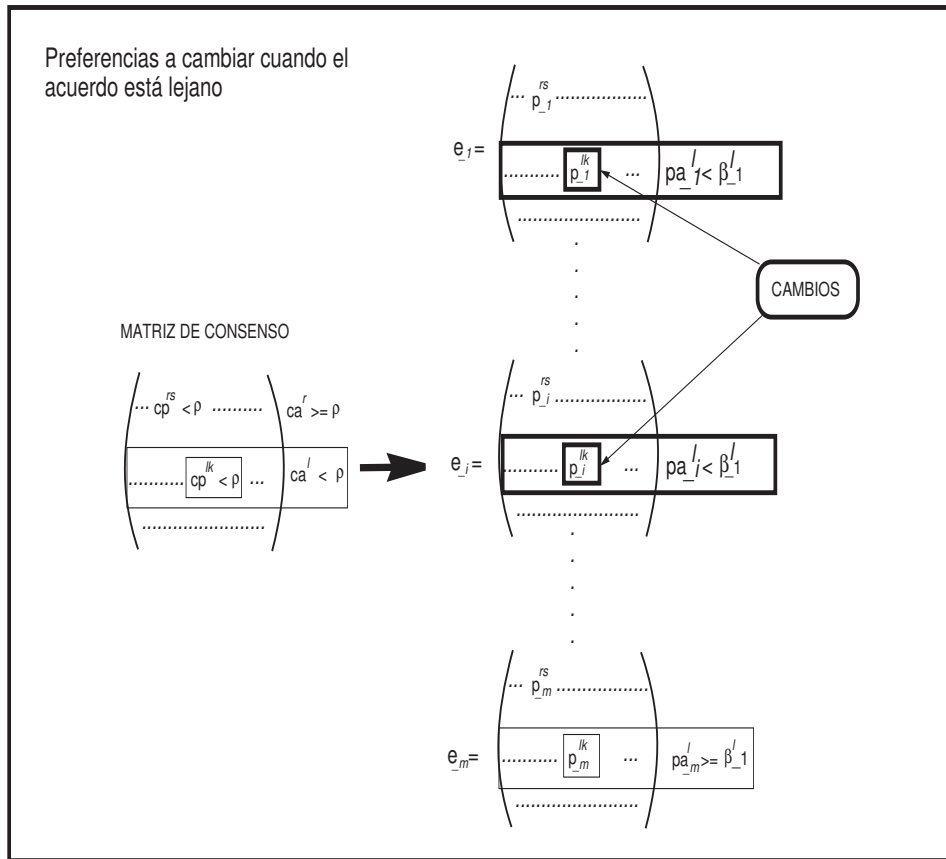


Figura 4.2: Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está lejano

Como puede observarse descartamos cambiar aquellos pares que pertenezcan a alternativas en las que existe suficiente consenso, centrándonos en aquellas preferencias en las que tanto a nivel de alternativas como de pares no hay suficiente consenso, $cp^{lk} < \rho$ y $ca^l < \rho$. Respecto al número de expertos, sólo los expertos más alejados en las alternativas en las que no hay consenso son los que deben cambiar sus preferencias, $pa_i^l < \beta_1^l$. Como puede comprobarse, ambas restricciones producen una disminución importante en el número final de cambios propuestos, cumpliéndose uno de los objetivos planteados inicialmente de reducir el número de cambios de preferencias conforme el grado de consenso va aumentando.

4.1.3. Proceso de búsqueda de preferencias a cambiar cuando el acuerdo está próximo

En las últimas rondas, si el proceso de consenso se va desarrollando correctamente, un número pequeño de cambios puede conseguir que se alcance el consenso deseado. En esta situación podemos considerar que el acuerdo está próximo y proponemos cambiar de nuevo la estrategia para buscar e identificar las preferencias y expertos a cambiar.

El propósito de este proceso es buscar sólo las preferencias más discrepantes. De esta forma y considerando que el consenso está muy próximo, con unos pocos cambios se consigue alcanzar el consenso buscado.

La descripción gráfica del funcionamiento del proceso se muestra en la Figura 4.3.

En el proceso anterior, cuando el consenso está lejano, se propone cambiar las preferencias en las que no existe suficiente acuerdo de los expertos más alejados a nivel de alternativas. Ahora, en este proceso, se añade una nueva restricción a las restricciones anteriores con el fin de seleccionar sólo aquellos expertos que además de ser los más lejanos a nivel de alternativas también lo sean a nivel de pares, es decir que $pa_i^l < \beta_1^l$ y $pp_i^{lk} < \beta_2^{lk}$. Al igual que β_1^l , el parámetro β_2^{lk} también es un umbral de proximidad utilizado para seleccionar los expertos más alejados a nivel de pares de alternativa. Con esta restricción se consigue refinar aún más el proceso de búsqueda de preferencias a cambiar identificando de forma muy precisa las preferencias que entorpecen la consecución del consenso.

En la Figura 4.3 es sencillo comprobar como el número de preferencias que recomienda modificar este proceso es inferior al recomendado por los dos procesos anteriores.

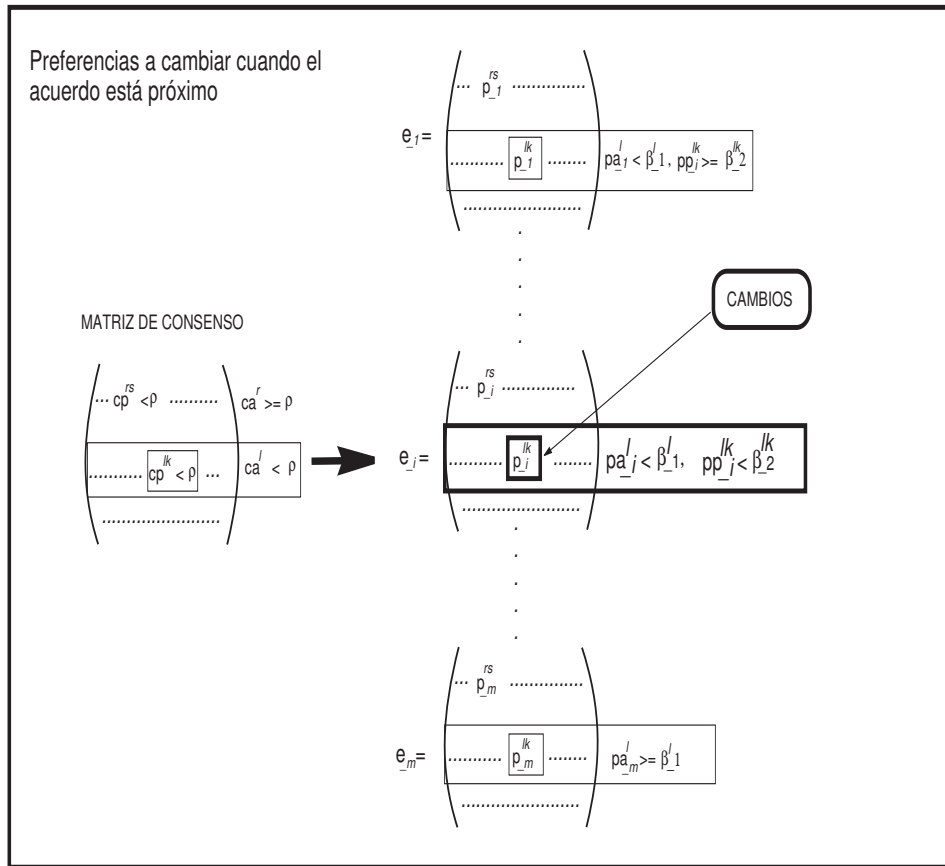


Figura 4.3: Preferencias a cambiar cuando el acuerdo está próximo

4.2. Modelo de SAC Adaptativo para Problemas de TDG definidos en Contextos Lingüísticos Multigranulares

Como ya hemos comentado anteriormente, el propósito del modelo de SAC Adaptativo es optimizar el proceso de consenso en problemas de TDG definidos en cualquier dominio, de ahí que lo hayamos utilizado para perfeccionar el modelo de SAC presentado en el Capítulo 3 y así mejorar su comportamiento en contextos lingüísticos multigranulares. La optimización se consigue mejorando el ritmo de

convergencia hacia el consenso y reduciendo el número de rondas necesarias para alcanzar el consenso. También se consigue reducir el número de cambios de preferencias cuando el acuerdo está próximo, tal y como se comprobará en el ejemplo presentado en la sección 4.3.

El nuevo modelo está compuesto por las cuatro fases que se muestran en la Figura 4.4.

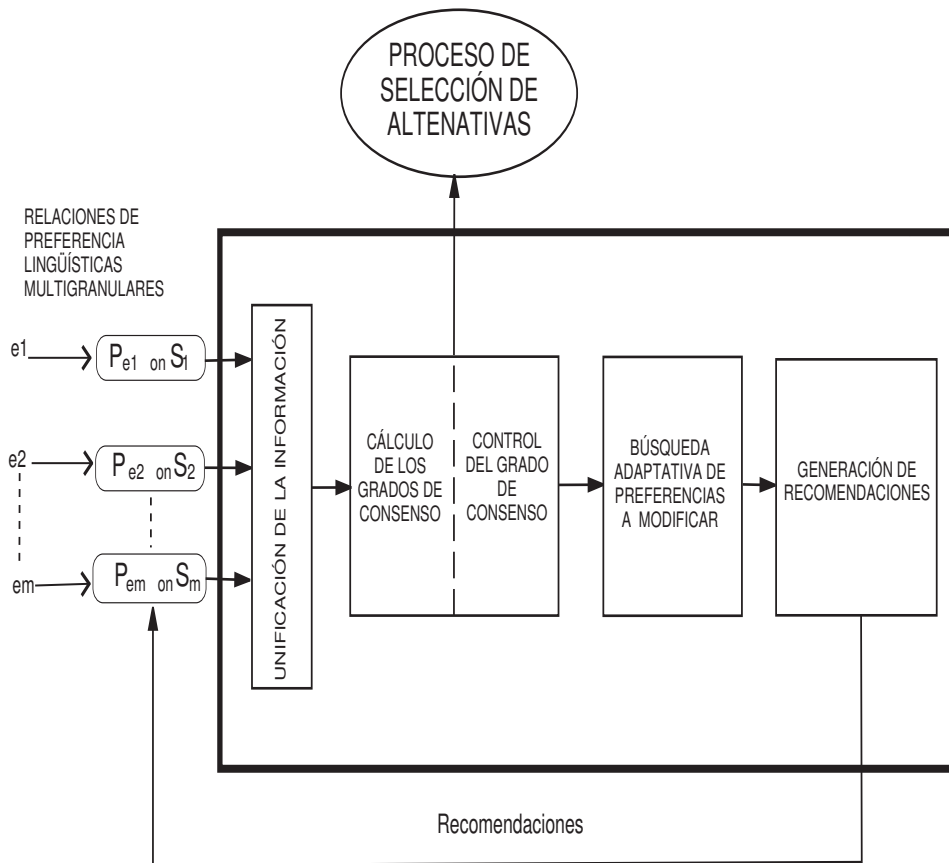


Figura 4.4: Modelo de SAC Adaptativo para problemas de TDG con información lingüística multigranular

Algunas de las fases son muy similares a las presentadas en el modelo anterior y por lo tanto apenas les dedicaremos atención. El resto son diferentes y serán explicadas con detalle en los siguientes apartados.

4.2.1. Unificación de la información

Dado un conjunto de expertos

$$E = \{e_1, \dots, e_m\},$$

un conjunto de alternativas

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

y un conjunto de relaciones de preferencia

$$\{P_{e_1}, \dots, P_{e_m}\}$$

utilizadas por los expertos para expresar sus preferencias sobre X utilizando conjuntos de términos lingüísticos

$$S_i = \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_{g_i}^i\}$$

caracterizadas por su granularidad

$$\#(S_i) = g_i + 1,$$

en esta fase se lleva a cabo la unificación de los S_i en un único dominio normalizado al que hemos denominado conjunto básico de términos lingüísticos S_T . Las operaciones que se llevan a cabo en esta fase son prácticamente idénticas a las realizadas en el modelo anterior (ver Sección 3.3.1).

De forma resumida este conjunto de operaciones se agrupan en dos principales:

1. Elección del conjunto de términos lingüísticos más apropiado que hará la función de S_T .

2. Transformación de todos los términos lingüísticos pertenecientes a los diferentes S_i en conjuntos difusos definidos sobre S_T . Para realizar esta operación se definen diferentes funciones de transformación $\tau_{S_i S_T}(\cdot)$ que transforman cada preferencia lingüística p_i^{lk} en un conjunto difuso \tilde{p}_i^{lk} definido sobre $S_T = \{c_0, \dots, c_g\}$:

$$\tilde{p}_i^{lk} = \tau_{S_i S_T}(p_i^{lk}) = \{(c_h, \alpha_{ih}^{lk}) \mid h = 0, \dots, g\}$$

$$\alpha_{ih}^{lk} = \max_y \min\{\mu_{p_i^{lk}}(y), \mu_{c_h}(y)\}$$

donde al menos $\exists \alpha_{ih}^{lk} > 0$ y $\forall \alpha_{ih}^{lk} \in [0, 1]$.

A partir de esta transformación las relaciones de preferencia serán consideradas como matrices de conjuntos difusos:

$$\tilde{P}_{e_i} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_{i0}^{11}, \dots, \alpha_{ig}^{11}) & \cdots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_{i0}^{1n}, \dots, \alpha_{ig}^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_{i0}^{n1}, \dots, \alpha_{ig}^{n1}) & \cdots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_{i0}^{nn}, \dots, \alpha_{ig}^{nn}) \end{pmatrix}$$

4.2.2. Cálculo de los grados de consenso y control del grado de consenso

En esta fase se llevan a cabo dos operaciones principales:

1. Cálculo de los grados de consenso. El modelo realiza todas las operaciones necesarias para calcular las medidas de consenso presentadas en la Sección 3.3.2.
2. Control del grado de consenso. El modelo controla y decide si el proceso de consenso debe terminar o continuar. Para ello utiliza el umbral de consenso

γ acordado previamente por los expertos y el grado de consenso a nivel de relaciones cr obtenido en el punto anterior conforme a las siguientes condiciones:

- Si $cr \geq \gamma$, esto significa que los expertos han alcanzado el grado de acuerdo suficiente para finalizar el proceso de consenso y dar paso al proceso de selección de alternativas.
- Si $cr < \gamma$, esto significa que el acuerdo no es todavía lo suficientemente alto para finalizar el proceso de consenso, continuando por la siguiente fase del modelo.

Al igual que en el modelo anterior, aquí también se evita un posible bucle infinito en el caso de que no se llegue a alcanzar nunca el grado de consenso deseado, utilizando el parámetro *Max_rondas* para limitar el número de rondas máximo a llevar a cabo.

4.2.3. Búsqueda adaptativa de preferencias a modificar

Esta fase es la que imprime el carácter adaptativo al modelo al adaptar el proceso de búsqueda de las preferencias a cambiar al grado de consenso existente en cada ronda de consenso. Si el grado de consenso es bajo significa que existen bastantes discrepancias entre las preferencias de los expertos y por lo tanto estos deberán acometer muchos cambios para acercar sus opiniones. Sin embargo, si el grado de consenso es alto significa que existe bastante coincidencia entre las sus preferencias y por lo tanto sólo los expertos más discrepantes deberán cambiar sus opiniones.

La idea de disminuir el número de cambios conforme el nivel de acuerdo se va incrementado la hemos recogido desarrollando tres procedimientos diferentes para

buscar las preferencias a modificar (PBp). Estos tres procedimientos desarrollan las ideas propuestas en los tres procesos descritos en Sección 4.1. Cada PBp se ejecutará dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda.

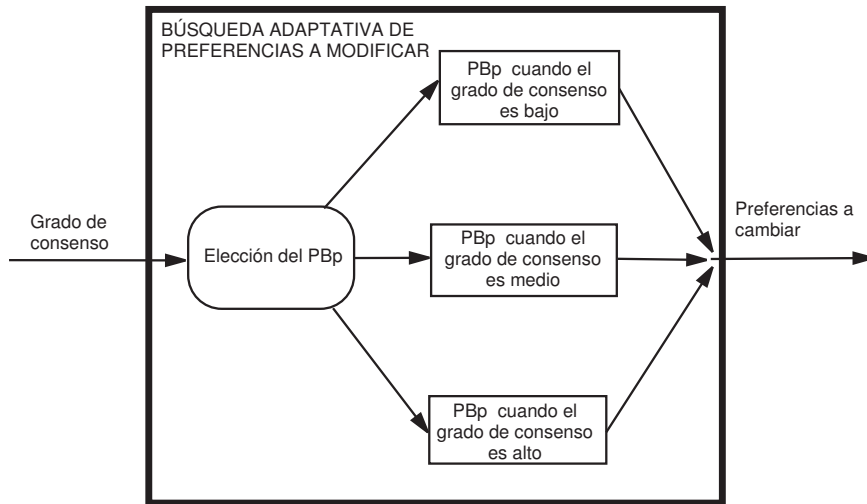


Figura 4.5: Búsqueda adaptativa de preferencias

Las operaciones de esta fase se agrupan en dos tareas principales (Figura 4.5):

- 1) Elección del PBp más apropiado. El modelo de SAC Adaptativo establece una serie de condiciones en las que se tiene en cuenta el grado de consenso general alcanzado en la ronda actual cr y dos umbrales de consenso θ_1 y θ_2 utilizados para diferenciar tres posibles situaciones en las que se encuentra el acuerdo: muy lejano, lejano y próximo.

El algoritmo que implementa estas condiciones se muestra en la Tabla 4.1.

Los umbrales de consenso θ_1, θ_2 son acordados por los expertos y dependerán del tipo de problema que se esté abordando.

- 2) Ejecución del PBp. Según el grado de consenso cr el modelo recomendará ejecutar uno de los tres PBps. Cada PBp analiza el consenso desde un punto de

```

INPUTS:
     $cr, \theta_1, \theta_2$ 
BEGIN
    IF  $cr \leq \theta_1$ 
    THEN
        Ejecutar PBp cuando el grado de consenso es bajo
    ELSE
        IF  $cr \leq \theta_2$ 
        THEN
            Ejecutar PBp cuando el grado de consenso es medio
        ELSE
            Ejecutar PBp cuando el grado de consenso es alto
        END-IF
    END-IF
END

```

Tabla 4.1: Algoritmo para la selección del PBp.

vista diferente:

- El *PBp cuando el grado de consenso es bajo* analiza el consenso desde el punto de vista de los pares de alternativas.
- El *PBp cuando el grado de consenso es medio* analiza el consenso desde el punto de vista de las alternativas.
- El *PBp cuando el grado de consenso es alto* analiza el consenso desde el punto de vista de las relaciones de preferencia de los expertos.

Además, para cada experto i , cada PBp devuelve un conjunto diferente de preferencias a cambiar a los que llamaremos respectivamente $PREFECH_i^B$, $PREFECH_i^M$ y $PREFECH_i^A$.

El modelo recomendará cambiar las preferencias contenidas en estos conjuntos sugiriendo la dirección en la que se han de hacer los cambios para conseguir aproximar las preferencias y aumentar el acuerdo en la siguiente ronda de consenso.

En los siguientes subapartados se describen las características y el funcionamiento de cada uno de estos procedimientos.

4.2.3.1 PBp cuando el grado de consenso es bajo

El modelo de SAC Adaptativo lleva a cabo este procedimiento en situaciones en las que el grado de consenso es considerado como bajo y el acuerdo está aún muy lejano, es decir,

$$cr \leq \theta_1$$

El propósito de este procedimiento es identificar los pares de alternativas (x_l, x_k) en los que existe menor grado de consenso y proponer que todos los expertos cambien dichos pares. El resultado de este procedimiento es el conjunto de preferencias que cada experto i deberá cambiar en la siguiente ronda de consenso y que representaremos como $PREFECH_i^B$.

Las características principales de este procedimiento se recogen en la siguiente tabla:

Grado de Consenso	Foco de atención	Expertos afectados por los cambios
Bajo	Pares de alternativas	Todos los expertos

Para buscar las preferencias a cambiar este procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. A partir de la matriz de consenso CM ,

$$CM = \begin{pmatrix} cm^{11} & \dots & cm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cm^{n1} & \dots & cm^{nn} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que,

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \quad \wedge \quad l \neq k$$

se identifican todos los pares de alternativas (x_l, x_k) en los que el grado de consenso es menor que un determinado umbral de consenso ρ definido a nivel de pares, dando origen al conjunto P :

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \rho, l, k = 1, \dots, n\}.$$

El valor de este umbral ρ puede ser estático y fijado antes de comenzar el proceso de consenso o bien dinámico y que se vaya actualizando y adaptando al nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda. Si se opta por la primera opción es necesario prestar mucha atención al valor que se le asigne porque un valor demasiado alto puede implicar que los expertos tengan que cambiar todas sus preferencias mientras que un valor demasiado bajo puede implicar no hacer apenas cambios, situaciones ambas no deseables. Nosotros hemos decidido utilizar un valor dinámico que vaya cambiando durante el proceso de consenso de forma que recomiende cambiar aproximadamente la mitad de las preferencias de los expertos. Para conseguirlo hemos considerado como umbral de consenso la media aritmética del consenso a nivel de pares de alternativas, $\rho = \bar{cp}$, quedando el conjunto P como sigue:

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \bar{cp}, l, k = 1, \dots, n\}.$$

2. Se obtiene el conjunto de preferencias que el sistema recomendará cambiar a todos los expertos $e_i \in E$:

$$PREFECH_i^B = \{(l, k) \mid (l, k) \in P\}, \quad \forall e_i \in E.$$

4.2.3.2 PBp cuando el grado de consenso es medio

El modelo propone ejecutar este procedimiento en situaciones en las que el acuerdo está todavía lejano y el grado de consenso ha alcanzado un valor inter-

medio, es decir,

$$\theta_1 < cr \leq \theta_2.$$

Antes de llegar a esta situación podemos suponer que ya se han realizado una o varias rondas de consenso en la que todos los expertos han cambiado sus preferencias y han acercado sus opiniones.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas x_l y pares de alternativas (x_l, x_k) pertenecientes a estas alternativas en las que no hay suficiente consenso y proponer que sean cambiadas sólo por los expertos cuyas proximidades en esas alternativas sean inferiores.

El resultado de este procedimiento es el conjunto de preferencias que cada experto i deberá cambiar en la siguiente ronda de consenso y que representaremos como $PREFECH_i^M$.

Utilizando la misma tabla que en el procedimiento anterior, las características principales de este procedimiento son:

Grado de Consenso	Foco de atención	Expertos afectados por los cambios
Medio	Alternativas	Expertos más alejados en las alternativas en desacuerdo

Para identificar las preferencias a cambiar el procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. A partir de la matriz de consenso CM ,

$$CM = \begin{pmatrix} cm^{11} & \cdots & cm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cm^{n1} & \cdots & cm^{nn} \end{pmatrix}$$

se obtiene todos los grados de consenso a nivel de pares de alternativas

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \quad \wedge \quad l \neq k$$

y se calculan los grados de consenso a nivel de alternativas:

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1}$$

2. Se identifican las alternativas en las que grado de consenso es menor que el umbral de consenso. Al igual que en el procedimiento anterior, el umbral puede ser un valor fijo o un valor dinámico. En este caso también hemos optado por utilizar un umbral dinámico asignándole el valor medio del grado de consenso a nivel de alternativas, \bar{ca} , definiendo el conjunto de alternativas a cambiar como:

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \bar{ca}\}.$$

3. Se identifican los pares pertenecientes a estas alternativas en las que no hay consenso,

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \bar{cp}\}.$$

4. Utilizando la matriz de proximidad de cada experto PM_i ,

$$PM_i = \begin{pmatrix} pm^{11} & \cdots & pm^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pm^{n1} & \cdots & pm^{nn} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que la proximidad a nivel de pares coincide con la posición (l, k) de PM_i ,

$$pp_i^{lk} = pm_i^{lk}, \quad \forall l, k = 1, \dots, n \quad \wedge \quad l \neq k.$$

se calcula la proximidad de cada experto a nivel de alternativas de las alternativas en las que no hay consenso,

$$\{pa_i^l \mid pa_i^l = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^n pp_i^{lk}}{n-1}, \quad l \in X^{ch}\}, \quad \forall e_i \in E.$$

5. Se calcula el umbral de proximidad β_1^l que utilizará el sistema para seleccionar los expertos que han de cambiar sus preferencias. Se seleccionará a aquellos expertos que en las alternativas en las que no hay suficiente consenso se encuentren más alejados que el resto. Para ello se asigna a β_1^l el valor medio de la proximidad en las alternativas en las que no hay consenso,

$$\{\beta_1^l = \bar{pa}^l \mid \bar{pa}^l = \frac{\sum_{i=1}^m pa_i^l}{m}, \quad l \in X^{ch}\}.$$

6. Finalmente, para cada experto i que cumpla que su proximidad en la alternativa x_l es menor que la media de las proximidades en esa alternativa, $pa_i^l < \bar{pa}^l$, el modelo obtiene el conjunto de preferencias que dicho experto deberá cambiar:

$$PREFECH_i^M = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \bar{pa}^l\}.$$

Teniendo en cuenta las nuevas restricciones que afectan al número de preferencias y número de expertos a cambiar, es fácil comprobar que $|\bigcup_i PREFECH_i^M| \leq |\bigcup_i PREFECH_i^B|$, siendo $|\bigcup_i PREFECH_i^M|$ y $|\bigcup_i PREFECH_i^B|$ la cardinalidad del conjunto obtenido después de la unión de todos los conjuntos de preferencias individuales.

4.2.3.3 PBp cuando el grado de consenso es alto

Este procedimiento se ejecuta en situaciones en las que el acuerdo está próximo y por lo tanto el grado de consenso está cercano al umbral de consenso γ considerado para que el modelo finalice el proceso de consenso, es decir,

$$\theta_2 < cr < \gamma.$$

Llegado este momento, un número relativamente pequeño de cambios de opinión puede hacer que se alcance el consenso en la siguiente ronda. Esto se consigue añadiendo una nueva restricción a las ya existentes en el procedimiento anterior cuyo resultado es la reducción del número de expertos que han de cambiar sus preferencias.

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas x_l y pares de alternativas (x_l, x_k) en los que no existe suficiente consenso y proponer que sean cambiados sólo por aquellos expertos que en esos pares se encuentren más alejados.

Las características de este procedimiento quedarían recogidas en la siguiente tabla:

Grado de Consenso	Foco de atención	Expertos afectados por los cambios
Alto	Expertos	Expertos más alejados en pares y alternativas en desacuerdo

Para conseguir su propósito lleva a cabo los siguientes pasos:

1. Realiza las mismas operaciones numeradas del 1-5 descritas en el PBp cuando el grado de consenso es medio.
2. Calcula el umbral de proximidad β_2^{lk} utilizado para seleccionar los expertos más alejados en los pares de alternativas en las que no hay consenso. Para ello asigna a β_2^{lk} el valor medio de la proximidad de cada uno de estos pares,

$$\{\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk} \mid \overline{pp}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m pp_i^{lk}}{m}, (l, k) \in P\}.$$

3. Utilizando como umbrales de proximidad los valores $\beta_1^l = \overline{pa}^l$ y $\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk}$, el procedimiento recomendará que cambien sus preferencias aquellos expertos cuya proximidad a nivel de alternativas y a nivel de pares en los que no hay consenso sea inferior a la media, es decir,

$$pa_i^l < \overline{pa}^l \quad y \quad pp_i^{lk} < \overline{pp}^{lk}.$$

Para cada uno de estos expertos obtiene el conjunto de preferencias a cambiar $PREFECH_i^A$,

$$PREFECH_i^A = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \overline{pa}^l \wedge pp_i^{lk} < \overline{pp}^{lk}\}.$$

Con esta nueva condición se puede comprobar que $|\bigcup_i PREFECH_i^A| \leq |\bigcup_i PREFECH_i^M|$, y dado que $|\bigcup_i PREFECH_i^M| \leq |\bigcup_i PREFECH_i^B|$, se puede concluir asumiendo que nuestra propuesta de modelo de SAC Adaptativo adapta su funcionamiento al grado de consenso existente en cada momento, reduciendo el número de cambios conforme el grado de consenso va aumentando.

4.2.4. Generación de recomendaciones

Para conseguir que en cada nueva ronda de consenso el acuerdo entre los expertos sea mayor y el número de cambios a realizar por los expertos menor, es

necesario que estos cambien sus preferencias más alejadas en la dirección correcta. En caso contrario, si los cambios se realizan de forma arbitraria, el modelo de SAC Adaptativo no puede garantizar que el grado de consenso mejore.

En el modelo presentado en el Capítulo 3 se propone un sistema de recomendaciones orientado (Sección 3.3.4) que utiliza un conjunto de reglas y parámetros de dirección para resolver esta cuestión. En la práctica se ha podido comprobar que el sistema de recomendaciones funciona satisfactoriamente aunque presenta ciertas excepciones que sin ser muy frecuentes es posible que aparezcan. El tratamiento de estas excepciones se ha explicado en la página 145 de esta memoria.

Cuando nos planteamos diseñar un nuevo modelo para optimizar los procesos de consenso, también nos planteamos intentar resolver los problemas o excepciones detectadas en el sistema de recomendaciones orientado. Tras un estudio y análisis de las circunstancias en las que se producían las excepciones, intentamos mejorarlo introduciendo nuevos parámetros que tuviesen en cuenta las etiquetas vecinas más significativas, pero los resultados no fueron satisfactorios y por el contrario complicaron el sistema al añadir nuevas reglas. Esto nos llevo a plantear un nuevo mecanismo de recomendaciones que evitase estas excepciones.

Al igual que su predecesor, el nuevo mecanismo contemplado en la fase de generación de recomendaciones tiene como propósito generar una serie de recomendaciones en las que se sugiere a los expertos la dirección en la que han de cambiar las preferencias obtenidas por los PBps, con el objetivo de aproximar las preferencias más alejadas y así mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda.

Antes de continuar, recordar que las preferencias de los expertos han sido transformadas en conjuntos difusos sobre S_T :

$$\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_0^{lk}, \dots, \alpha_g^{lk})$$

y que agregando todas las preferencias individuales,

$$\tilde{p}_c^{lk} = \psi(\tilde{p}_1^{lk}, \dots, \tilde{p}_m^{lk})$$

se obtienen las preferencias colectivas \tilde{p}_c^{lk} que representan la opinión del grupo de expertos.

El proceso de aproximación consiste en acercar las preferencias individuales más alejadas a las preferencias colectivas. Para ello se necesita conocer la posición actual de ambas preferencias. Estas posiciones se obtienen calculando los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. Tal y como comentamos en la Sección 3.3.2, el valor central se define como la posición o el centro de gravedad de la información contenida en el conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ y se calcula como:

$$cv(\tilde{p}_i^{lk}) = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}},$$

donde $index(s_h^i) = h$.

Una vez conocidas las posiciones de las preferencias individuales y colectivas, ya es posible definir un conjunto de reglas que permitan identificar la dirección en las que se han de cambiar las preferencias individuales para aproximarlas a las colectivas.

4.2.4.1 Reglas de Dirección.

Las reglas de dirección comparan los valores centrales de los conjuntos difusos que representan las preferencias individuales y colectivas. El resultado de esta comparación será recomendar incrementar o decrementar las valoraciones individuales dadas por los expertos para acercarlas a las valoraciones colectivas.

Proponemos tres reglas de dirección que se aplicarán sobre los conjuntos de preferencias a modificar devueltos por los PBps:

DR.1. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) < 0$, el experto i debería incrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.2. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) > 0$, el experto i debería decrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.3. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) = 0$, el experto i no modificará la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

4.3. Ejemplo de Aplicación del Modelo de SAC Adaptativo

En el Capítulo 3 se ha visto el funcionamiento del modelo de consenso en un problema de toma de decisión real relacionado con la distribución por parte de una cadena de supermercados de una determinada marca de vinos entre cuatro posibles marcas:

- x_1 , Marqués de Cáceres, Denominación de Origen Rioja.
- x_2 , Los Molinos, Denominación de Origen Valdepeñas.
- x_3 , Viña Mayor, Denominación de Origen Ribera del Duero.
- x_4 , René Barbier, Denominación de Origen Penedés.

En esta sección se volverá a reproducir el proceso de consenso sobre el mismo problema pero aplicando el modelo de SAC Adaptativo presentado a lo largo de este capítulo.

Con el propósito de comprobar las mejoras que la nueva propuesta aporta al proceso de consenso, se realizarán numerosas comparaciones entre los resultados

obtenidos por ambos modelos en las distintas fases del proceso. Del mismo modo, al final de este capítulo, en la Tabla 4.6 se mostrarán de forma resumida los resultados devueltos por ambos modelo.

Para que la comparativa tenga sentido, se parte de las mismas opiniones de los expertos utilizadas en el Capítulo 3 y expresadas mediante relaciones de preferencia:

$$\begin{aligned}
 P_{e_1} &= \begin{pmatrix} - & c_0 & c_0 & c_2 \\ c_4 & - & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_0 & - & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_3 & - \end{pmatrix} & P_{e_2} &= \begin{pmatrix} - & c_2 & c_0 & c_4 \\ c_1 & - & c_1 & c_1 \\ c_3 & c_3 & - & c_1 \\ c_0 & c_4 & c_3 & - \end{pmatrix} \\
 P_{e_3} &= \begin{pmatrix} - & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_5 & - & a_8 & a_4 \\ a_4 & a_1 & - & a_2 \\ a_5 & a_5 & a_7 & - \end{pmatrix} & P_{e_4} &= \begin{pmatrix} - & b_0 & b_4 & b_5 \\ b_6 & - & b_1 & b_6 \\ b_3 & b_4 & - & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_4 & - \end{pmatrix} \\
 P_{e_5} &= \begin{pmatrix} - & b_4 & b_1 & b_6 \\ b_2 & - & b_3 & b_2 \\ b_4 & b_3 & - & b_2 \\ b_0 & b_5 & b_3 & - \end{pmatrix} & P_{e_6} &= \begin{pmatrix} - & c_2 & c_3 & c_1 \\ c_2 & - & c_0 & c_1 \\ c_0 & c_4 & - & c_4 \\ c_4 & c_4 & c_0 & - \end{pmatrix} \\
 P_{e_7} &= \begin{pmatrix} - & a_0 & a_3 & a_7 \\ a_8 & - & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_8 & - & a_5 \\ a_1 & a_4 & a_3 & - \end{pmatrix} & P_{e_8} &= \begin{pmatrix} - & b_6 & b_1 & b_3 \\ b_0 & - & b_0 & b_5 \\ b_6 & b_6 & - & b_5 \\ b_4 & b_1 & b_0 & - \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Antes de poner en marcha el modelo es necesario fijar los valores de los siguientes parámetros:

- El umbral de consenso mínimo deseado para dar por finalizado el proceso de consenso, $\gamma = 0.75$.
- Respecto a los dos umbrales de consenso θ_1 y θ_2 utilizados para diferenciar las tres situaciones de consenso, se considera que el grado de consenso es bajo si cr es inferior a $\theta_1 = 0.65$, medio si es inferior a $\theta_2 = 0.72$ y alto en caso contrario.
- Número máximo de rondas de consenso a llevar a cabo, $Max_rondas = 10$.

4.3.1. Primera ronda de consenso

1. Unificación de la información

En primer lugar se elige el conjunto de términos lingüísticos básicos S_T más apropiado conforme a las condiciones descritas en el apartado 3.3.1 y a continuación se aplican las funciones de transformación $\{\tau_{AS_T}, \tau_{BS_T}, \tau_{CS_T}\}$ para realizar la unificación, obteniendo para cada término lingüístico el conjunto difuso sobre S_T que se muestra en la Tabla 4.2.

τ_{AS_T} :	τ_{BS_T} :	τ_{CS_T} :
$a_0 \mapsto (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_0 \mapsto (1, 0.57, 0.14, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_0 \mapsto (1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$a_1 \mapsto (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_1 \mapsto (0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0, 0, 0, 0, 0)$	$c_1 \mapsto (0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)$
$a_2 \mapsto (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_2 \mapsto (0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43, 0, 0, 0, 0)$	$c_2 \mapsto (0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)$
$a_3 \mapsto (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$b_3 \mapsto (0, 0, 0.14, 0.57, 1, 0.57, 0.14, 0, 0)$	$c_3 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)$
$a_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$b_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0)$	$c_4 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)$
$a_5 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$b_5 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43)$	
$a_6 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$	$b_6 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.14, 0.57, 1)$	
$a_7 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$		
$a_8 \mapsto (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$		

Tabla 4.2: Conjuntos difusos obtenidos tras el proceso de unificación

2. Cálculo de los grados de consenso y control del proceso de consenso

El modelo calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia. Este último es utilizado para controlar si se

ha alcanzado el nivel de consenso suficiente para finalizar el proceso de consenso.

2.1 Cálculo de los grado de consenso

Para calcular los diferentes grados de consenso seguiremos el mismo proceso utilizado en el modelo anterior:

1. *Cálculo de los valores centrales:* Se calcula el valor central de todas las etiquetas lingüísticas utilizadas por los expertos para expresar sus preferencias (Tablas 4.3, 4.4, 4.5):

A	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
a_0	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0
a_1	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	1
a_2	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2
a_3	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	3
a_4	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	4
a_5	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	5
a_6	(, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	6
a_7	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)	7
a_8	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	8

Tabla 4.3: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos A.

2. *Matrices de similitud:*

Se calcula una matriz de similitud para cada par de expertos utilizando la función de similitud $s(\cdot)$ presentada en 3.2. Los valores de estas matrices representan la similitud entre las preferencias de cada experto respecto al resto de expertos:

B	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
b_0	(1, 0.57, 0.14, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0.5
b_1	(0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0, 0, 0, 0, 0)	1.38
b_2	(0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43, 0, 0, 0, 0)	2.63
b_3	(0, 0, 0.14, 0.57, 1, 0.57, 0.14, 0, 0)	4
b_4	(0, 0, 0, 0, 0.43, 0.86, 0.71, 0.29, 0)	5.38
b_5	(0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0.71, 0.86, 0.43)	6.63
b_6	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.14, 0.57, 1)	7.5

Tabla 4.4: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos B.

C	\tilde{p}	$cv(\tilde{p})$
c_0	(1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	0.67
c_1	(0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0, 0, 0)	2.02
c_2	(0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33, 0, 0)	4.02
c_3	(0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33)	6.02
c_4	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1)	7.34

Tabla 4.5: Etiquetas lingüísticas, conjuntos difusos y valores centrales del conjunto de términos lingüísticos C.

$$\begin{aligned}
 SM_{12} &= \begin{pmatrix} - & 0.58 & 1 & 0.58 \\ 0.33 & - & 0.5 & 0.33 \\ 1 & 0.33 & - & 1 \\ 0.58 & 0.33 & 1 & - \end{pmatrix} & SM_{13} &= \begin{pmatrix} - & 0.96 & 0.58 & 0.88 \\ 0.71 & - & 0.75 & 0.58 \\ 0.75 & 0.96 & - & 1 \\ 0.88 & 0.63 & 0.88 & - \end{pmatrix} \\
 SM_{14} &= \begin{pmatrix} - & 0.98 & 0.41 & 0.67 \\ 0.98 & - & 0.42 & 0.98 \\ 0.75 & 0.41 & - & 0.92 \\ 0.56 & 0.92 & 0.92 & - \end{pmatrix} & SM_{15} &= \begin{pmatrix} - & 0.41 & 0.91 & 0.56 \\ 0.41 & - & 0.75 & 0.41 \\ 0.92 & 0.58 & - & 0.92 \\ 0.56 & 0.42 & 0.75 & - \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$SM_{16} = \begin{pmatrix} - & 0.58 & 0.33 & 0.75 \\ 0.58 & - & 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & 0.17 & - & 0.33 \\ 0.58 & 0.33 & 0.33 & - \end{pmatrix} \quad SM_{17} = \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.71 & 0.63 \\ 0.92 & - & 0.25 & 0.58 \\ 0.75 & 0.08 & - & 0.63 \\ 0.63 & 0.75 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{18} = \begin{pmatrix} - & 0.15 & 0.91 & 1 \\ 0.15 & - & 0.31 & 0.91 \\ 0.81 & 0.15 & - & 0.42 \\ 0.83 & 0.92 & 0.31 & - \end{pmatrix} \quad SM_{23} = \begin{pmatrix} - & 0.63 & 0.58 & 0.46 \\ 0.63 & - & 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.38 & - & 1 \\ 0.46 & 0.71 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{24} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.41 & 0.91 \\ 0.31 & - & 0.92 & 0.31 \\ 0.75 & 0.92 & - & 0.92 \\ 0.98 & 0.26 & 0.92 & - \end{pmatrix} \quad SM_{25} = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.91 & 0.98 \\ 0.92 & - & 0.75 & 0.92 \\ 0.92 & 0.75 & - & 0.92 \\ 0.98 & 0.91 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{26} = \begin{pmatrix} - & 1 & 0.33 & 0.33 \\ 0.75 & - & 0.83 & 1 \\ 0.33 & 0.83 & - & 0.33 \\ 0.17 & 1 & 0.33 & - \end{pmatrix} \quad SM_{27} = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.71 & 0.96 \\ 0.25 & - & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.63 \\ 0.96 & 0.58 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{28} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.91 & 0.58 \\ 0.81 & - & 0.81 & 0.42 \\ 0.81 & 0.81 & - & 0.42 \\ 0.41 & 0.26 & 0.31 & - \end{pmatrix} \quad SM_{34} = \begin{pmatrix} - & 0.94 & 0.83 & 0.55 \\ 0.69 & - & 0.17 & 0.56 \\ 1 & 0.45 & - & 0.92 \\ 0.44 & 0.55 & 0.80 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{35} = \begin{pmatrix} - & 0.45 & 0.67 & 0.44 \\ 0.7 & - & 0.5 & 0.83 \\ 0.83 & 0.63 & - & 0.92 \\ 0.44 & 0.8 & 0.63 & - \end{pmatrix} \quad SM_{36} = \begin{pmatrix} - & 0.63 & 0.75 & 0.88 \\ 0.88 & - & 0.08 & 0.75 \\ 0.58 & 0.21 & - & 0.33 \\ 0.71 & 0.71 & 0.21 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{37} = \begin{pmatrix} - & 0.88 & 0.88 & 0.5 \\ 0.63 & - & 0 & 1 \\ 1 & 0.13 & - & 0.63 \\ 0.5 & 0.88 & 0.5 & - \end{pmatrix} \quad SM_{38} = \begin{pmatrix} - & 0.19 & 0.67 & 0.88 \\ 0.44 & - & 0.06 & 0.67 \\ 0.56 & 0.19 & - & 0.42 \\ 0.95 & 0.55 & 0.19 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{45} = \begin{pmatrix} - & 0.39 & 0.5 & 0.89 \\ 0.39 & - & 0.67 & 0.39 \\ 0.83 & 0.83 & - & 1 \\ 1 & 0.34 & 0.83 & - \end{pmatrix} \quad SM_{46} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.92 & 0.42 \\ 0.56 & - & 0.91 & 0.31 \\ 0.58 & 0.76 & - & 0.41 \\ 0.15 & 0.26 & 0.41 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{47} = \begin{pmatrix} - & 0.94 & 0.7 & 0.95 \\ 0.94 & - & 0.83 & 0.56 \\ 1 & 0.67 & - & 0.7 \\ 0.94 & 0.67 & 0.7 & - \end{pmatrix} \quad SM_{48} = \begin{pmatrix} - & 0.13 & 0.5 & 0.67 \\ 0.13 & - & 0.89 & 0.89 \\ 0.56 & 0.73 & - & 0.5 \\ 0.39 & 1 & 0.39 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{56} = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.42 & 0.31 \\ 0.83 & - & 0.58 & 0.92 \\ 0.41 & 0.58 & - & 0.41 \\ 0.15 & 0.91 & 0.58 & - \end{pmatrix} \quad SM_{57} = \begin{pmatrix} - & 0.33 & 0.8 & 0.94 \\ 0.33 & - & 0.5 & 0.83 \\ 0.83 & 0.5 & - & 0.7 \\ 0.94 & 0.67 & 0.88 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{58} = \begin{pmatrix} - & 0.73 & 1 & 0.56 \\ 0.73 & - & 0.56 & 0.5 \\ 0.73 & 0.56 & - & 0.5 \\ 0.39 & 0.34 & 0.56 & - \end{pmatrix} \quad SM_{67} = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.63 & 0.38 \\ 0.5 & - & 0.92 & 0.75 \\ 0.58 & 0.92 & - & 0.71 \\ 0.21 & 0.58 & 0.71 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{68} = \begin{pmatrix} - & 0.56 & 0.42 & 0.75 \\ 0.56 & - & 0.98 & 0.42 \\ 0.15 & 0.98 & - & 0.91 \\ 0.76 & 0.26 & 0.98 & - \end{pmatrix} \quad SM_{78} = \begin{pmatrix} - & 0.06 & 0.8 & 0.63 \\ 0.06 & - & 0.94 & 0.67 \\ 0.56 & 0.94 & - & 0.8 \\ 0.45 & 0.67 & 0.69 & - \end{pmatrix}$$

3. *Matriz de consenso.*

La matriz de consenso se obtiene agregando a nivel de pares de alternativas el conjunto de matrices de similaridad calculadas previamente. Como operador de agregación, se utiliza la media aritmética. Esta matriz representa el consenso existente entre los expertos en cada ronda. Es utilizada por el modelo para obtener las diferentes medidas de consenso.

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.6 & 0.69 & 0.68 \\ 0.58 & - & 0.58 & 0.66 \\ 0.71 & 0.58 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.61 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso.* Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .* El grado de consenso en cada par de alternativas (x_l, x_k) coincide con las posiciones (l, k) de la matriz de consenso CM .

$$\begin{aligned} cp^{12} &= 0.6 & cp^{13} &= 0.69 & cp^{14} &= 0.68 \\ cp^{21} &= 0.58 & cp^{23} &= 0.58 & cp^{24} &= 0.66 \\ cp^{31} &= 0.71 & cp^{32} &= 0.58 & cp^{34} &= 0.69 \\ cp^{41} &= 0.61 & cp^{42} &= 0.61 & cp^{43} &= 0.63 \end{aligned}$$

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El consenso a nivel de alternativas se obtiene como la media aritmética de todos los pares pertenecientes a cada alternativa:

$$ca^1 = 0.65 \quad ca^2 = 0.6 \quad ca^3 = 0.66 \quad ca^4 = 0.62$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones o consenso total, cr .* Este valor mide el grado de consenso actual alcanzado por los expertos y se obtiene como la media aritmética del consenso evaluado a nivel de alternativas. En esta primera ronda el grado de consenso general es:

$$cr = 0.634$$

Observación: Como era de esperar el grado de consenso en la primera ronda es el mismo en ambos modelos puesto que las preferencias iniciales dadas por los expertos son iguales.

2.2 Control del proceso de consenso

El sistema lleva a cabo el control del grado de consenso alcanzado comparando el grado de consenso general $cr = 0.634$ con el umbral de consenso $\gamma = 0.75$.

Como $cr < \gamma$, no se ha alcanzado el acuerdo suficiente para dar por terminado el proceso, debiendo continuar el modelo por la siguiente fase.

3. Búsqueda adaptativa de preferencias a modificar

En esta fase el modelo procede a buscar las preferencias que recomendará cambiar a cada experto. Esta búsqueda e identificación de preferencias se realiza ejecutando uno de los tres posibles procedimientos de búsqueda de preferencias a modificar. La elección del procedimiento depende del grado de consenso alcanzado en esta primera ronda.

3.1 Elección del PBp más apropiado

Teniendo en cuenta el algoritmo descrito en 4.1 y que el grado de consenso a nivel de relaciones, $cr = 0.634 \leq \theta_1 = 0.65$, el modelo adaptativo considera que el nivel de acuerdo alcanzado en esta primera ronda es bajo y que el acuerdo

está muy lejano, recomendando ejecutar el PBp para situaciones en las que el grado de consenso es bajo.

3.2 Ejecución del PBp cuando el grado de consenso es bajo

El objetivo de este procedimiento es identificar los pares de alternativas (x_l, x_k) en los que el consenso no es suficiente y recomendar que todos los expertos los cambien. Para hacer esto el modelo realiza las operaciones descritas en este procedimiento:

1. Identificación de las preferencias en los que no existe suficiente consenso. A partir de la matriz de consenso

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.6 & 0.69 & 0.68 \\ 0.58 & - & 0.58 & 0.66 \\ 0.71 & 0.58 & - & 0.69 \\ 0.61 & 0.61 & 0.63 & - \end{pmatrix}$$

se identifican los pares tal que:

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \overline{cp}^{lk}, l, k = 1, \dots, n\}$$

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < 0.634^*\}$$

$$P = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

(*) Aclarar que el valor medio del consenso a nivel de pares de alternativas coincide con el valor del consenso a nivel de relaciones $cr = 0.634$

2. Definición de los conjuntos de preferencias a cambiar por cada experto i .

$$PREFECH_i^B = \{(l, k) \mid (l, k) \in P\}, \quad \forall e_i \in E.$$

En este caso se obtienen los siguientes conjuntos de preferencias:

$$PREFECH_1^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_2^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_3^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_4^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_5^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_6^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_7^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$PREFECH_8^L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

4. Generación de recomendaciones

En esta fase el modelo recomienda la dirección que deben seguir los expertos a la hora de modificar sus preferencias en la segunda ronda de consenso. Dado que el modelo puede calcular los valores centrales de las preferencias individuales y colectivas, ya está en disposición de aplicar las reglas de dirección. Por tanto:

- Según la regla DR1, los expertos han de **incrementar** las valoraciones dadas a las preferencias:

$$\begin{array}{ll}
 p_1^{12} = c_0 \rightarrow c_1 & p_5^{41} = b_0 \rightarrow b_1 \\
 p_1^{32} = c_0 \rightarrow c_1 & p_5^{43} = b_3 \rightarrow b_4 \\
 p_1^{42} = c_1 \rightarrow c_2 & p_6^{21} = c_2 \rightarrow c_3 \\
 p_2^{21} = c_1 \rightarrow c_2 & p_6^{23} = c_0 \rightarrow c_1 \\
 p_2^{23} = c_1 \rightarrow c_2 & p_6^{43} = c_0 \rightarrow c_1 \\
 p_2^{41} = c_0 \rightarrow c_1 & p_7^{12} = a_0 \rightarrow a_1 \\
 p_3^{12} = a_4 \rightarrow a_5 & p_7^{23} = a_0 \rightarrow a_1 \\
 p_3^{32} = a_1 \rightarrow a_2 & p_7^{41} = a_1 \rightarrow a_2 \\
 p_4^{12} = b_0 \rightarrow b_1 & p_7^{42} = a_4 \rightarrow a_5 \\
 p_4^{23} = b_1 \rightarrow b_2 & p_7^{43} = a_3 \rightarrow a_4 \\
 p_4^{41} = b_0 \rightarrow b_1 & p_8^{21} = b_0 \rightarrow b_1 \\
 p_4^{42} = b_1 \rightarrow b_2 & p_8^{23} = b_0 \rightarrow b_1 \\
 p_5^{21} = b_2 \rightarrow b_3 & p_8^{42} = b_1 \rightarrow b_2 \\
 p_5^{32} = b_3 \rightarrow b_4 & p_8^{43} = b_0 \rightarrow b_1
 \end{array}$$

- Según la regla DR2, los expertos han de **decrementar** las valoraciones dadas

a las preferencias:

$$\begin{array}{ll}
 p_1^{21} = c_4 \rightarrow c_3 & p_4^{32} = b_4 \rightarrow b_3 \\
 p_1^{23} = c_4 \rightarrow c_3 & p_4^{43} = b_4 \rightarrow b_3 \\
 p_1^{41} = c_2 \rightarrow c_1 & p_5^{12} = b_4 \rightarrow b_3 \\
 p_1^{43} = c_3 \rightarrow c_2 & p_5^{23} = b_3 \rightarrow b_2 \\
 p_2^{12} = c_2 \rightarrow c_1 & p_5^{42} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 p_2^{32} = c_3 \rightarrow c_2 & p_6^{12} = c_2 \rightarrow c_1 \\
 p_2^{42} = c_4 \rightarrow c_3 & p_6^{32} = c_4 \rightarrow c_3 \\
 p_2^{43} = c_3 \rightarrow c_2 & p_6^{41} = c_4 \rightarrow c_3 \\
 p_3^{21} = a_5 \rightarrow a_4 & p_6^{42} = c_4 \rightarrow c_3 \\
 p_3^{23} = a_8 \rightarrow a_7 & p_7^{21} = a_8 \rightarrow a_7 \\
 p_3^{41} = a_5 \rightarrow a_4 & p_7^{32} = a_8 \rightarrow a_7 \\
 p_3^{42} = a_5 \rightarrow a_4 & p_8^{12} = b_6 \rightarrow b_5 \\
 p_3^{43} = a_7 \rightarrow a_6 & p_8^{32} = b_6 \rightarrow b_5 \\
 p_4^{21} = b_6 \rightarrow b_5 & p_8^{41} = b_4 \rightarrow b_3
 \end{array}$$

4.3.2. Segunda ronda de consenso

1. Modificación de las preferencias.

Todos los expertos cambiarán sus preferencias siguiendo las recomendaciones anteriores sugeridas por el modelo, dando comienzo a la segunda ronda de consenso. Las nuevas preferencias aparecen resaltadas en negrita:

$$\begin{aligned}
P_{e_1} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{c}_1 & c_0 & c_2 \\ \mathbf{c}_3 & - & \mathbf{c}_2 & c_4 \\ c_3 & \mathbf{c}_1 & - & c_1 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 & - \end{pmatrix} & P_{e_2} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{c}_1 & c_0 & c_4 \\ \mathbf{c}_2 & - & \mathbf{c}_2 & c_1 \\ c_2 & \mathbf{c}_3 & - & c_1 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_2 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_3} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{a}_2 & a_4 & a_3 \\ \mathbf{a}_4 & - & \mathbf{a}_7 & a_4 \\ a_4 & \mathbf{a}_2 & - & a_2 \\ \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_6 & - \end{pmatrix} & P_{e_4} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{b}_1 & b_4 & b_5 \\ \mathbf{b}_5 & - & \mathbf{b}_2 & b_6 \\ b_3 & \mathbf{b}_3 & - & b_2 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_5} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{b}_3 & b_1 & b_6 \\ \mathbf{b}_3 & - & \mathbf{b}_2 & b_2 \\ b_4 & \mathbf{b}_4 & - & b_2 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_4 & - \end{pmatrix} & P_{e_6} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{c}_1 & c_3 & c_1 \\ \mathbf{c}_3 & - & \mathbf{c}_1 & c_1 \\ c_0 & \mathbf{c}_3 & - & c_4 \\ \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_1 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_7} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{a}_1 & a_3 & a_7 \\ \mathbf{a}_7 & - & \mathbf{a}_1 & a_4 \\ a_4 & \mathbf{a}_7 & - & a_5 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 & - \end{pmatrix} & P_{e_8} &= \begin{pmatrix} - & \mathbf{b}_5 & b_1 & b_3 \\ \mathbf{b}_1 & - & \mathbf{b}_1 & b_5 \\ b_6 & \mathbf{b}_5 & - & b_5 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & - \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Cálculo de los grados de consenso y control del proceso de consenso

2.1 Cálculo de los grado de consenso

1. *Cálculo de los valores centrales:* No han cambiado respecto a los calculados en la primera ronda.

2. *Matrices de similaridad:*

Se calculan de nuevo las matrices de similaridad para cada par de expertos. Debido a que el proceso es idéntico al realizado en la primera ronda, no han sido incluidas para no extender demasiado el ejemplo.

3. Matriz de consenso.

La matriz de consenso obtenida en la segunda ronda es:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.77 & 0.69 & 0.68 \\ 0.73 & - & 0.73 & 0.66 \\ 0.72 & 0.71 & - & 0.69 \\ 0.77 & 0.8 & 0.78 & - \end{pmatrix}$$

4. Cálculo de los grados de consenso. Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .* El grado de consenso en cada par de alternativas (x_l, x_k) es:

$$\begin{array}{lll} cp^{12} = 0.77 & cp^{13} = 0.69 & cp^{14} = 0.68 \\ cp^{21} = 0.73 & cp^{23} = 0.73 & cp^{24} = 0.66 \\ cp^{31} = 0.72 & cp^{32} = 0.71 & cp^{34} = 0.69 \\ cp^{41} = 0.77 & cp^{42} = 0.8 & cp^{43} = 0.78 \end{array}$$

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El grado de consenso en cada alternativa es:

$$ca^1 = 0.71 \quad ca^2 = 0.7 \quad ca^3 = 0.71 \quad ca^4 = 0.78$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones, cr .* El grado de consenso general o total alcanzado en la segunda ronda es:

$$cr = 0.73$$

Observación: Comparado el cr alcanzado en la segunda ronda entre ambos modelos, se puede comprobar como el $cr = 0.73$ del modelo de SAC Adaptativo mejora el $cr = 0.703$ obtenido por el modelo anterior. Este incremento en el grado de consenso ya nos hace intuir que el acuerdo deseado se puede alcanzar en un número de rondas inferior a las llevadas a cabo en el Capítulo 3.

2.2 Control del grado de consenso

Aunque el incremento del grado de consenso es considerable todavía no alcanza el umbral fijado inicialmente $\gamma = 0.75$ para finalizar el proceso de consenso, por lo que el proceso debe continuar con la siguiente fase.

3. Búsqueda adaptativa de preferencias a modificar

3.1 Elección del PBp más apropiado

Dado que $cr = 0.73 \geq \theta_2 = 0.72$, el modelo considera que el nivel de acuerdo alcanzado en la segunda ronda es alto y que el acuerdo está próximo. Bajo estas circunstancias recomienda ejecutar el PBp para situaciones en las que el grado de consenso es alto.

3.2 Ejecución del PBp cuando el grado de consenso es alto

El propósito de este procedimiento es identificar las alternativas y pares de alternativas en las que no hay suficiente consenso y proponer que las cambien sólo aquellos expertos que en esos pares concretos se encuentren más alejados. De esta forma se consigue que con pocos cambios se alcance el nivel de acuerdo buscado. Para hacer esto el sistema realiza las operaciones descritas en este procedimiento:

1. Cálculo de los grados de consenso a nivel de alternativas. A partir de la matriz de consenso

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.77 & 0.69 & 0.68 \\ 0.73 & - & 0.73 & 0.66 \\ 0.72 & 0.71 & - & 0.69 \\ 0.77 & 0.8 & 0.78 & - \end{pmatrix}$$

se calculan los grados de consenso a nivel de alternativas:

$$ca^1 = 0.71 \quad ca^2 = 0.7 \quad ca^3 = 0.71 \quad ca^4 = 0.78$$

2. Identificación de las alternativas en las que no existe suficiente consenso.

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \bar{ca}^l\}$$

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < 0.73^*\} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

(*)El valor medio del consenso a nivel de alternativas coincide con el valor del consenso a nivel de relaciones $cr = 0.73$

3. Identificación de los pares de alternativas pertenecientes a X^{ch} en los que tampoco existe suficiente consenso.

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \bar{cp}^{lk}\}$$

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < 0.73\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}.$$

4. Cálculo de la proximidad de las alternativas que pertenecen a X^{ch} para cada uno de los expertos. Para ello necesitamos calcular las matrices de proximidad de cada experto:

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & 0.91 & 0.72 & 0.89 \\ 0.85 & - & 0.87 & 0.61 \\ 0.81 & 0.64 & - & 0.8 \\ 0.89 & 0.93 & 0.95 & - \end{pmatrix} \quad PM_2 = \begin{pmatrix} - & 0.91 & 0.72 & 0.69 \\ 0.9 & - & 0.87 & 0.72 \\ 0.94 & 0.86 & - & 0.8 \\ 0.89 & 0.82 & 0.95 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_3 = \begin{pmatrix} - & 0.91 & 0.86 & 0.76 \\ 0.9 & - & 0.5 & 0.97 \\ 0.94 & 0.64 & - & 0.8 \\ 0.86 & 0.93 & 0.7 & - \end{pmatrix} \quad PM_4 = \begin{pmatrix} - & 0.83 & 0.69 & 0.78 \\ 0.78 & - & 0.96 & 0.59 \\ 0.94 & 0.89 & - & 0.88 \\ 0.81 & 0.76 & 0.95 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_5 = \begin{pmatrix} - & 0.84 & 0.81 & 0.67 \\ 0.9 & - & 0.96 & 0.8 \\ 0.89 & 0.94 & - & 0.88 \\ 0.81 & 0.9 & 0.78 & - \end{pmatrix} \quad PM_6 = \begin{pmatrix} - & 0.91 & 0.61 & 0.64 \\ 0.85 & - & 0.88 & 0.72 \\ 0.52 & 0.86 & - & 0.53 \\ 0.61 & 0.82 & 0.8 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_7 = \begin{pmatrix} - & 0.78 & 0.99 & 0.74 \\ 0.73 & - & 0.75 & 0.97 \\ 0.94 & 0.74 & - & 0.83 \\ 0.89 & 0.94 & 0.95 & - \end{pmatrix} \quad PM_8 = \begin{pmatrix} - & 0.51 & 0.81 & 0.89 \\ 0.57 & - & 0.8 & 0.7 \\ 0.63 & 0.78 & - & 0.62 \\ 0.86 & 0.76 & 0.72 & - \end{pmatrix}$$

A partir de estos valores se calcula la proximidad de cada alternativa:

x_1	x_2	x_3
$pa_1^1 = 0.84$	$pa_1^2 = 0.78$	$pa_1^3 = 0.75$
$pa_2^1 = 0.77$	$pa_2^2 = 0.83$	$pa_2^3 = 0.87$
$pa_3^1 = 0.85$	$pa_3^2 = 0.79$	$pa_3^3 = 0.79$
$pa_4^1 = 0.77$	$pa_4^2 = 0.77$	$pa_4^3 = 0.9$
$pa_5^1 = 0.77$	$pa_5^2 = 0.88$	$pa_5^3 = 0.9$
$pa_6^1 = 0.72$	$pa_6^2 = 0.82$	$pa_6^3 = 0.64$
$pa_7^1 = 0.84$	$pa_7^2 = 0.82$	$pa_7^3 = 0.83$
$pa_8^1 = 0.74$	$pa_8^2 = 0.69$	$pa_8^3 = 0.68$

5. Cálculo del umbral de proximidad β_1^l utilizado para seleccionar a nivel de cada alternativa x_l a los expertos más alejados.

$$\{\beta_1^l = \overline{pa}^l \mid \overline{pa}^l = \frac{\sum_{i=1}^m pa_i^l}{m}, l \in X^{ch}\}$$

$$\overline{pa}^1 = 0.79 \quad \overline{pa}^2 = 0.8 \quad \overline{pa}^3 = 0.79$$

6. Cálculo del umbral de proximidad β_2^{lk} utilizado para seleccionar a nivel de pares de alternativas los expertos más alejados y por lo tanto los que deben cambiar sus preferencias. A partir de las matrices individuales de proximidad PM_i , se calculan la media aritmética de la proximidad de cada par de alternativas (x_l, x_k) ,

$$\{\beta_2^{lk} = \overline{pp}^{lk} \mid \overline{pp}^{lk} = \frac{\sum_{i=1}^m pp_i^{lk}}{m}, (l, k) \in P\}$$

obteniendo los siguientes valores:

$$\overline{pp}^{12} = 0.83 \quad \overline{pp}^{13} = 0.78 \quad \overline{pp}^{14} = 0.76$$

$$\overline{pp}^{21} = 0.81 \quad \overline{pp}^{23} = 0.82 \quad \overline{pp}^{24} = 0.76$$

$$\overline{pp}^{31} = 0.82 \quad \overline{pp}^{32} = 0.79 \quad \overline{pp}^{34} = 0.62$$

$$\overline{pp}^{41} = 0.83 \quad \overline{pp}^{42} = 0.86 \quad \overline{pp}^{43} = 0.85$$

7. Definición de los conjuntos de preferencias a cambiar por cada experto,

$$PREFECH_i^A = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \overline{pa}^l \wedge pp_i^{lk} < \overline{pp}^{lk}\}$$

obteniendo los conjuntos de preferencias:

$$PREFECH_1^A = \{(2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$PREFECH_2^A = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

$$PREFECH_3^A = \{(3, 2)\}$$

$$PREFECH_4^A = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

$$PREFECH_5^A = \{(1, 4)\}$$

$$PREFECH_6^A = \{(1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$PREFECH_7^A = \{\text{No debe cambiar ninguna preferencia}\}$$

$$PREFECH_8^A = \{(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

Observación: En el modelo no adaptativo propuesto en el Capítulo 3 se recomienda en la segunda ronda realizar 28 cambios de preferencias, en cambio, ahora el modelo propone realizar tan sólo 17, produciéndose una reducción considerable del número de cambios.

4. Generación de recomendaciones

Aplicando las reglas de dirección el modelo de SAC Adaptativo recomienda los siguientes cambios de dirección:

- Según la regla DR1, los expertos han de **incrementar** las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$\begin{array}{ll}
 p_1^{32} = c_1 \rightarrow c_2 & p_6^{14} = c_1 \rightarrow c_2 \\
 p_2^{13} = c_0 \rightarrow c_1 & p_6^{31} = c_0 \rightarrow c_1 \\
 p_3^{32} = a_2 \rightarrow a_3 &
 \end{array}$$

- Según la regla DR2, los expertos han de **decrementar** las valoraciones dadas a las siguientes preferencias:

$$\begin{array}{ll}
 p_1^{24} = c_4 \rightarrow c_3 & p_6^{13} = c_3 \rightarrow c_2 \\
 p_1^{31} = c_3 \rightarrow c_2 & p_6^{34} = c_4 \rightarrow c_3 \\
 p_2^{14} = c_4 \rightarrow c_3 & p_8^{24} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 p_4^{13} = b_4 \rightarrow b_3 & p_8^{31} = b_6 \rightarrow b_5 \\
 p_4^{24} = b_6 \rightarrow b_5 & p_8^{32} = b_5 \rightarrow b_4 \\
 p_5^{14} = b_6 \rightarrow b_5 & p_8^{34} = b_5 \rightarrow b_4
 \end{array}$$

4.3.3. Tercera ronda de consenso

1. Modificación de las preferencias.

Los expertos modifican sólo las preferencias recomendadas por el modelo manteniendo los valores de todas las demás:

$$\begin{aligned}
P_{e_1} &= \begin{pmatrix} - & c_1 & c_0 & c_2 \\ c_3 & - & c_2 & \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 & - & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_2 & - \end{pmatrix} & P_{e_2} &= \begin{pmatrix} - & c_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_3 \\ c_2 & - & c_2 & c_1 \\ c_2 & c_3 & - & c_1 \\ c_1 & c_3 & c_2 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_3} &= \begin{pmatrix} - & a_2 & a_4 & a_3 \\ a_4 & - & a_7 & a_4 \\ a_4 & \mathbf{a}_3 & - & a_2 \\ a_4 & a_4 & a_6 & - \end{pmatrix} & P_{e_4} &= \begin{pmatrix} - & b_1 & \mathbf{b}_3 & b_5 \\ b_5 & - & b_2 & \mathbf{b}_5 \\ b_3 & b_3 & - & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_5} &= \begin{pmatrix} - & b_3 & b_1 & \mathbf{b}_5 \\ b_3 & - & b_2 & b_2 \\ b_4 & b_4 & - & b_2 \\ b_1 & b_4 & b_4 & - \end{pmatrix} & P_{e_6} &= \begin{pmatrix} - & c_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \\ c_3 & - & c_1 & c_1 \\ \mathbf{c}_1 & c_3 & - & \mathbf{c}_3 \\ c_3 & c_3 & c_1 & - \end{pmatrix} \\
P_{e_8} &= \begin{pmatrix} - & b_5 & b_1 & b_3 \\ b_1 & - & b_1 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_5 & \mathbf{b}_4 & - & \mathbf{b}_4 \\ b_3 & b_2 & b_1 & - \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Con estos nuevos valores comenzará la tercera ronda.

2. Cálculo de los grados de consenso y control del proceso de consenso

2.1 Cálculo de los grado de consenso

1. *Cálculo de los valores centrales:* No han cambiado respecto a los calculados en la primera ronda.

2. *Matrices de similaridad:*

Se calculan de nuevo las matrices de similaridad para cada par de expertos.

3. *Matriz de consenso.*

La matriz de consenso obtenida en la tercera ronda es:

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.77 & 0.8 & 0.77 \\ 0.73 & - & 0.73 & 0.73 \\ 0.82 & 0.8 & - & 0.76 \\ 0.77 & 0.8 & 0.78 & - \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo de los grados de consenso.* Se calcula el grado de consenso a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones de preferencia:

Level 1. *Consenso sobre pares de alternativas, cp^{lk} .*

$$cp^{12} = 0.77 \quad cp^{13} = 0.8 \quad cp^{14} = 0.77$$

$$cp^{21} = 0.73 \quad cp^{23} = 0.73 \quad cp^{24} = 0.73$$

$$cp^{31} = 0.82 \quad cp^{32} = 0.8 \quad cp^{34} = 0.76$$

$$cp^{41} = 0.77 \quad cp^{42} = 0.8 \quad cp^{43} = 0.78$$

Observación: Comparando con la matriz de consenso obtenida en la ronda anterior podemos comprobar como mejora o se mantiene el grado de consenso en todos los pares de alternativas.

Level 2. *Consenso sobre alternativas, ca^l .* El grado de consenso al nivel de alternativas es:

$$ca^1 = 0.78 \quad ca^2 = 0.73 \quad ca^3 = 0.8 \quad ca^4 = 0.78$$

Level 3. *Consenso sobre las relaciones o consenso total, cr.* El grado de consenso total en la tercera ronda es:

$$cr = 0.77$$

2.2 Control del proceso de consenso

El grado de consenso en la tercera ronda ha superado el umbral de consenso que se fijó al inicio del proceso, $cr = 0.77 > \gamma = 0.75$. Por tanto el modelo de SAC Adaptativo indica que se ha alcanzado el consenso buscado y pone fin al proceso de búsqueda del consenso.

4.4. Resumen de los Resultados

En la Tabla 4.6 aparecen los resultados más significativos que describen el comportamiento de ambos modelos en lo referente al número de rondas, grado de consenso alcanzado y número de cambios realizados en cada ronda.

Como puede observarse a tenor de los resultados obtenidos, el modelo adaptativo consigue mejorar el ritmo de convergencia hacia el consenso al incrementar en un 10% el grado de consenso entre la primera y segunda ronda, frente al 7% que se obtiene en el modelo no adaptativo.

En lo que respecta al número de cambios, también se produce una mejora significativa reduciendo en un 39% (17 frente a 28) el número de cambios de preferencia en aquellas situaciones en las que se considera que el acuerdo está próximo.

Finalmente indicar que con la propuesta del modelo de sistema de consenso adaptativo se consigue alcanzar uno de los objetivos propuestos al inicio de esta memoria, que consistía en desarrollar un modelo capaz de optimizar el proceso de búsqueda de consenso.

	Modelo de SAC adaptativo	Modelo de SAC no adaptativo
Nº Rondas	3	4
1ª Ronda	cr=0.634 cambios=56	cr=0.634 cambios=36
2ª Ronda	cr=0.73 cambios=17	cr=0.703 cambios=28
3ª Ronda	cr=0.77	cr=0.749 cambios=6
4ª Ronda		cr=0.759

Tabla 4.6: Resultados obtenidos por ambos modelos

Conclusiones y Trabajos Futuros

A continuación revisamos cuales han sido las principales propuestas y los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria. Finalizaremos presentando las líneas de investigación y trabajos futuros que nos planteamos construir a partir de estos resultados.

Propuestas y resultados obtenidos

Los procesos de consenso en la vida real implican la participación de una persona que realiza las funciones de moderador. Este se ha de encargar de evaluar el grado de consenso alcanzado en cada una de las rondas que lo componen y recomendar a los expertos como deben cambiar sus opiniones para aproximarlas.

En problemas de decisión en los que los expertos tratan con información imprecisa o intentan valorar aspectos de naturaleza cualitativa, es aconsejable que utilicen un modelado de preferencias lingüístico para expresar sus opiniones. En particular, en problemas de TDG puede ocurrir que cada experto utilice su propio conjunto de términos lingüísticos para expresar sus opiniones y que éste sea diferente al del resto de expertos.

Teniendo en cuenta estas circunstancias y los objetivos que nos planteamos al principio de la memoria, hemos presentado dos propuestas de modelos de sistemas

de apoyo al consenso cuyos resultados pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Modelo de SAC para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares.

- El modelo propuesto consigue automatizar los procesos de consenso sustituyendo la figura del moderador humano y realizando las operaciones que éste tiene asignadas.
- Dentro de un contexto lingüístico multigranular, se han definido un conjunto de medidas y operadores para evaluar el nivel de acuerdo alcanzado a lo largo del proceso de consenso. Al trabajar con información lingüística multigranular, se ha utilizado una metodología apoyada en conjuntos difusos para unificar la información lingüística y poder operar con ella.
- El modelo incorpora un Sistema de Recomendaciones Orientado basado en un conjunto de reglas que permite identificar las preferencias más discrepantes y recomendar la dirección en la que los expertos han de modificarlas para conseguir aproximarlas a las del resto de expertos y de este modo incrementar el grado de consenso paulatinamente.

2. Modelo de Sistema de Apoyo al Consenso Adaptativo.

Los modelos de consenso presentes en la literatura que hemos revisado en el Capítulo 2 no abordan el problema de la optimización del proceso de consenso. En esta memoria hemos propuesto un nuevo modelo adaptativo para optimizar los procesos de consenso cuyos resultados han sido los siguientes:

- Se han definido tres procedimientos para buscar las preferencias a cambiar. Dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda, se ejecutará un

procedimiento diferente, adaptando de esta forma su funcionamiento el modelo al nivel de acuerdo existente.

- En el modelo de SAC propuesto en el Capítulo 3 se puso de relieve la existencia de varias excepciones relacionadas con el sistema de recomendaciones orientado que podrían hacer que el modelo no tuviese el comportamiento esperado. En el modelo adaptativo se propone un nuevo sistema de recomendaciones que evita la aparición de excepciones en su funcionamiento.
- Comparando los resultados devueltos por ambos modelos, se puede comprobar como el modelo adaptativo optimiza el proceso de consenso mejorando la velocidad de convergencia hacia el consenso y reduciendo el número de rondas a llevar a cabo para alcanzarlo.

En relación a la difusión y publicación de los resultados de nuestra investigación en este campo, destacaremos las siguientes publicaciones:

- E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata y F Chiclana. A Consensus Support System Model for Group Decision-making Problems with Multi-granular Linguistic Preference Relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13, (2005), pp. 644-658, [90].
- E. Herrera-Viedma, F. Mata y L. Martínez. An Adaptive Module for the Consensus Reaching Process in Group Decision Making Problems. *Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Lecture Notes in Computer Science* (2005), [92].
- L. Martinez, L.G. Pérez, M. Barranco y F. Mata. A Multi-granular Linguistic

Based-Content Recommender System Model. 10th International Conference on Fuzzy Theory and Technology, Salt Lake City (Utah) USA, 2005, [121].

- E. Herrera-Viedma, F. Mata, L. Martínez, F. Chiclana y L.G. Pérez. Measurements of Consensus in Multi-granular Linguistic Group Decision Making. Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Lecture Notes in Artificial Intelligence 3131 (2004) pp.194-204, [91].
- F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma y F. Chiclana. Modelando el Consenso en Problemas de Toma de Decisiones en Grupo con Información Lingüística Multi-Granular. XII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Jaén, 2004, pp. 461-466, [122].
- F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martinez, F. Mata y P.J. Sánchez. A Multi-Granular Linguistic Decision Model for Evaluating the Quality of Network Services, en: Intelligent Sensory Evaluation: Methodologies and Applications, Ruan Da, Zeng Xianyi (Eds.) Springer, pp. 71-92, 2004, [74].

Trabajos futuros

Consideramos que el consenso es un tema importante en el área de la Toma de Decisiones en Grupo, habiéndose convertido en una técnica de decisión aplicada no sólo en el ámbito empresarial sino también en otro tipo de ambientes donde se llevan a cabo procesos de negociación (laboral, político, etc.). Teniendo presente esto, nuestros trabajos futuros se encaminan en las siguientes líneas de investigación:

1. Si bien los modelos de sistemas de apoyo al consenso propuestos en esta memoria han sido aplicados en problemas TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares, es nuestra intención modificarlos de forma que puedan extenderse a problemas de TDG definidos en otros contextos que incluyan por ejemplo valores numéricos, intervalares, etc.
2. Profundizar en el estudio de técnicas de búsqueda de consenso e incorporarlas al modelo. El propósito de esta línea de investigación es la de representar situaciones que pueden darse en problemas del mundo real como puede ser el hecho de considerar que las opiniones de unos expertos son más relevantes que las de otros (relevancia de preferencias), o en el caso de que alguno de los expertos no siga las recomendaciones del sistema, tener la posibilidad de penalizar sus opiniones o incluso excluirlo del proceso de consenso (sistema de penalización).
3. Diseñar e implementar un sistema de apoyo al consenso en el entorno de una Intranet que utilizando los servicios propios de la misma permita llevar a cabo un proceso de consenso sin necesidad de que los expertos estén presentes en el mismo lugar físico y sin la intervención de un moderador humano. El sistema presentará un interface gráfico que permita representar la evolución del consenso y visualizar la situación de las preferencias de cada experto respecto al resto con el propósito de que sirva de guía al experto para modificar sus preferencias. Este sistema se integraría como un módulo de consenso dentro de un Sistema de Apoyo a la Toma de Decisión (DSS) más amplio y general.

Bibliografía

- [1] G.I. Adamopoulos and C.P. Pappis. A fuzzy linguistic approach to a multicriteria sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 92(3):628–636, 1996.
- [2] C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-Gonzalez. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(2):211–227, 2005.
- [3] C. Alsina, E. Trillas, and L. Valverde. On some logical connectives for fuzzy sets theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93:15–26, 1983.
- [4] R. Anthony. *Planning and Control Systems: A Framework for Analysis*. Harvard Business School Division of Research Press, 1965.
- [5] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: A linguistic fuzzy-set approach. *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.
- [6] W. Armstrong. Uncertainty and utility function. *Economics Journal*, 58:1–10, 1948.
- [7] K.J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, 1963.

-
- [8] K. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy-sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31(3):343–349, 1989.
- [9] A. Basilevsky. *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*. Elsevier, 1983.
- [10] G. Beliakov, R. Mesiar, and L. Valaskova. Fitting generated aggregation operators to empirical data. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(2):219–236, 2004.
- [11] G. Beliakov and J. Warren. Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(6):773–784, 2001.
- [12] R.E. Bellman and L. Zadeh. Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):141–164, 1970.
- [13] J.C. Bezdek, B. Spillman, and R. Spillman. A fuzzy relation space for group decision theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:255–278, 1978.
- [14] P.P. Bonissone. *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, chapter A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications, pages 329–339. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [15] P.P. Bonissone and K.S. Decker. *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-Off Precision and Complexity*, pages 217–247. Uncertainty in Artificial Intelligence. North-Holland, 1986.
- [16] G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Pasi. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on*

- Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 27:126–132, 1997.
- [17] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.
- [18] P. Bosc, D. Kraft, and F. Petry. Fuzzy sets in database and information systems: Status and opportunities. *Fuzzy Sets and Systems*, 3(156):418–426, 2005.
- [19] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, and A. Tsoukia's. *Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [20] N. Bryson. Group decision-making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content. *Computers and Operational Research*, 1(23):27–35, 1996.
- [21] N. Bryson and A. Joseph. Generating consensus priority point vectors: a logarithmic goal programming approach. *Computers and Operational Research*, 6(26):637–643, 1999.
- [22] Z. Bubnicki. *Analysis and Decision Making in Uncertain Systems*. Springer-Verlag, 2004.
- [23] T.X. Bui. *A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision-Making*. Springer-Verlag, 1987.

-
- [24] H. Bustince, E. Barrenechea, and V. Mohedano. Intuitionistic fuzzy implication operators: An expression and main properties. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(3):387–406, 2004.
- [25] H. Bustince and P. Burillo. Perturbation of intuitionistic fuzzy relations. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(1):81–103, 2001.
- [26] R. Caballero and G. M. Fernández. *Toma de Decisiones con Criterios Múltiples*. Revista de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, 2002.
- [27] T. Calvo, R. Mesiar, and RR. Yager. Quantitative weights and aggregation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(1):62–69, 2004.
- [28] E. Capurso and A. Tsoukiàs. Decision aiding and psychotherapy. *Bulletin of the EURO Working Group on MCDA*, 2003.
- [29] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkuryeva, T. Riissanen, and A.G.S. Ventre. Consensus in distributed soft environments. *European Journal of Operational Research*, 61:165–185, 1992.
- [30] C. Carlsson and R. Fullér. Benchmarking and linguistic importance weighted aggregations. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:35–41, 2000.
- [31] C. Carlsson and R. Fuller. *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*. Springer-Verlag, 2001.
- [32] C.T. Chen. Applying linguistic decision-making method to deal with service quality evaluation problems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Suppl.):103–114, 2001.

-
- [33] S.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy multiple attribute decision-making methods and applications*. Springer-Verlag, 1992.
- [34] C-H. Cheng and Y. Lin. Evaluating the best main battle tank using fuzzy decision theory with linguistic criteria evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142:174–186, 2002.
- [35] H. Chernoff. *Elementary Decision Theory*. Dover Publications, 1987.
- [36] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 97:33–48, 1998.
- [37] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision making model based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122:277–291, 2001.
- [38] R.T. Clemen. *Making Hard Decisions. An Introduction to Decision Analysis*. Duxbury Press, 1995.
- [39] W. Cook and M. Kress. Ordinal ranking with intensity of preference. *Management Science*, 31:26–32, 1985.
- [40] W. Cook and L. Seiford. Priority ranking and consensus formation. *Management Science*, 24:1721–1732, 1978.
- [41] C. Coombs and J. Smith. On the detection of structures in attitudes and developmental processes. *Psychological Reviews*, 80(5):337–351, 1973.
- [42] V. Cutello and J. Montero. Hierarchies of aggregation operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(11):1025–1045, 1994.

-
- [43] V. Cutello and J. Montero. Hierarchies of intensity preference aggregations. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10(2):123–133, 1994.
- [44] G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. John Wiley and Sons Inc., 1959.
- [45] R. Degani and G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2:143–162, 1988.
- [46] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. Combining numerical and linguistic information in group decision making. *Information Sciences*, 107:177–194, 1998.
- [47] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A Vila. Linguistic decision making models. *International Journal of Intelligent Systems*, 7:479–492, 1992.
- [48] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8:351–370, 1993.
- [49] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. A model for linguistic partial information in decision making problem. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(5):365–378, 1994.
- [50] L. Dombi. *Fuzzy Logic and Soft Computing*, chapter A General Framework for the Utility-Based and Outranking Methods, pages 202–208. World Scientific, 1995.
- [51] J. Doyle. Prospects for preferences. *Computational Intelligence*, 20(2):111–136, 2004.

-
- [52] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Kluwer Academic, 1980.
- [53] D. Dubois and H. Prade. A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Science*, 36:85–121, 1985.
- [54] D. Dubois and H. Prade. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *Information Science*, 39:205–210, 1986.
- [55] D. Dubois and H. Prade. Rough fuzzy-sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 13(2-3):191–209, 1990.
- [56] R. Duncan and H. Raiffa. *Games and Decision. Introduction and Critical Survey*. Dover Publications, 1985.
- [57] C. Edwards, J. Ward, and A. Bytheway. *Fundamentos de Sistemas de Información*. Prentice Hall, 1998.
- [58] Real Academia Española. *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima Segunda Edición*. Espasa, 2001.
- [59] Z-P. Fan, J. Ma, and Q. Zhang. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information alternatives. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1):101–106, 2002.
- [60] Z.P Fan and X. Chen. Consensus measures and adjusting inconsistency of linguistic preference relations in group decision making. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3613:130–139, 2005.
- [61] Z.P. Fan, S.H. Xiao, and G.F. Hu. An optimization method for integrating two kinds of preference information in group decision-making. *Computers Industrial Engineering*, 46(2):329–335, 2004.

-
- [62] M. Fedrizzi, M. Fedrizzi, and R.A. Marques Pereira. Soft consensus and network dynamics in group decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 14(1):63–77, 1999.
- [63] M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, and S. Zadrozny. An interactive multi-user decision support system for consensus reaching processes using fuzzy logic with linguistic quantifiers. *Decision Support System*, (4):313–337, 1988.
- [64] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [65] P. Fortemps and R. Slowinski. A graded quadrivalent logic for ordinal preference modelling: Loyola-like approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1:93–111, 2002.
- [66] RA. Gheorghe, A. Bufardi, and P. Xirouchakis. Fuzzy multicriteria decision aid method for conceptual design. *Cirp Annals-Manufacturing Technology*, 54(1):151–154, 2005.
- [67] L. Godo and V. Torra. On aggregation operators for ordinal qualitative information. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):143–154, 2000.
- [68] D. Gomez and J. Montero. A discussion on aggregation operators. *Kybernetika*, 40(1):107–120, 2004.
- [69] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129(1):1–47, 2001.
- [70] L. Hamer, Y. Hemeryck, G. Herweyers, M. Janssen, H. Keters, R. Rousseau, and A. Vanhoutte. Similarity measures in scientometric research: The

- jaccard index versus salton's cosine formula. *Information Processing and Management*, 25(3):315–318, 1989.
- [71] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 120:144–161, 2000.
- [72] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67–82, 2000.
- [73] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:43–58, 2000.
- [74] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martinez, F. Mata, and P.J. Sanchez. *Intelligent Sensory Evaluation: Methodologies and Applications*, chapter A Multi-Granular Linguistic Decision Model for Evaluating the Quality of Network Services, pages 71–92. Springer, 2004.
- [75] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A sequential selection process in group decision making with linguistic assessment. *Information Sciences*, 85:223–239, 1995.
- [76] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:175–190, 1996.

-
- [77] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:73–87, 1996.
- [78] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. *Consensus Under Fuzziness*, chapter Consensus based on fuzzy coincidence for group decision making in linguistic setting, pages 121–146. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [79] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A rational consensus model in group decision making linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 88:31–49, 1997.
- [80] F. Herrera and L. Martínez. A selection method based on the 2-tuple linguistic representation model for decision-making with multi-granularity linguistic information. In *Proceedings of the Eusflat-Estylf Joint Conference 99*, pages 453–456, Palma de Mallorca (Spain), September 1999.
- [81] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
- [82] F. Herrera and L. Martínez. The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Suppl.):33–49, 2001.
- [83] F. Herrera and L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert

- decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 31(2):227–234, 2001.
- [84] F. Herrera, L. Martínez, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana. Fusion of multigranular linguistic information based on the 2-tuple fuzzy linguistic representation method. In *Proceedings of Ninth International Conference IPMU 2002*, pages 1155–1162, Annecy (France), 2002.
- [85] F. Herrera, L. Martinez, and P.J. Sanchez. Managing heterogeneous information in group decision making. In *Proceedings Ninth International Conference IPMU 2002*, pages 439–446, Annecy (France), 2002.
- [86] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.
- [87] F. Herrera and J.L. Verdegay. Linguistic assessments in group decision. In *First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, pages 941–948, Aachen, 1993.
- [88] E. Herrera-Viedma, O. Cordón, M.Luque, and A.N. Muñoz A.G. López. A model of fuzzy linguistic irs based on multi-granular linguistic information. *International Journal of Approximate Reasoning*, 34(3):221–239, 2003.
- [89] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.

-
- [90] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, and F. Chiclana. A consensus support system model for group decision-making problems with multi-granular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.
- [91] E. Herrera-Viedma, F. Mata, L. Martínez, F. Chiclana, and L.G. Pérez. Measurements of consensus in multi-granular linguistic group decision making. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3131:194–204, 2004.
- [92] E. Herrera-Viedma, F. Mata, L. Martínez, and L.G. Pérez. An adaptive module for the consensus reaching process in group decision making problems. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3558:89–98, 2005.
- [93] H. Nurmi. *Assumptions of Individual Preferences in the Theory of Voting Procedures*, pages 142–155. In: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., *Non conventional Preference Relations in Decision Making*. Springer-Verlag, 1988.
- [94] U. Hohle. *Mathematics of fuzzy sets*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [95] M. Inuiguchi. Generalizations of rough sets: From crisp to fuzzy cases. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3066:26–37, 2004.
- [96] R. Jain. Tolerance analysis using fuzzy sets. *International Journal Systems Science*, 12(7):1393–1401, 1976.
- [97] A. Jiménez, S. Ríos-Insua, and A. Mateos. A decision support system for multiattribute utility evaluation based on imprecise assignments. *Decision Support Systems*, 36(1):65–79, 2003.
- [98] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:105–118, 1986.

-
- [99] J. Kacprzyk. *The Analysis of Fuzzy Information*, chapter On Some Fuzzy Cores and “Soft” Consensus Measures in Group Decision Making, pages 119–130. In: J. Bezdek. (Ed.). CRC Press, 1987.
- [100] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi. A “soft” measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences. *European Journal of Operational Research*, 34:316–325, 1988.
- [101] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 49:21–31, 1992.
- [102] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. *“Soft” degrees of consensus under fuzzy preferences and fuzzy majorities*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [103] D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky. *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, 1981.
- [104] N.I. Karacapilidis and C.P. Pappis. A framework for group decision making support systems: Combining ai tools and or thecniques. *European Journal of Operational Research*, 103:373–388, 1997.
- [105] R.L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives: Prefereces and Value Tradeoffs*. Cambridge University Press, 1993.
- [106] J.K. Kim, S.H. Choi, C.H. Han, and S.H. Kim. An interactive procedure for multiple criteria group ddecision making with incomplete information. *Computers and Industrial Engineering*, 35(1,2):295–298, 1998.
- [107] S.H. Kim, S.H. Choi, and B.S. Ahn. Interactive group decision process with evolutionary database. *Decision Support Systems*, 23:333–345, 1998.

-
- [108] S.H. Kim, S.H. Choi, and J.K. Kim. An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information: Range-based approach. *European Journal of Operational Research*, 118:139–152, 1999.
- [109] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets an fuzzy logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR, 1995.
- [110] L.I. Kuncheva. Five measures of consensus in group decision making using fuzzy sets. In *International Conference on Fuzzy Sets and Applications IFSA-95*, pages 141–144, 1991.
- [111] L.I. Kuncheva and R. Krishnapuram. A fuzzy consensus aggregation operator. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:347–356, 1996.
- [112] S. Kundu. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 86:357–367, 1997.
- [113] H.M. Lee. Applying fuzzy sets theory for evaluating the rate of aggregative risk in software development. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:323–336, 1996.
- [114] H.M. Lee. Generalization of the group decision making using fuzzy sets theory for evaluating the rate of aggregate risk in software development. *Information Sciences*, 113:301–311, 1999.
- [115] H.S. Lee. On fuzzy preference relation in group decision making. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(2):133–140, 2005.
- [116] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier, and J. Bremont. Subjective evaluation of car seat comfort with fuzzy set techniques. *International Journal of Intelligent Systems*, 12:891–913, 1997.

-
- [117] D. Li and J.B. Yang. A multiattribute decision making approach using intuitionistic fuzzy sets. In *Proceedings Eusflat 2003*, pages 183–186, Zitaú, 2003.
- [118] R.D. Luce and P. Suppes. *Handbook of Mathematical Psychology*, chapter Preferences, Utility and Subject Probability, pages 249–410. Wiley, 1965.
- [119] G.H. Marakas. *Decision support systems in the 21th century*. 2nd edition. Pearson, 2003.
- [120] M. Marimin, M. Umamo, I. Hatono, and H. Tamura. Linguistic labels for expressing fuzzy preference relation in fuzzy group decision making. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 28:205–218, 1998.
- [121] L. Martínez, L.G. Pérez, M. Barranco, and F. Mata. A multi-granular linguistic based-content recommender system model. In *10th International Conference on Fuzzy Theory and Technology*, Salt Lake City (Utah) USA, 2005.
- [122] F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana. Modelando el consenso en problemas de toma de decisiones en grupo con información lingüística multi-granular. In *Actas Del XII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, Estylf 2004*, Jaén, Septiembre 2004.
- [123] L. Mich, L. Gaio, and M. Fedrizzi. On fuzzy logic-based consensus in group decision. In *Fifth International Fuzzy Systems Association World*, pages 698–700, Seoul, 1993.

-
- [124] G.A. Miller. The magical number seven plus or minus two: Some limits on our capacity of processing information. *Psychological Review*, 63:81–97, 1956.
- [125] M. Mizumoto. Pictorial representations of fuzzy connectives, part i: Cases t-norms, t-conorms and averaging operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 31:217–242, 1989.
- [126] M. Mizumoto. Pictorial representations of fuzzy connectives, part ii: Cases of compensatory operators and self-dual operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:45–79, 1989.
- [127] J. Montero. Arrow’s theorem under fuzzy rationality. *Behavioural Science*, 32:267–273, 1987.
- [128] J. Montero. Social welfare functions in a fuzzy environment. *Kybernetes*, 16:241–245, 1987.
- [129] J.N. Morderson and P.S. Nair. *Fuzzy mathematics*. Physica-Verlag, 1998.
- [130] S.A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets Systems*, 1:155–167, 1978.
- [131] M. Oztürk, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. *Preference Modelling*, pages 27–72. In: State of the Art in Multiple Criteria Decsioin Analysis, M. Ehrgott, S. Greco and J. Figueira (Ed.). Wiley Series on Intelligent Systems. Springer-Verlag, 2005.
- [132] W. Pedrycz. *Fuzzy modeling: Paradigms and practice*. Kluwer Academic, 1996.

-
- [133] W. Pedrycz and F. Gomide. *An introduction to fuzzy sets: Analysis and Design (Complex Adaptive Systems)*. Bradford Book, 1998.
- [134] P. Perny and A. Tsoukias. On the continuous extension of a four Valued logic for preference modelling. pages 302–309, Paris, 1998. IPMU.
- [135] M.H. Rasmy, S.M. Lee, W.F. Abd El-Wahed, A.M. Ragab, and M.M. El-Sherbiny. An expert system for multiobjective decision making: Application of fuzzy linguistic preferences and goal programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 127:209–220, 2002.
- [136] S. Rios, C. Bielza, and A. Mateos. *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión*. Ra-Ma, 2002.
- [137] C. Romero. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas, Aplicaciones*. Alianza Universidad, 1993.
- [138] M. Roubens. Some properties of choice functions based on valued binary relations. *European Journal of Operational Research*, 40:309–321, 1989.
- [139] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.
- [140] M. Roubens and Ph. Vincke. *Preference modelling*. Springer-Verlag, 1985.
- [141] Th. L. Saaty. Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:57–68, 1978.
- [142] Th. L. Saaty. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Proces*. RSW Publications, 1994.

-
- [143] S. Saint and J. R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, 1994.
- [144] M. Salles. *Handbook of Utility Theory*, chapter Fuzzy Utility. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [145] A.K. Sen. Social choice theory: A re-examination. *Econometrica*, 45:53–89, 1977.
- [146] F. Seo and M. Sakawa. Fuzzy multiattribute utility analysis for collective choice. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15:45–53, 1985.
- [147] E. Szmidt and J. Kacprzyk. A consensus reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations. *International Journal of Intelligent System*, 18(7):837–852, 2003.
- [148] T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 12:117–131, 1984.
- [149] T. Tanino. *On Group Decision Making Under Fuzzy Preferences*, pages 172–185. in: J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, Eds., *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [150] J.F. Le Téo and B. Mareschal. An interval version of PROMETHEE for the comparison of building products’ design with ill-defined data on environmental quality. *European Journal of Operational Research*, 109:522–529, 1998.

-
- [151] M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10:716–723, 1980.
- [152] M. Tong and P.P. Bonissone. Linguistic solution to fuzzy decision problems. *Studies in the Management Science*, 20:323–334, 1984.
- [153] V. Torra. Negation function based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:975–988, 1996.
- [154] V. Torra. Linguistic aggregation in non-unified domains. In *EUROFUSE-SIC 99*, pages 188–193, Budapest, 1999.
- [155] V. Torra. Aggregation of linguistic labels when semantics is based on antonyms. *International Journal of Intelligent Systems*, 16:513–524, 2001.
- [156] V. Torra and U. Cortes. Towards an automatic consensus generator tool: Egac. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 25(5):888–894, 1995.
- [157] E. Triantaphyllou. *Multi-Criteria Decision Making Methods: A comparative Study*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [158] Z.S. Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Science*, 166:19–30, 2004.
- [159] Z.S. Xu. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. *Information Sciences*, 168:171–184, 2004.

-
- [160] R.R. Yager. Quantifiers in the formulation of multiple objective decision functions. *Information Science*, 131:107–139, 1983.
- [161] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.
- [162] R.R. Yager. Aggregation operators and fuzzy system modelling. *Fuzzy Sets and Systems*, 67:129–145, 1993.
- [163] R.R. Yager. On weighted median aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2:101–113, 1994.
- [164] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12:237–261, 1995.
- [165] R.R. Yager. *Consensus Under Fuzziness*, chapter Protocol for Negotiations among Multiple Intelligent Agents, pages 165–174. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [166] R.R. Yager. Fusion of ordinal information using weighted median aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 18:32–35, 1998.
- [167] R.R. Yager and D.P. Filev. Parametrized “andlike” and “orlike” owa operators. *International Journal of General Systems*, 22:297–316, 1994.
- [168] A. Yazici and R. George. *Fuzzy Database Modeling*. Phisyca-Verlag, 1999.
- [169] C.Y. Yue, S.B Yao, and P. Zhang. Rough approximation of a preference relation for stochastic multi-attribute decision problems. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3613:1242–1245, 2005.

-
- [170] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [171] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.
- [172] L.A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computers and Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1983.
- [173] L.A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.
- [174] L.A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:111–127, 1997.
- [175] S. Zadrozny. *Computer based consensus reaching support employing the elements of fuzzy logic*. Ph.D. Thesis, IBS PAN, Warszawa, Polish, 1993.
- [176] S. Zadrozny. *Consensus under fuzziness*, chapter An approach to the consensus reaching support in fuzzy environment, pages 83–109. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [177] Q. Zhang, J.C.H. Chen, and P.P. Chong. Decision consolidation: Criteria weight determination using multiple preference formats. *Decision Support Systems*, 38(2):247–258, 2004.
- [178] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets, decision making and expert systems*. Kluwer Academic, 1987.
- [179] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets: Theory and its applications*. Kluwer Academic, 1996.