UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén

Departamento de Informática

Modelos Lingüísticos Difusos aplicados a la Evaluación Sensorial

Diploma de Estudios Avanzado

Macarena Espinilla Estévez

Jaén, Junio de 2008

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén

Departamento de informática

Modelos Lingüísticos Difusos aplicados a la Evaluación Sensorial

Diploma de Estudios Avanzado

Macarena Espinilla Estévez

Director: Dr. Luis Martínez López

Jaén, Junio de 2008

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento

La *Evaluación* es un proceso cognitivo complejo que implica diversos mecanismos en los cuales es necesario identificar los elementos que van a ser evaluados, fijar el marco en el que se va a realizar la evaluación, recopilar la información y finalmente obtener una valoración de los elementos evaluados. Ejemplos típicos incluyen evaluar un tipo de alimento, o evaluar a cada uno de los candidatos en unas elecciones o en un referéndum. Pero, independientemente del problema, el objetivo es obtener una valoración de una alternativa y así saber cuál es mejor a partir de las experiencias y opiniones aportadas por diferentes personas o expertos.

La *Evaluación Sensorial* es una técnica que nos permite usar los sentidos para poder evaluar, opinar y cuestionar un producto determinado, estableciendo niveles de aceptación o rechazo en las diferentes características sensoriales. Los expertos expresan sus opiniones sobre el producto a evaluar según su propio conocimiento y opiniones. Este tipo de información es subjetiva y difícil de determinar de modo cuantitativo y preciso. Por tanto, parece adecuado expresar la información sensorial de forma cualitativa mediante etiquetas lingüísticas [**?**]. El uso de la aproximación lingüística difusa [66] ha producido buenos resultados a la hora de modelar la información cualitativa en diversos campos de aplicación [1, 17].

1.2. Objetivos

El objetivo principal de esta memoria es el estudio de las principales aplicaciones del modelado lingüístico difuso en evaluación sensorial y la presentación de un modelo de evaluación sensorial que usa nuevas aproximaciones lingüísticas difusas, como el modelado lingüístico difuso multigranular.

Así, los objetivos de esta memoria pueden desglosarse en los siguientes puntos:

- El estudio de los problemas de evaluación sensorial en un enfoque lingüístico difuso.
- Desarrollo de un modelo de evaluación sensorial basado en información lingüística difusa.
- Desarrollo de un modelo lingüístico difuso de evaluación sensorial del aceite de oliva.

1.3. Estructura

Para desarrollar los objetivos previamente mencionados, esta memoria está dividida en varios capítulos que se estructuran como se detalla a continuación:

- **Capítulo 2:**se hará una introducción a la evaluación sensorial y presentaremos las herramientas y modelos básicos que serán utilizados en los siguientes capítulos:
- **Capítulo 3:** se presentará el problema de la evaluación sensorial desde un enfoque lingüístico. De esta forma, se estudiarán los conceptos y herramientas del modelado lingüístico necesarias para trabajar con información lingüística. Así, se presentarán diversos conceptos como el de conjuntos difusos, variable lingüística y diversos enfoques de información lingüística como el clásico, el ordinal, el 2–tupla y el multi–granular.

- **Capítulo ??:** se desarrollará un modelo que permitan abordar problemas de evaluación sensorial con información lingüísticas difusas, dicho modelo será capaz de obtener una valoración del objeto a evaluar sin pérdida de información.

- **Capítulo ??:** se desarrollará un modelo de evaluación sensorial aplicado a la evaluación sensorial del aceite de oliva con información lingüística multigranular. El modelo de evaluación será capaz de clasificar una muestra de aceite de oliva a partir de las valoraciones lingüísticas realizadas por los expertos en diferentes dominios lingüísticos de expresión.

- **Capítulo ??:** Algunos comentarios, incluyendo conclusiones finales y trabajos futuros serán esbozados.

Capítulo 2

Evaluación Sensorial

No cabe duda de que los sentidos determinan la alimentación de los seres humanos. Las personas no sólo comen para satisfacer sus necesidades, sino también para obtener placer, por lo que el atractivo de una comida está conectado a funciones fisiológicas y psicológicas y a su asimilación.

El color, tacto, gusto y las sensaciones táctiles llevan a cabo verdaderas funciones fisio-psicológicas, y determinan la aceptación de los productos por medio de la estimulación de sus efectos gratificantes. La pérdida o atenuación de la capacidad de percibir aromas en personas mayores conduce a la infelicidad y a veces a la pérdida de apetito.

La evaluación sensorial es una técnica que nos permite usar los sentidos para poder evaluar, opinar y cuestionar un producto determinado, estableciendo niveles de aceptación o rechazo en las diferentes características sensoriales.

Algunas de las aplicaciones que tiene el análisis sensorial en la industria, se detallan a continuación:

- Control del Proceso de Fabricación: Influencia cambio materia prima, ingredientes y / o cambios en las condiciones del proceso
- Desarrollo del producto.

- Estudios de vida útil.
- Establecimiento de los límites y grados de calidad.
- Caracterización del producto (establecimiento perfil sensorial).
- Estudio comparativo de muestras, estudio de aceptación con consumidores.

Sin embargo, nos encontramos que la mayoría de los modelos de evaluación sensorial obligan a los expertos a expresar sus preferencias por medio de una escala numérica y precisa cuando la información proporcionada por los expertos ha sido percibida por los sentidos e implica siempre incertidumbre e imprecisión. Por lo tanto es necesario estudiar y refinar esos modelos de evaluación sensorial para ser capaces de modelar esa incertidumbre. Una manera práctica y poderosa para tratar dicha incertidumbre en el conocimiento humano fue propuesta por el profesor Zadeh en 1965: La Teoría de Conjuntos Difusos [65]. La aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos para resolver la incertidumbre en la información en los procesos de toma de decisiones fue propuesta por Bellman y Zadeh en 1970 [4], y desde ese momento se ha utilizado extensivamente debido a su utilidad. En [16] podemos encontrar un breve análisis histórico de los modelos de toma de decisiones planteados, siendo los más recientes aquellos basados en el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos para modelar el manejo de incertidumbre. Su principal cualidad es la de presentar un entorno de trabajo mucho más flexible, donde es posible representar la imprecisión, tanto cualitativa como cuantitativa, de los juicios humanos, permitiendo de este modo solucionar satisfactoriamente muchos de los problemas derivados de la pérdida de información. En la literatura científica podemos encontrar como el uso de técnicas de análisis de decisiones han facilitado la resolución de problemas de evaluación complejos [11, 27].

En la Teoría de Decisión, antes de tomar una decisión, se realiza un proceso de análisis que permite a los decisores tomar decisiones de una forma consistente, es decir, el análisis de decisión ayuda a las personas a tomar decisiones complejas. Sin embargo el análisis de decisión no es una teoría a idealizar sobre cómo las personas toman sus decisiones de una forma totalmente racional. En realidad, existen trabajos de campo en psicología que muestran que a veces las personas no procesan la información y que otras veces, toman sus decisiones de forma inconsistente o incongruente a pesar del análisis de la decisión.

A continuación enumeraremos algunos ejemplos reales comunes de procesos de toma de decisiones y como su solución puede verse influenciada por factores externos o subjetivos:

- *Elegir lo que se va a comer.* Elegir entre varias comidas posibles cuando uno está hambriento es una situación común en nuestra vida diaria. Sin embargo, la elección de un tipo particular de comida o incluso la manera de cocinarla, no depende exclusivamente de factores racionales (por ejemplo las necesidades corporales, las propiedades nutritivas del alimento, etc.), sino que otros factores externos y subjetivos afectan en gran manera a la decisión final, por ejemplo, gustos personales, el aspecto de los distintos platos (que no implica directamente buena calidad o sabor), etc.
- *Comprar.* Este es un típico ejemplo de toma de decisiones. Cuando queremos comprar un producto particular usualmente tenemos que elegir entre una gama de alternativas diferentes pero similares. Está claro que existen factores externos que nos influencian en gran medida sobre qué productos comprar, por ejemplo, el lugar donde los productos se encuentran situados en la tienda, o la ayuda que ofrece el vendedor al cliente son factores fundamentales que determinan qué productos se venden bien y cuales no. Además de los factores externos, que pueden influenciar mucho en la decisión final, este es un buen ejemplo donde nos enfrentamos al problema de la falta de información. No es extraño que cuando un cliente tiene que escoger entre diversos productos similares, no posea información suficiente sobre las características particulares que los diferencian.
- *Votar en unas elecciones.* En unas elecciones los votantes tienen que elegir entre diversos candidatos. En este caso es fácil percibir que factores muy subjetivos pueden influir muy seriamente en el resultado final.

Por tanto, podemos ver que aunque el análisis de decisión no se utilice siempre por los decisores a la hora de tomar sus propias decisiones, sí es responsable de realizar un estudio metódico y analítico que ayuda a analizar las alternativas, indicadores, del elemento bajo estudio que es el objetivo de los procesos de *Evaluación Sensorial.*

2.1. Problema de Toma de Decisión

El proceso de la evaluación sensorial se puede modelar con diversos tipos de problemas de la toma de decisión, estos problemas presentan los siguientes elementos básicos [18]:

1. Uno o varios objetivos por resolver.
2. Un conjunto de alternativas o decisiones posibles para alcanzar dichos objetivos.
3. Un conjunto de factores o estados de la naturaleza que definen el contexto en el que se plantea el problema de decisión.
4. Un conjunto de valores de utilidad o consecuencias asociados a los pares formados por cada alternativa y estado de la naturaleza.

Ante la gran variedad de situaciones o problemas de decisión que se pueden presentar en la vida real, la Teoría de la Decisión ha establecido una serie de criterios que permiten clasificar los problemas atendiendo a diferentes puntos de vista:

1. Según el número de criterios o atributos que se han de valorar en la toma de decisión.
2. Según el ambiente de decisión en el que se han de tomar las decisiones.
3. Según el número de expertos que participan en el proceso de decisión.

2.1.1. Tipologías de Situaciones de Toma de Decisiones

El proceso de la evaluación se puede modelar con diversos tipos de problemas de toma de decisión, en los siguientes apartados se hace una breve revisión de las características que definen cada uno de estos puntos de vista.

2.1.1.1. Según el número de criterios

El número de criterios (también denominados atributos) que se tienen en cuenta en los procesos de decisión para obtener la solución también permite clasificar a los problemas de decisión en dos tipos [14, 32, 45, 53, 63]:

1. *Problemas con un sólo criterio o atributo.* Problemas de decisión en los que para evaluar las alternativas se tiene en cuenta un único valor que representa la valoración dada a esa alternativa. La solución se obtiene como la alternativa que mejor resuelve el problema teniendo en cuenta este único criterio de decisión.

2. *Problemas multicriterio o multiatributo.* Problemas de decisión en los que para evaluar las alternativas se tienen en cuenta los valores de dos o más criterios o atributos que definen las características de cada alternativa. La alternativa solución será aquella que mejor resuelva el problema considerando todos estos criterios o atributos.

Ambos tipos se pueden diferenciar perfectamente con el siguiente ejemplo. Supongamos un problema de decisión en el que nos planteamos cambiar de trabajo y nos ofrecen tres posibles alternativas, cada una de ellas caracterizada por tres atributos como son el sueldo, la ubicación geográfica y tipo de trabajo a desarrollar. Este problema puede ser muy simple si para tomar la decisión consideramos como único criterio de decisión elegir la alternativa con mejor sueldo. Sin embargo, este mismo problema se complicaría y el proceso para resolverlo sería diferente si además de considerar el sueldo también tuviésemos en cuenta el tipo de trabajo y/o la ubicación geográfica del mismo. En este segundo caso estaríamos ante un problema en el que hemos de considerar varios atributos o criterios antes de tomar un decisión y por lo tanto, estaríamos hablando de un problema de decisión multicriterio o multiatributo.

Los problemas de toma de decisión multicriterio son más complejos de resolver que los problemas en los que sólo hay que tener en cuenta un criterio para obtener la solución. Cada criterio puede establecer un orden de preferencia particular y diferente sobre el conjunto de alternativas. A partir del conjunto de órdenes de preferencia particulares será necesario establecer algún mecanismo que permita construir un orden global de preferencia.

Existe cierta similitud entre los problemas de decisión multicriterio y los problemas de Toma de Decisión en Grupo (TDG). En ambos casos, existen múltiples órdenes de preferencia sobre las alternativas y es necesario integrarlos en un único orden global de preferencia. La diferencia consiste en que en los problemas de TDG los órdenes de preferencia representan la importancia de las alternativas según cada persona y en los problemas multicriterio los órdenes representan la importancia de cada alternativa respecto a cada criterio.

El número de criterios en problemas de decisión multicriterio se asume que es finito. Sean $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ el conjunto de alternativas y el conjunto de criterios que caracterizan una situación de decisión determinada. Entonces, una forma de representación de la información del problema puede expresarse mediante la siguiente tabla:

Alternativas	*Criterios*			
(x_i)	c_1	c_2	...	c_m
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m}
...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nm}

Cuadro 2.1: Esquema general de un problema de toma de decisiones multicriterio

Cada entrada de la tabla y_{ij} indica la preferencia de la alternativa x_i respecto del criterio c_j. Según el contexto de definición del problema, cada y_{ij} podría estar valorado en un dominio de expresión de preferencias determinado (numérico, lingüístico,...).

2.1.1.2. Según el ambiente de decisión

El ambiente de decisión viene definido por las características y contexto en el que se va a llevar a cabo la toma de decisiones. La Teoría Clásica de la Decisión distingue tres situaciones o ambientes de decisión [30, 52]:

1. *Ambiente de certidumbre.* Un problema de decisión está definido en un ambiente de certidumbre cuando son conocidos con exactitud todos los elementos y/o factores que intervienen en el problema. Esta situación permite asignar valores precisos de utilidad a cada una de las alternativas presentes en el problema.

   Como ejemplo, supongamos que disponemos de una determinada cantidad de dinero que queremos invertir en alguno de los diferentes productos financieros del mercado que nos garantice la inversión realizada (ej., imposición a plazo fijo). Asumiendo que conocemos con exactitud la rentabilidad de cada producto, los gastos de gestión, la duración del mismo, deberemos decidir en que producto invertir para maximizar la inversión realizada. En este caso conocemos todos los factores que se han de tener en cuenta para la toma de decisión y el problema consistirá en estructurar correctamente esta información y establecer las preferencias entre las alternativas de forma que nos permita elegir aquella que maximice el beneficio esperado.

2. *Ambiente de riesgo.* Un problema de decisión está definido en un ambiente de riesgo cuando alguno de los elementos o factores que intervienen están sujetos a las leyes del azar. En estos casos estos problemas son resueltos utilizando la Teoría de la Probabilidad.

   Continuando con el mismo ejemplo, si la inversión la queremos realizar en la bolsa, inmediatamente surgen dudas sobre una posible subida o bajada en la cotización de las acciones en las que se invierta el dinero. En este caso, el enfoque del problema ha de ser diferente y se utilizará una distribución de probabilidad para reflejar la posible subida o bajada de la bolsa que influirá en la utilidad de cada una de las posibles alternativas en las que invertir el dinero.

3. *Ambiente de Incertidumbre*. Un problema de decisión está definido en un ambiente de incertidumbre cuando la información disponible sobre las distintas alternativas puede ser incompleta, vaga o imprecisa, lo que implica que la utilidad asignada a cada alternativa tenga que ser valorada de forma aproximada. Esta incertidumbre surge a raíz del intento de modelar la imprecisión propia del comportamiento humano o la inherente a ciertos fenómenos que por su naturaleza son inciertos.

   Los métodos clásicos no son adecuados para tratar situaciones en las que la incertidumbre se debe a la aparición de información vaga e imprecisa como por ejemplo la que puede surgir al intentar valorar fenómenos relacionados con apreciaciones sensoriales y subjetivas de los expertos. Esto ha generado la necesidad de recurrir a la definición de nuevos modelos basados en la Teoría de los Conjuntos Difusos [65] para modelar la incertidumbre como pueden ser los Rough Sets [29, 33, 44], Conjuntos Difusos Intuicionistas [3, 12, 13], etc.

2.1.1.3. Según el número de expertos

Finalmente, otro punto de vista a la hora de clasificar los problemas de decisión hace referencia al número de expertos o fuentes de información que toman parte en el proceso. Un proceso de toma de decisión en el que participan varios expertos es más complejo que otro en el que la toma decisión se realiza de forma individual. Sin embargo, el hecho de que intervengan varios expertos con puntos de vista diferentes puede ofrecer una solución más satisfactoria al problema.

Atendiendo al número de expertos o fuentes de información que toman parte en la toma de decisión, los problemas de decisión se pueden clasificar en dos tipos:

1. *Unipersonales o individuales*. Las decisiones son tomadas por un sólo experto.

2. *En Grupo o Multiexperto.* La decisiones son tomadas en conjunto por un grupo de expertos que intentan alcanzar una solución en común al problema.

En esta memoria, nosotros modelaremos el proceso de la evaluación como un problema de la toma de decisión en un ambiente de incertidumbre en el que participan varios expertos y se tienen en cuenta los valores de más de un criterio o atributo en las alternativas, para lograr el objetivo de la evaluación sensorial haremos uso del análisis de decisión.

2.2. Análisis de Decisión

Vamos a repasamos un esquema clásico del análisis de la decisión basado en un método cargado de MCDM que sea la base para el desarrollo del modelo de la evaluación, aunque puede ser extendido a cualesquiera de los diversos métodos de MCDM propuestos en la literatura El análisis de decisión se utiliza para ayudar a los expertos a tomar decisiones consistentes en los problemas de toda de la decisión cuya información es valorada mediante etiquetas lingüísticas. En la práctica la mayoría de los problemas de toma de decisión se componen de un grupo de expertos a los que se les solicita su conocimiento sobre un grupo de alternativas para seleccionar las mejores.

El análisis de la decisión es una disciplina, que pertenece a la teoría de la decisión, que ayuda a los decisores de decisión a alcanzar una decisión constante en un problema de la toma de decisión.

Un problema de evaluación se establece en situaciones donde hay una un objeto a evaluar, un conjunto de características o posibles indicadores y, un conjunto de individuos (expertos, jueces, . . .) que expresan sus opiniones o preferencias sobre el conjunto de opciones posibles, y que tienen la intención de alcanzar una decisión, de forma colectiva, sobre la solución que resuelva la cuestión planteada.

Así, un problema de Toma de Decisiones puede resumirse como sigue: se dispone de un conjunto de opciones o alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$, y de un conjunto de criterios o expertos, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $(m \geq 2)$, cada uno de los cuales proporciona sus preferencias sobre dicho conjunto de opciones. De lo que se trata es de encontrar la mejor solución por parte de todo el grupo de expertos.

2.3. Modelado de Preferencias

El modelado de preferencias es una de las actividades inevitables en los problemas de Toma de Decisión, independientemente del área en el que se esté trabajando (Economía [2, 22], Psicología [15, 19, 46], Teoría de la Decisión [31, 50, 51, 54], ...). Los expertos en base a su conocimiento, experiencias y creencias han de emitir sus valoraciones sobre el conjunto de alternativas y establecer un orden de preferencia sobre la idoneidad de cada una ellas como solución al problema.

En un problema de Toma de Decisiones en Grupo, la información proporcionada o disponible sobre el conjunto finito de alternativas puede ser de naturaleza diversa, cabiendo distinguir la numérica y la lingüística. En esta memoria, nos centraremos en la información lingüística. Así, las preferencias pueden ser proporcionadas en alguna de las siguientes estructuras de representación:

1. *Como un orden de preferencia de alternativas.* En este caso las alternativas están ordenadas de mejor a peor, sin información suplementaria alguna.

2. *Como una función de utilidad.* En este caso el experto proporciona una valuación real (valor físico o monetario) para cada alternativa, es decir, una función que asocia cada alternativa con un número real, que indica el grado de cumplimiento de dicha alternativa con respecto a su punto de vista.

3. *Como una relación de preferencia.* En este caso el experto proporciona una relación binaria sobre el conjunto de alternativas, es decir, una función que asocia a cada par de

alternativas un número real que refleja en cierto sentido el grado de preferencia de una alternativa sobre otra cualquiera. Dentro de éstas, podemos encontrar los siguientes tipos:

2.3.1. Órdenes de Preferencia

En este caso, las preferencias de un experto, $e_k \in E$ sobre un conjunto de alternativas X están proporcionadas en forma de un orden de preferencias individual, $O^k = \{o^k(1), \ldots, o^k(n)\}$, donde $o^k(\cdot)$ es una función de permutación sobre el conjunto de índices $\{1, \ldots, n\}$ para dicho experto [43, 55, 56].

De esta forma, un experto, de acuerdo a su punto de vista, proporciona un vector de alternativas ordenado de mejor a peor. Para todo orden de preferencia, O^k, supondremos, sin pérdida de generalidad, que cuanto menor es la posición de una alternativa en dicho orden mejor satisface dicha alternativa el criterio del experto que proporciona dicho orden, y viceversa.

Por ejemplo, si un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, mediante el siguiente orden de preferencia (x_2, x_4, x_1, x_3) entonces $o(1) = 3,\ o(2) = 1,\ o(3) = 4,\ o(4) = 2$, lo que significará que la alternativa x_2 es la mejor para dicho experto, mientras que la alternativa x_3 es la peor.

2.3.2. Funciones de Utilidad

En este caso, un experto, $e_k \in E$, proporciona sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X a través de un conjunto de n valores de utilidad, $U^k = \{u_1^k, ..., u_n^k\},\ u_i^k \in [0, 1]$. Es decir, el experto asocia a cada alternativa un valor de utilidad que representa el grado de cumplimiento desde su punto de vista por parte de dicha alternativa [28, 47, 57]. Para cada conjunto de valores de utilidad, supondremos, sin perdida de generalidad, que cuanto mayor es la valoración de una alternativa mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto.

Por ejemplo, si un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, mediante el siguiente vector de utilidad: $U^3 = \{0.3, 0.7, 0.9, 0.4\}$, eso significará que, desde su punto de vista, la alternativa x_1 es la peor de todas y que x_3 es la mejor.

2.3.3. Relaciones de Preferencia

En teoría matemática clásica, las preferencias sobre un conjunto de alternativas se pueden modelar a través de una relación binaria R definida como sigue:

$x_i R x_j \Leftrightarrow$ " x_i *no es peor que* x_j ".

Esta definición considera una relación binaria como una relación de preferencia débil, e implica que dicha relación R es reflexiva. Con esta definición, es natural asociar un número real, llamado valuación y denotado $R(x_i, x_j) \in R$, el cual representa el grado de verdad de la afirmación " x_i *no es peor que* x_j ", o grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j. Cuando el conjunto de alternativas es finito, podemos asociar una matriz P_R a la relación R, tomando como elemento ij–ésimo el valor $R(x_i, x_j)$.

Sea $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$ un conjunto finito de expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n = 4)$. Las preferencias dadas por el experto 1 sobre el conjunto de alternativas X definido en un dominio numérico en $[0, 1]$ utilizando una relación de preferencia difusa P_{e_1} tendría el siguiente aspecto:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} - & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & - & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & - & 0.2 \\ 1 & 0.4 & 0.8 & - \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Modelado Lingüístico Difuso

3.1. Introducción

La Lógica Difusa se plantea como alternativa a la lógica tradicional, con el objetivo de introducir grados de incertidumbre en las sentencias que califica [68]. Hay numerosas situaciones en las que la lógica tradicional funciona perfectamente. Por ejemplo, supongamos que partimos de las calificaciones obtenidas en una clase y queremos agrupar a los aprobados (aquellos que hayan obtenido una calificación igual o superior a 5). El proceso de razonamiento que se seguiría mediante la lógica tradicional sería ir comparando cada calificación con 5 hasta obtener cuáles están aprobados y cuáles no.

Sin embargo, el inconveniente de esta lógica es que en la vida real no nos encontramos frecuentemente con criterios de clasificación tan claros como en el ejemplo anterior. En efecto, hay numerosas situaciones en las que la información no puede ser evaluada cuantitativamente de forma precisa, pero puede que sí sea posible hacerlo cualitativamente, y en estos casos hemos de hacer uso de un *enfoque lingüístico*. Por ejemplo, cuando intentamos cualificar algún fenómeno relacionado con percepciones humanas, a menudo usamos palabras o descripciones en lenguaje natural, en lugar de valores numéricos. Supongamos que dado un conjunto de personas, las intentamos agrupar según su altura. Las personas no son sólo *altas* o *bajas* sino que la mayoría pertenecen a grupos de altura intermedia. La gente suele ser *más bien alta* o *de altura media*. Casi nunca las calificamos con rotundidad, porque el lenguaje que usamos nos permite introducir modificadores que añaden imprecisión: *un poco, mucho, algo* ...

Como la lógica tradicional es bivaluada (sólo admite dos valores: o el elemento pertenece al conjunto o no pertenece), se ve maniatada para agrupar según su altura al anterior conjunto de personas, puesto que su solución sería definir un umbral de pertenencia (por ejemplo, un valor que todo el mundo considera que, de ser alcanzado o superado, la persona en cuestión puede llamarse *alta*). Si dicho umbral es 1. 80, todas las personas que midan 1. 80 o más serían *altas*, mientras que el resto serían bajas. Según esta manera de pensar, alguien que mida 1. 79 sería tratado igual que otro que mida 1. 60, ya que ambos han merecido el calificativo de personas *bajas*.

Si se dispusiera de una herramienta para caracterizar las alturas de forma que las transiciones entre las que son altas y las que no lo son fueran suaves, estaríamos reproduciendo la realidad mucho más fielmente. En la realidad hay unos puntos de cruce donde las personas dejan de ser *altas* para ser consideradas *medianas*, de forma que el concepto de *alto* decrece linealmente con la altura. Al asignar una función lineal para caracterizar el concepto *alto* en lugar de definir un sólo umbral de separación, estamos dando mucha más información acerca de los elementos. Esta función, como veremos, se llamará función de pertenencia.

En este sentido, el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para el tratamiento de información de forma cualitativa [66]. El *modelado lingüístico difuso* es una herramienta que permite representar aspectos cualitativos y que está basado en el concepto de *variables lingüísticas*, es decir, variables cuyo valores no son números, sino palabras o sentencias expresadas en lenguaje natural o artificial [66]. Cada valor lingüístico se caracteriza por un valor sintáctico o *etiqueta* y un valor semántico o *significado*. La etiqueta es una palabra o sentencia perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado es un subconjunto difuso en un universo de discurso.

Se ha demostrado que es una herramienta muy útil en numerosos problemas, como por ejemplo en la toma de decisiones [36, 61, 64], evaluación de la calidad informativa de documentos Web [42], modelos de recuperación de información [10, 41, 40], diagnósticos clásicos [23], análisis político [1], etc.

3.2. Conceptos Básicos de Información Lingüística

El interés de la Teoría de Conjuntos Difusos se centra esencialmente en modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de la Probabilidad resultan insuficientes o no operativos. Por ello, generaliza la noción clásica de conjunto e introduce el concepto de *ambigüedad*, de manera que los conjuntos difusos nos proporcionan una nueva forma de representar la imprecisión e incertidumbre presentes en determinados problemas.

3.2.1. Conjuntos Difusos y Funciones de Pertenencia

La noción de conjunto refleja la tendencia a organizar, generalizar y clasificar el conocimiento sobre los objetos del mundo real. El encapsulamiento de los objetos es una colección cuyos miembros comparten una serie de características o propiedades que implican la noción de conjunto. Los conjuntos introducen una noción de dicotomía, que en esencia es una clasificación binaria: o se acepta o se rechaza la pertenencia de un objeto a una categoría determinada. Habitualmente la decisión de *aceptar* se denota como 1 y la de *rechazar* como 0. Esta decisión de aceptar o rechazar se expresa mediante una función característica, según las propiedades que posean los objetos del conjunto.

La Lógica Difusa se fundamenta en el concepto de ***conjunto difuso*** [65] que suaviza el requerimiento anterior y admite valores intermedios en la función característica, que se denomina ***función de pertenencia***. Esto permite una interpretación más realista de la información, puesto que la mayoría de las categorías que describen los objetos del mundo real, no tienen unos límites claros y bien definidos.

Un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión total) y 1 (pertenencia total). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir un conjunto difuso como sigue.

Definición 1 *Un conjunto difuso $\tilde{A}$ sobre un dominio o universo de discurso U está caracterizado por una función de pertenencia que asocia a cada elemento del conjunto el grado con que pertenece a dicho conjunto, asignándole un valor en el intervalo* $[0, 1]$*:*

$$\mu_{\tilde{A}} \colon U \to [0, 1]$$

Así, un conjunto difuso $\tilde{A}$ sobre U puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento perteneciente a U y su grado de pertenencia, $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))|\ x \in U,\ \mu_{\tilde{A}} \in [0, 1]\}$. Por ejemplo, consideremos el concepto *persona alta*, en un contexto donde la estatura oscila entre 1 y 2 metros. Como es de suponer, alguien que mida 1. 30 metros no se puede considerar como *persona alta* por lo que su grado de pertenencia al conjunto de personas altas sería de 0. Por el contrario, una persona que mida 1. 90 metros sí la consideramos *alta* por lo que su grado de pertenencia al conjunto es de 1.

Las gráficas que representan una función de pertenencia pueden adoptar cualquier forma, cumpliendo propiedades específicas, pero es el contexto de la aplicación lo que determina la representación más adecuada en cada caso. Puesto que las valoraciones lingüísticas dadas por los usuarios son únicamente aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones de pertenencia trapezoidales lineales son suficientemente buenas para capturar la imprecisión de tales valoraciones lingüísticas. La representación paramétrica es obtenida a partir de una 4–tupla (a, b, α, β), donde a y b indican el intervalo en que el valor de pertenencia es 1, con α y β indicando los límites izquierdo y derecho del dominio de definición de la función de pertenencia trapezoidal. Un caso particular de este tipo de representación son las valoraciones lingüísticas cuyas funciones de pertenencia son triangulares, es decir, $a = b$, por lo que se representan por medio de una 3–tupla (a, α, β). La figura 3.1 muestra la descripción y la

$$\mu_A(x,a,b,\alpha,\beta)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{a-\alpha}, & \alpha\leqslant x\leqslant a \\ 1, & a\leqslant x\leqslant b \\ \frac{\beta-x}{\beta-b}, & b\leqslant x\leqslant \beta \\ 0, & x>\beta \end{cases}$$

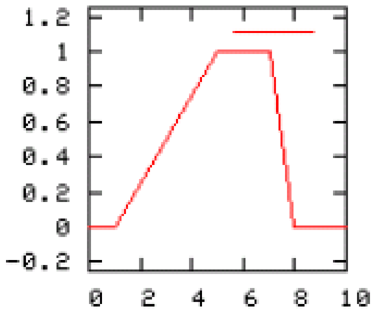

Figura 3.1: Ejemplo de función de pertenencia

representación gráfica de un ejemplo de función de pertenencia trapezoidal.

3.2.2. Definiciones Básicas

Definición 2 *Se define el* ***soporte*** *de un conjunto difuso* $\tilde{A}$ *en el universo* U*, como el conjunto formado por todos los elementos de* U *cuyo grado de pertenencia a* $\tilde{A}$ *sea mayor que* 0*:*

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in U \ / \ \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$$

Definición 3 *Se define la* ***altura*** *de un conjunto difuso* $\tilde{A}$ *como el mayor grado de pertenencia de todos los elementos de dicho conjunto:*

$$h(\tilde{A}) = max\{\mu_{\tilde{A}} \ / \ x \in U\}$$

Definición 4 *El* α***-corte*** *de un conjunto difuso* $\tilde{A}$ *es el conjunto formado por todos los elementos del universo* U *cuyos grados de pertenencia en* $\tilde{A}$ *son mayores o iguales que el valor de corte* $\alpha \in [0,1]$*:*

$$\alpha_{\tilde{A}} = \{x \in U \ / \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Definición 5 *Se denomina* ***conjunto de niveles*** *de un conjunto difuso $\tilde{A}$, al conjunto de grados de pertenencia de sus elementos:*

$$L(\tilde{A}) = \{a \ / \ \mu_{\tilde{A}}(x) = a, \ x \in U\}$$

3.2.3. Operaciones con Conjuntos Difusos

Al igual que en la lógica tradicional, las operaciones lógicas que se pueden establecer entre conjuntos difusos son la intersección, la unión y el complemento. Mientras que el resultado de operar dos conjuntos clásicos es un nuevo conjunto clásico, las mismas operaciones con conjuntos difusos nos darán como resultado otros conjuntos también difusos.

Hay muchas formas de definir estas operaciones. Cualquier operación que cumpla las propiedades de una t–norma puede ser usada para hacer la intersección, de igual manera que cualquier operación que cumpla las propiedades de una t–conorma puede ser empleada para la unión. En la sección **??** se puede ver cuales son las propiedades que deben cumplir las dos familias de funciones y algunos ejemplos.

Las operaciones se definen de la siguiente manera:

- Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}) \ / \ \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = T[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\}$
- Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}) \ / \ \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = S[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\}$
- Complemento: $\mu_{\sim \tilde{A}}(x) = 1 \ - \ \mu_{\tilde{A}}(x)$

En la figura 3.2 podemos ver una representación gráfica de dichas operaciones.

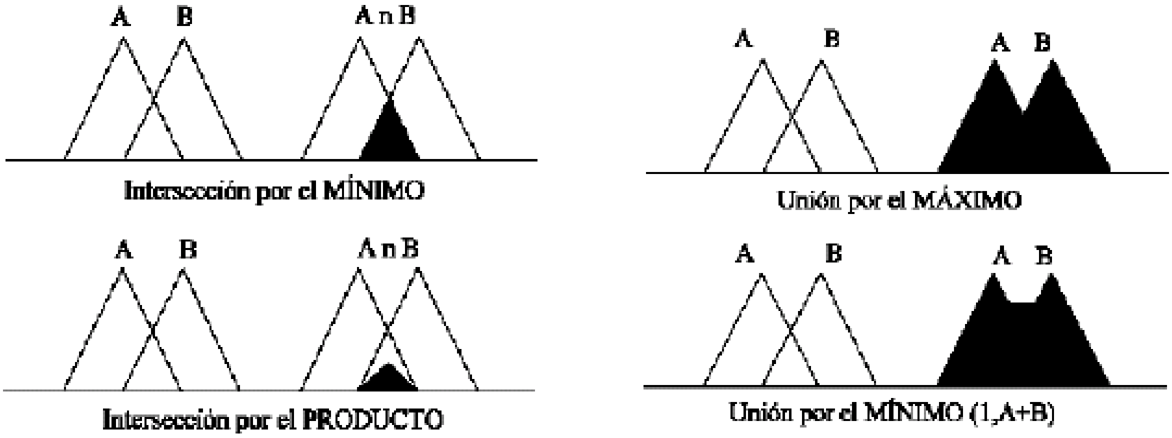

Figura 3.2: Intersección y unión en conjuntos difusos

3.2.4. Modelado Lingüístico Difuso

La información que manejamos en el mundo real puede tener diferentes rangos de valoración y los valores pueden tener distinta naturaleza. En ocasiones, puede que no sea fácil valorarla de forma precisa mediante un valor cuantitativo, sin embargo, puede que sí sea factible hacerlo de forma cualitativa. En este caso, adoptar un enfoque lingüístico suele ofrecer mejores resultados que si aplicamos uno numérico. Por ejemplo, cuando evaluamos determinados aspectos relacionados con la percepción subjetiva (*diseño, gusto, diversión, etc.*), solemos utilizar palabras en lenguaje natural en lugar de valores numéricos (*bonito, feo, dulce, salado, mucha, poca, etc.*). Esto hecho se puede deber a diversas causas:

- Hay situaciones en las que la información, por su propia naturaleza, no puede ser cuantificada y por tanto únicamente puede ser valorada mediante el uso de términos lingüísticos, como sucede cuando realizamos una valoración sobre un libro que hayamos leído, que solemos usar términos como *bueno, regular* o *malo.*

- En otros casos, trabajar con información precisa de forma cuantitativa no es posible, o bien porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta de esa información, o bien porque el coste computacional es demasiado alto y nos basta con la aplicación de un valor aproximado. Por ejemplo, cuando evaluamos la velocidad de una motocicleta, en lugar de usar valores numéricos, solemos usar términos tales como *rápida, muy rápida* o *lenta*.

3.2.4.1. Variables Lingüísticas

El modelado lingüístico difuso es, pues, un enfoque aproximado basado en la Teoría de Conjuntos Difusos. Este modelo representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante lo que se conoce como *variables lingüísticas* [66]. Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o *etiqueta* que es una palabra o frase perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos, y por un *valor semántico* o *significado* de dicha etiqueta que viene dado por un subconjunto difuso en un universo de discurso. Formalmente se define de la siguiente manera.

Definición 6 *Una variable lingüística se define como una quintupla* $(H, T(H), U, G, M)$*.* H *simboliza el nombre de la variable.* $T(H)$ *(o simplemente* T*) el conjunto de términos de* H*, es decir la colección de todos los posibles valores de* H*. Una variable numérica, u, llamada variable base, se asocia a cada valor lingüístico,* $z \in T(H)$*, y toma valores,* $u^{'}$*, en el universo de discurso o dominio de la variable base* U*.* G *es la regla sintáctica (normalmente toma la forma de una gramática) que genera los valores* z *de* $T(H)$*, y* M *es la regla semántica encargada de dar el significado,* $M(z)$*, un subconjunto difuso de* U*, a cada valor* z*. Cada* $z \in T(H)$*, generado por* G*, es la etiqueta para la restricción difusa,* $M(z)$*, definida sobre los valores de la variable base, u,*

$$M(z) = \{(u^{'}, \mu_z(u^{'})), |u^{'} \in U\},$$

indicando $\mu_z(u^{'})$ *el grado de compatibilidad entre el valor de la variable base y el concepto*

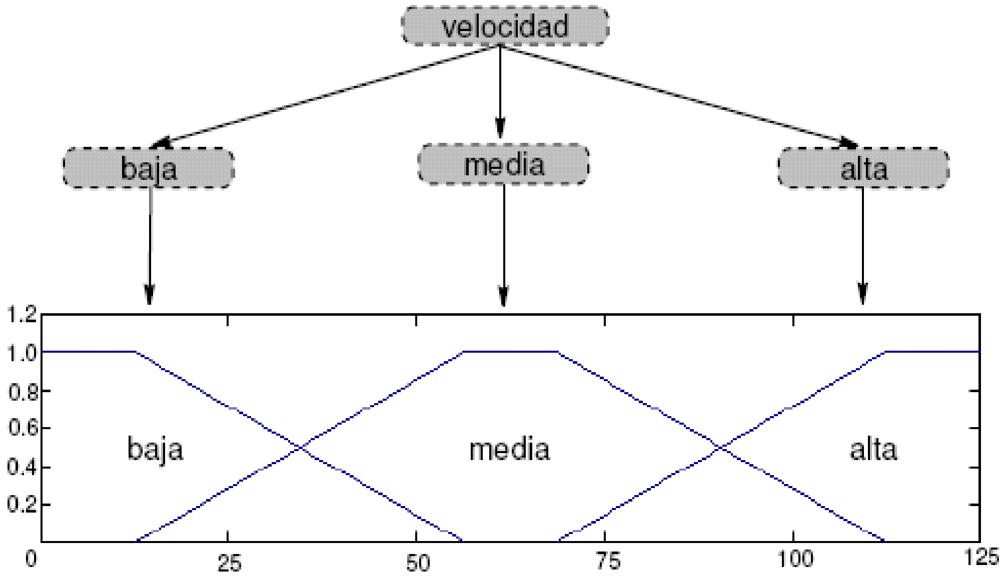

Figura 3.3: Ejemplo de una variable lingüística

expresado por el valor lingüístico z.

Por ejemplo, consideremos la variable lingüística $H = velocidad$, con $U = [0, 125]$ y la variable base $u \in U$. El conjunto de términos asociados con la velocidad podría ser $H(L) = \{baja, media, alta\}$ donde cada término en $H(velocidad)$ es el nombre de un valor lingüístico de *velocidad*. El significado $M(X)$ de una etiqueta $H \in H(velocidad)$ se define como la restricción $H(u)$ sobre la variable base u impuesta según el nombre de H. Por lo tanto $M(X)$ es un conjunto difuso de U cuya función de pertenencia $H(u)$ representa la semántica del nombre H. En la figura 3.3 se puede observar una representación gráfica del ejemplo.

3.2.5. Pasos para la Aplicación del Enfoque Lingüístico Difuso

En cualquier ámbito en el que deseemos aplicar un enfoque lingüístico para la resolución de algún problema, debemos tomar dos decisiones:

- *Modelo de representación.* Elección del conjunto de términos lingüísticos junto con su semántica y así proporcionar a una fuente de información un número reducido de términos con los que poder expresarla.
- *Modelo computacional.* Definir el modelo computacional seleccionando los correspondientes operadores de comparación y de agregación.

Un aspecto importante que es necesario analizar con el fin de establecer la descripción de una variable lingüística es la ***granularidad de la incertidumbre*** [7], es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usado para expresar y representar la información. La cardinalidad debe ser suficientemente baja como para no imponer una precisión excesiva en la información que se quiera expresar y suficientemente alta como para conseguir una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Habitualmente la cardinalidad usada en los modelos lingüísticos suele ser un valor impar, como 7 o 9, no superando las 11 o 13 etiquetas. El término medio representa una valoración de *aproximadamente 0.5*, y el resto de términos se sitúan simétricamente alrededor de este punto medio [7]. Estos valores clásicos de cardinalidad están basados en la línea de observación de Miller sobre la capacidad humana [49], en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de 7 o 9 términos.

Una vez establecida la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos, hay que definir dicho conjunto, es decir, cuáles van a ser las etiquetas lingüísticas y su semántica asociada.

3.3. Modelado Lingüístico Difuso Clásico

El modelado lingüístico difuso clásico adopta un *enfoque basado en una gramática libre de contexto* [7, 8, 66]. Consiste en utilizar una gramática libre de contexto G, donde el conjunto de términos pertenece al lenguaje generado por G. Una gramática generadora G, es una 4–tupla (V_N, V_T, I, P) siendo V_N el conjunto de símbolos no terminales, V_T el conjunto de símbolos terminales, I el símbolo inicial y P el conjunto de reglas de producción. La elección de estos cuatro elementos determinará la cardinalidad y forma del conjunto de términos lingüísticos. Entre los símbolos terminales y no terminales de G podemos encontrar términos primarios (por ejemplo *alto, medio, bajo*), modificadores (por ejemplo *no, mucho, muy, más o menos*), relaciones (por ejemplo *mayor que, menor que*) y conectivos (por ejemplo *y, o, pero*). Siendo I cualquier término primario y usando P, construimos el conjunto de términos lingüísticos $H = \{muy\ alto,\ alto,\ medio\}$. La semántica del conjunto de términos lingüísticos se define utilizando números difusos en el intervalo $[0, 1]$, donde cada número difuso es descrito por una función de pertenencia basada en ciertos parámetros o reglas semánticas.

Con respecto a la definición de operadores de agregación de información lingüística, el modelo clásico lo que hace es extender las operaciones de la lógica tradicional para aplicarlas sobre las funciones de pertenencia. El inconveniente es que como resultado obtendremos otro conjunto difuso que no se corresponde con ninguna etiqueta del conjunto de términos originalmente considerado. Si finalmente deseamos obtener una etiqueta de dicho conjunto, es necesario realizar un proceso de aproximación lingüística consistente en encontrar una etiqueta cuyo significado sea el mismo o lo más parecido posible (de acuerdo a alguna métrica) al significado del conjunto difuso no etiquetado obtenido como resultado de alguna operación.

3.4. Modelado Lingüístico Difuso Ordinal

El modelado lingüístico difuso ordinal [24, 34, 36] es un tipo muy útil de enfoque lingüístico difuso, propuesto como una herramienta alternativa al modelado lingüístico difuso clásico que simplifica la computación con palabras eliminando la complejidad de tener que definir una gramática.

Además, el modelado lingüístico difuso clásico al trabajar con números difusos presenta el inconveniente de que no suelen coincidir con etiquetas del conjunto de términos lingüísticos, por lo que si se desea obtener una etiqueta se hace necesaria una aproximación lingüística. El modelado lingüístico difuso ordinal trabaja directamente con las etiquetas previamente definidas por lo que evita tener que recurrir a aproximaciones lingüísticas complejas.

3.4.1. Modelo de Representación en el Enfoque Lingüístico Ordinal

Un enfoque lingüístico difuso ordinal se define considerando un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado $S = \{s_i\},\ i \in \{0, \ldots, T\}$ con $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$, y con una cardinalidad impar (la cardinalidad de S es $T + 1$). La semántica del conjunto de etiquetas es establecida según la estructura ordenada del conjunto de etiquetas [9], considerando que cada etiqueta del par (s_i, s_{T-i}) es igualmente informativa. Por ejemplo, podríamos usar el siguiente conjunto de 9 etiquetas para representar la información lingüística:

$$S = \{N, VL, L, M, H, VH, P\}$$

$$s_0 = Nulo = N \qquad s_1 = Muy\ bajo = VL$$

$$s_2 = Bajo = L \qquad s_3 = Medio = M$$

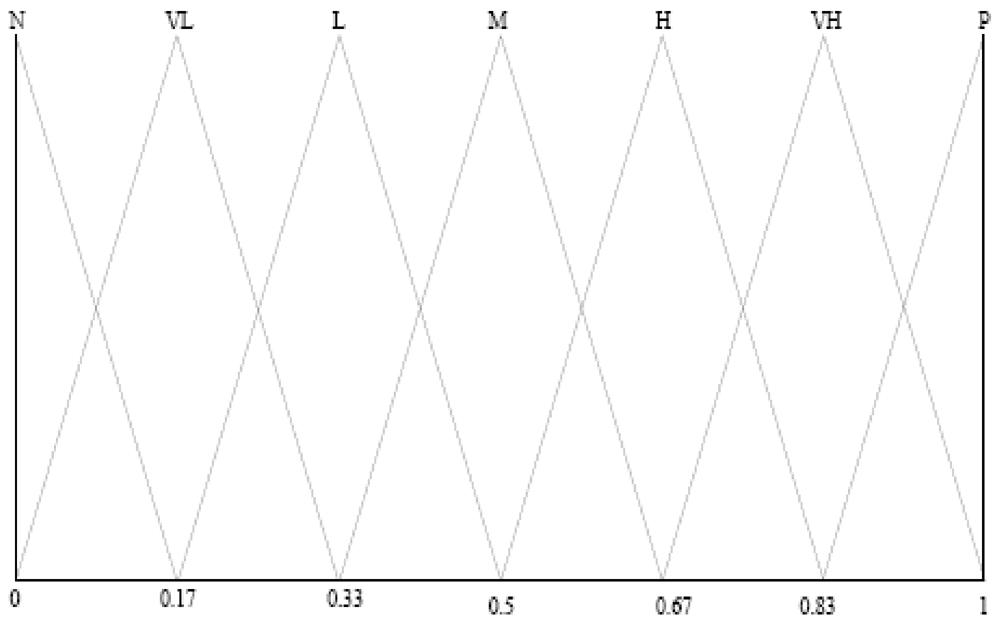

Figura 3.4: Un conjunto de 7 términos lingüísticos y su semántica

$$s_4 = Alto = H \qquad s_5 = Muy\ alto = VH$$

$$s_6 = Perfecto = P$$

donde $s_a < s_b$ si y sólo si $a < b$.

A continuación, tenemos que dar significado al conjunto de etiquetas lingüísticas asociando con cada término lingüístico un conjunto difuso definido en el intervalo $[0, 1]$. Para ello, podemos hacer uso de una representación trapezoidal de la función de pertenencia, o de su caso más particular, una representación triangular por medio de una 3–tupla (a, α, β), donde recordemos que a indica el punto donde el valor de pertenencia vale 1 y α y β los límites izquierdo y derecho respectivamente. Como ejemplo, podemos considerar el anterior conjunto de etiquetas con las siguientes funciones de pertenencia (ver Figura 3.4):

$$s_0 = Nulo(N) = (0, 0, 0.17) \qquad s_1 = Muy\ bajo(VL) = (0.17, 0, 0.33)$$

$$s_2 = Bajo(L) = (0.33, 0.17, 0.5) \qquad s_3 = Medio(M) = (0.5, 0.33, 0.67)$$

$s_4 = Alto(H) = (0.67, 0.5, 0.83)$ $\qquad$ $s_5 = Muy\ alto(VH) = (0.83, 0.67, 1)$

$s_6 = Perfecto(P) = (1, 0.83, 1)$

3.4.2. Modelo Computacional en el Enfoque Lingüístico Ordinal

En cualquier enfoque lingüístico necesitamos operadores para el manejo de la información lingüística. Una ventaja del enfoque lingüístico difuso ordinal es la simplicidad y agilidad de su modelo computacional. Está basado en el cálculo simbólico [34, 36] y actúa operando directamente sobre las etiquetas, teniendo en cuenta el orden de las valoraciones lingüísticas en la estructura ordenada de las etiquetas. Habitualmente, el modelo lingüístico difuso ordinal para la computación con palabras se define estableciendo:

1. un operador de negación,
2. operadores de comparación basados en la estructura ordenada de los términos lingüísticos, y
3. operadores apropiados para la agregación de información lingüística difusa ordinal.

En la mayoría de los enfoques lingüísticos difusos ordinales, a partir de la semántica asociada a los términos lingüísticos el operador de negación se define como:

$$NEG(s_i) = s_j \mid j = T - i$$

También se pueden definir dos operadores de comparación de términos lingüísticos:

1. *Operador de maximización:* $MAX(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.
2. *Operador de minimización:* $MIN(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

A partir de estos operadores es posible definir operadores automáticos y simbólicos de agregación de información lingüística, como por ejemplo el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) [36] y el operador de información lingüística ponderada LWA (Linguistic Weighted Averaging) [34], que están basados en el operador OWA (Ordered Weighted Averaging) estudiado en la sección **??**.

Para concluir, indicar que existen otras opciones de modelado lingüístico difuso ordinal, como generar la semántica de las etiquetas lingüísticas utilizando funciones de negación que inducen una semántica para cada etiqueta [60], estando éstas definidas como intervalos en $[0, 1]$.

3.5. Modelado Lingüístico Difuso 2–tupla

El *modelado lingüístico difuso 2–tupla* [37, 38] es un tipo de modelado lingüístico difuso que nos permite reducir la pérdida de información que habitualmente se produce en el modelado lingüístico difuso ordinal. Esta pérdida de información, que provoca una falta de precisión en los resultados, se debe al propio modelo de representación puesto que opera con valores discretos sobre un universo de discurso continuo. La principal ventaja del modelo computacional lingüístico basado en 2–tupla, es que permite realizar procesos de cómputo con palabras de forma más precisa y por tanto, sin pérdida de información puesto que utiliza un modelo continuo de representación de la información. Para definirlo, tenemos que establecer el modelo de representación y el modelo computacional para representar y agregar la información lingüística respectivamente.

3.5.1. Modelo de Representación en el Enfoque Lingüístico 2–tupla

Consideremos que $S = \{s_0, \ldots, s_T\}$ es un conjunto de términos lingüísticos con cardinalidad impar, donde el término intermedio representa una valoración de aproximadamente 0.5 y con el resto de términos del conjunto distribuidos simétricamente alrededor de ese punto intermedio. Asumimos que la semántica asociada con cada una de las etiquetas viene dada por medio de funciones de pertenencia triangulares, representadas por 3–tuplas (a, α, β) y consideramos todos los términos distribuidos sobre una escala sobre la que hay establecida una relación de orden total, es decir, $s_i \leq s_j \Longleftrightarrow i \leq j$. En este contexto lingüístico difuso, si mediante un método simbólico de agregación de información lingüística [34, 36] obtenemos un valor $\beta \in [0, T]$, y $\beta \notin \{0, \ldots, T\}$, podemos usar una función de aproximación para expresar el resultado obtenido como un valor de S.

Definición 7 *[37] Sea β el resultado de una agregación de los índices de un conjunto de etiquetas valoradas sobre un conjunto de términos lingüísticos S, es decir, el resultado de una operación de agregación simbólica, $\beta \in [0, T]$. Dados $i = round(\beta)$ y $\alpha = \beta - i$ dos valores, tales que, $i \in [0, T]$ y $\alpha \in [-0.5, 0.5)$ entonces α es lo que denominamos* **Traslación Simbólica**, *que expresa la diferencia de información entre la información expresada por β y la etiqueta lingüística s_i más cercana a S.*

El enfoque lingüístico difuso basado en 2–tupla se desarrolla a partir del concepto de traslación simbólica, representando la información lingüística por medio de una 2–tupla $(s_i, \alpha_i),\ s_i \in S$ y $\alpha_i \in [-0.5, 0.5)$:

- s_i representa la etiqueta lingüística, y
- α_i es un valor numérico que expresa la traslación de β al índice de la etiqueta más cercana, i, en el conjunto de términos lingüísticos ($s_i \in S$).

Este modelo define un conjunto de funciones de transformación entre valores numéricos y 2–tupla.

Definición 8 *Sea $s_i \in S$ un término lingüístico, su representación mediante una 2–tupla se obtiene mediante la función θ:*

$$\theta\colon [0,T] \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5)$$

$$\theta(s_i) = (s_i, 0) \mid s_i \in S$$

Definición 9 *[37] Siendo $S = \{s_0, \ldots, s_T\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0,T]$ un valor que representa el resultado de una operación de agregación simbólica, la 2–tupla que expresa la información equivalente a β se obtiene mediante la siguiente función:*

$$\triangle\colon [0,T] \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5)$$

$$\triangle(\beta) = (s_i, \alpha) \ con \ \begin{cases} s_i & i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i & \alpha \in [-0.5, 0.5) \end{cases}$$

donde $round(\cdot)$ es el típico operador de redondeo, s_i es la etiqueta cuyo índice es el más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

Definición 10 *[37] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_T\}$ un conjunto de términos lingüísticos y (s_i, α) una 2–tupla. Se define la función $\triangle^{-1}$, tal que aplicada sobre una 2–tupla (s_i, α) devuelve su valor numérico $\beta \in [0,T]$.*

$$\triangle^{-1}\colon S \times [-0.5, 0.5) \longrightarrow [0,T]$$

$$\triangle^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta$$

3.5.2. Modelo Computacional en el Enfoque Lingüístico 2–tupla

Vamos a estudiar ahora el modelo computacional que nos permite operar sobre la representación lingüística 2–tupla, basándonos en los operadores de comparación, negación y agregación de 2–tupla:

1. *Operador de comparación 2–tupla:* La comparación de información lingüística representada por medio de 2–tupla se realiza de acuerdo a un orden lexicográfico normal y corriente. Consideremos dos 2–tupla (s_k, α_1) y (s_l, α_2) que representan cantidades de información:

   - Si $k < l$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2).
   - Si $k = l$ entonces

     1.1. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) y (s_l, α_2) representan la misma información,

     1.2. Si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2),

     1.3. Si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es mayor que (s_l, α_2),

2. *Operador de negación 2–tupla:* El operador de negación sobre una 2–tupla se define como:

$$Neg((s_t, \alpha)) = \triangle(T - (\triangle^{-1}(s_t, \alpha))),$$

   siendo $T + 1$ la cardinalidad del conjunto de etiquetas S.

3. *Operador de agregación 2–tupla:* La agregación de información consiste en obtener un valor que resuma un conjunto de valores, por lo que el resultado de la agregación de un conjunto de varias 2–tupla debe ser una 2–tupla. En la literatura podemos encontrar numerosos operadores de agregación que nos permiten combinar la información de acuerdo a distintos criterios. Cualquiera de estos operadores puede ser fácilmente

extendido para trabajar con 2–tupla, usando funciones $\triangle$ y $\triangle^{-1}$ que transforman valores numéricos en 2–tupla y viceversa sin pérdida de información. Algunos ejemplos de estos operadores son los siguientes:

Definición 11 ***Media Aritmética.*** *Siendo $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2–tuplas lingüísticas, la 2–tupla que simboliza la media aritmética, $\bar{x}^e$, se calcula de la siguiente forma:*

$$\bar{x}^e[(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)] = \triangle\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \triangle^{-1}(r_i, \alpha_i)\right) = \triangle\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right).$$

Definición 12 ***Operador de Media Ponderada.*** *Siendo $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2–tuplas lingüísticas y $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un vector numérico con sus pesos asociados, la 2–tupla que simboliza la media ponderada, $\bar{x}^w$, es:*

$$\bar{x}^w[(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)] = \triangle\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \triangle^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right) = \triangle\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right).$$

Definición 13 ***Operador de Media Ponderada Lingüística.*** *Siendo $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2–tuplas y $W = \{(w_1, \alpha_1^w), \ldots, (w_n, \alpha_n^w)\}$ sus pesos asociados representados mediante 2–tuplas lingüísticas, la 2–tupla que representa la media ponderada lingüística, $\bar{x}_l^w$, se calcula de la siguiente forma:*

$$\bar{x}_l^w = [((r_1, \alpha_1), (w_1, \alpha_1^w)) \ldots ((r_n, \alpha_n), (w_n, \alpha_n^w))] = \triangle\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \beta_{W_i}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{W_i}}\right),$$

con $\beta_i = \triangle^{-1}(r_i, \alpha_i)$ y $\beta_{W_i} = \triangle^{-1}(w_i, \alpha_i^w)$.

3.6. Modelado Lingüístico Difuso Multi-Granular

Con anterioridad hemos comentado que en cualquier enfoque lingüístico difuso, uno de los parámetros más importantes que hay que determinar es la *granularidad de la incertidumbre*, es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos S usado para expresar la información lingüística. En función del grado de incertidumbre que un experto encargado de cualificar un fenómeno tenga sobre el mismo, el conjunto de términos lingüísticos elegido para proporcionar ese conocimiento tendría más o menos términos. Por lo tanto, cuando distintos expertos tienen diferentes grados de incertidumbre sobre el fenómeno, es conveniente que cada uno trabaje con conjuntos de términos lingüísticos de diferente granularidad de incertidumbre (es decir, trabajar con información lingüística multi–granular) [35, 39]. El uso de diferentes conjuntos de etiquetas es también necesario cuando un experto tiene que valorar conceptos diferentes. En ese tipo de situaciones necesitamos herramientas que nos permitan gestionar información lingüística multi–granular, es decir, necesitamos definir un *modelado lingüístico difuso multi–granular*. Para ello vamos a seguir el modelo propuesto en [39] que hace uso del concepto de jerarquías lingüísticas.

Una ***Jerarquía Lingüística*** es un conjunto de niveles, donde cada nivel, a su vez, es un conjunto de términos lingüísticos con una granularidad diferente del resto de niveles de la jerarquía [20]. A cada uno de los niveles de una jerarquía lingüística los vamos a denotar como $l(t, n(t))$, siendo t un número que indica el nivel de la jerarquía y $n(t)$ la granularidad del conjunto de términos lingüísticos del nivel t.

Normalmente, las jerarquías lingüísticas trabajan con términos lingüísticos cuyas funciones de pertenencia son de forma triangular, simétricas y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$. Además, los conjuntos de términos lingüísticos tienen una granularidad impar, con la etiqueta central indicando un valor de indiferencia.

Los niveles de una jerarquía lingüística están ordenados en función de su granularidad, es decir, que para dos niveles consecutivos t y $t+1$, $n(t+1) > n(t)$. Por lo tanto, cada nivel

$t+1$ proporciona un refinamiento lingüístico con respecto al nivel anterior t.

Vamos a definir una jerarquía lingüística, LH, como la unión de todos los niveles t que la conforman:

$$LH = \bigcup_t l(t, n(t)).$$

Para la construcción de LH debemos tener en mente que el orden jerárquico nos viene dado por el incremento de granularidad de los conjuntos de términos lingüísticos de cada nivel.

Partiendo de que $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \ldots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$ sea el conjunto de términos lingüísticos definido para el nivel t con $n(t)$ términos, la construcción de una jerarquía lingüística debe satisfacer las siguientes reglas básicas [39]:

1. Preservar todos los puntos modales previos de las funciones de pertenencia de cada uno de los términos lingüísticos de cada nivel con respecto a los del nivel siguiente.

2. Hacer que las transacciones entre dos niveles consecutivos sean suaves. El propósito es construir un nuevo conjunto de términos lingüísticos, $S^{n(t+1)}$, de forma que añadiremos un nuevo término lingüístico entre cada pareja de términos pertenecientes al conjunto de términos del nivel anterior t. Para realizar esta inserción de nuevos términos, reduciremos el soporte de las etiquetas lingüísticas para dejar hueco entre ellas para la nueva etiqueta.

De forma genérica, podemos establecer que el conjunto de términos lingüísticos de nivel $t+1$, $S^{n(t+1)}$, puede ser obtenido a partir del nivel anterior t, $S^{n(t)}$, de la siguiente manera:

$$l(t, n(t)) \rightarrow l(t+1, 2 \cdot n(t) - 1)$$

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
l(t,n(t))	l(1,3)	l(2,5)	l(3,9)
l(t,n(t))	l(1,7)	l(2,13)	

Figura 3.5: Granularidad en distintos niveles de una jerarquía

En el cuadro de la figura 3.5 se muestra la granularidad necesaria en cada conjunto de términos lingüísticos de nivel t, dependiendo del valor $n(t)$ definido en el primer nivel (para valores de 3 y 7 respectivamente).

En la figura 3.6 siguiente se muestra un ejemplo gráfico de jerarquías lingüísticas. Se representa una jerarquía compuesta de 3 niveles, de 3, 5 y 9 etiquetas cada uno de ellos.

En [39] se demostró que las jerarquías lingüísticas son útiles para representar información lingüística multi–granular y por tanto permiten trabajar con información lingüística sin pérdida de información. Para conseguirlo, fue definida una familia de funciones de transformación entre etiquetas de diferentes niveles.

Definición 14 *Sea $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$ una jerarquía lingüística cuyos conjuntos de términos lingüísticos son denotados como $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \ldots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$. La* **función de transformación** *de una etiqueta lingüística (representada mediante una 2–tupla) de un nivel t a una etiqueta de un nivel consecutivo $t + c$, con $c \in [1, 1]$, se define como:*

$$\tau_{t+c}^{t} \colon l(t, n(t)) \longrightarrow l(t + c, n(t + c))$$

$$\tau_{t+c}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \triangle\left(\frac{\triangle^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t + c) - 1)}{n(t) - 1}\right)$$

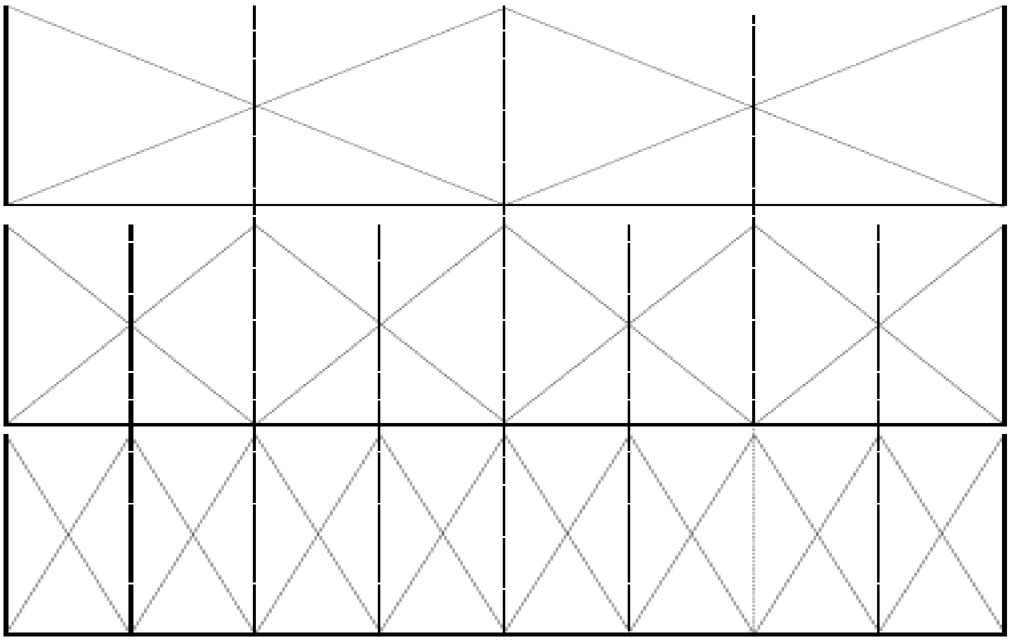

Figura 3.6: Jerarquía lingüística de 3, 5 y 9 etiquetas

Esta función de transformación fue generalizada para transformar términos lingüísticos entre cualquier nivel dentro de la jerarquía lingüística.

Definición 15 *Sea $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$ una jerarquía lingüística cuyos conjuntos de términos lingüísticos son denotados como $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \ldots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$. La* **función de transformación recursiva** *entre una etiqueta lingüística (representada mediante una 2–tupla) perteneciente a un nivel t y una etiqueta perteneciente al nivel $t^{'} = t + a$, con $a \in Z$, se define como:*

$$\tau_{t'}^{t} : l(t, n(t)) \longrightarrow l(t^{'}, n(t^{'}))$$

Si $|a| > 1$ entonces

$$\tau_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \tau_{t'}^{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}(\tau_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}))$$

Si $|a| = 1$ entonces

$$\tau_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \tau_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})$$

Esta función de transformación recursiva, puede ser definida fácilmente de una forma no recursiva de la siguiente manera:

$$\tau_{t'}^{t} : l(t, n(t)) \longrightarrow l(t', n(t'))$$

$$\tau_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \triangle\left(\frac{\triangle^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t') - 1)}{n(t) - 1}\right)$$

Proposición 1 *[39] Esta familia de funciones de transformación entre etiquetas lingüísticas de distintos niveles de una jerarquía lingüística es biyectiva:*

$$\tau_{t}^{t'}(\tau_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})) = (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})$$

3.7. Enfoque Lingüístico en Evaluación Sensorial

Una vez explicado el funcionamiento del modelado difuso, vamos a ver como puede utilizarse en evaluación sensorial.

Normalmente, muchos de los investigadores en toma de decisiones trabajan bajo la hipótesis de que los individuos expresan sus opiniones mediante valores numéricos. Sin embargo, en multitud de ocasiones, es normal que los individuos tengan serios inconvenientes para expresar con valores numéricos sus grados de preferencia de unas alternativas sobre otras. Bajo estas circunstancias, parece más adecuado expresar sus opiniones por medio de valores lingüísticos en lugar de valores numéricos exactos, es decir, suponer que el dominio de las variables que intervienen en el problema es un conjunto de términos lingüísticos [25, 26, 48, 59, 62, 66].

El enfoque lingüístico se aplica cuando las variables que intervienen en un problema son de carácter lingüístico en vez de numérico [66]. Por ejemplo, en situaciones donde intervienen individuos, los cuales usan más bien descriptores lingüísticos que numéricos para dar sus opiniones. Con ello, se consigue modelar de forma más directa y apropiada gran cantidad de problemas reales, ya que nos permite representar la información de los individuos (casi siempre poco precisa) de manera muy aproximada a como inicialmente ellos se expresan.

Una variable lingüística se diferencia de una numérica en que sus valores no son números, sino palabras o sentencias del lenguaje natural, o de un lenguaje artificial [66]. En general, todos sabemos, que las palabras son menos precisas que los números. Por ello, el uso de variables lingüísticas no es siempre más adecuado que el de numéricas. Su aplicación se recomienda en aquellas situaciones donde las variables que intervienen en el problema son demasiado complejas y difíciles de definir de cara a captar su significado por medio de valores cuantitativos (numéricos), y entonces, conviene describirlas aproximadamente mediante valores cualitativos (lingüísticos). Para ello, se selecciona un conjunto apropiado de etiquetas, S, de acuerdo al dominio del problema, y en base a él los individuos expresan sus preferencias.

3.7.1. Caracterización del Conjunto de Etiquetas

En este contexto, como hemos visto anteriormente, una tarea fundamental es la determinación del conjunto de etiquetas a usar para expresar las opiniones de los individuos. Como hemos mencionado, normalmente, dependiendo del dominio del problema y de acuerdo con todos los individuos, un conjunto apropiado de etiquetas lingüísticas se debe seleccionar. Hemos de ponernos de acuerdo sobre el nivel de distinción al que queremos expresar la incertidumbre, o lo que es lo mismo, la granularidad de la incertidumbre del conjunto de etiquetas [67], y sobre la semántica de las etiquetas, o lo que es lo mismo, qué tipo de funciones de pertenencia usar para caracterizar los valores lingüísticos.

El número de etiquetas escogidas determinará la granularidad del conocimiento incierto que se pueda expresar. En [7] se estudió el uso de conjuntos de etiquetas con cardinalidad impar, considerando que la etiqueta de la mitad representa un valor de "aproximadamente 0.5", y estando el resto de ellas distribuidas simétricamente en torno a ésta. Los estudios sociológicos realizados en [5] indican que el límite de granularidad para los individuos es de 11 o no más de 13 etiquetas, siendo los conjuntos más usados por los individuos aquellos de 5, 7, 9, 11 y 13 etiquetas. En la figura 3.7 aparece una estructura jerárquica de etiquetas. El nivel 1 presenta una granularidad que contiene tres etiquetas, el nivel 2 una granularidad con 7 etiquetas, y así los diferentes niveles de granularidad podrían ser representados. Por supuesto, en la figura el nivel 4 presenta la granularidad más fina que se puede considerar en los procesos de decisión, es decir, los valores numéricos.

Normalmente, la semántica de las etiquetas se da mediante números difusos definidos sobre el intervalo unidad $[0, 1]$, los cuales son descritos usando funciones de pertenencia. Dado que, las etiquetas lingüísticas son aproximaciones de expresiones lingüísticas propias de los individuos, se puede considerar que las funciones de pertenencia trapezoidales lineales son suficientemente buenas para recoger la imprecisión de las expresiones humanas, ya que conseguir valores más exactos puede ser una tarea imposible e innecesaria. Esta representación establece una 4–tupla $(a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$ para cada etiqueta. Los dos primeros parámetros indican el intervalo en el cual la función de pertenencia toma valor 1, y el tercero y cuarto la amplitud a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Desde un punto de vista formal, parece difícil aceptar el hecho de que todos los indi-

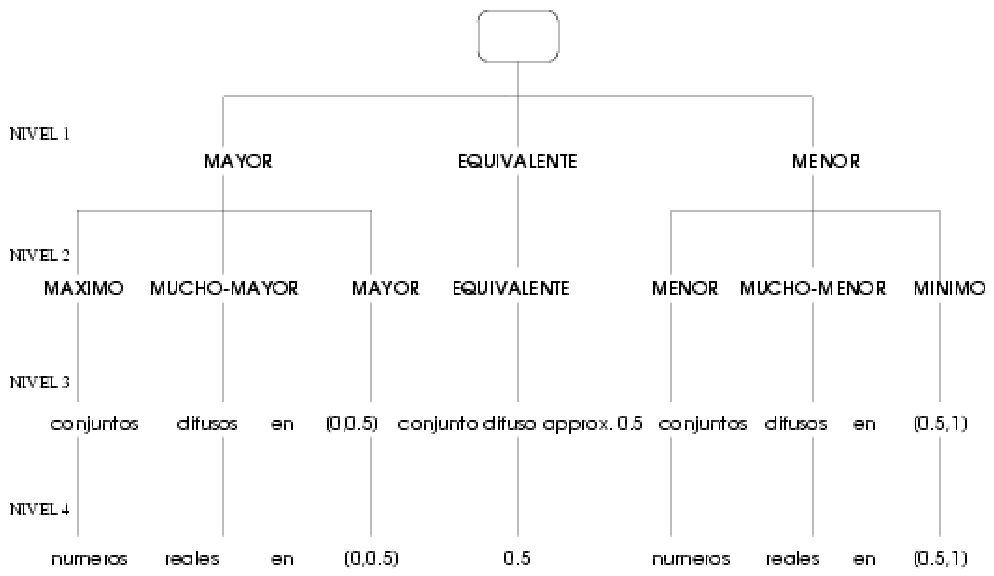

Figura 3.7: Jerarquía de las etiquetas

viduos están de acuerdo sobre las funciones asignadas al conjunto de etiquetas, ya que no hay conceptos de distribuciones universalmente aceptadas. Por ejemplo, como se muestra en la figura 3.8, para una misma evaluación, esas dos diferentes percepciones pueden considerarse válidas. Además, como sucede en procesos de control, el problema de ajuste de funciones de pertenencia no es tarea fácil. Sin embargo, asumiendo que el concepto de variable lingüística es un medio de aproximar información imprecisa, se puede solventar este inconveniente considerando que los individuos presentan concepciones similares y pueden distinguir perfectamente el mismo conjunto de etiquetas.

Aceptadas las ideas anteriores, la siguiente tarea consiste en establecer qué tipo de conjunto de etiquetas se va a usar. Sea $S = \{s_i\},\ i \in H = \{0, \ldots, T\}$ un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado en el sentido usual [7, 25, 67]. Cualquier etiqueta s_i representa un valor posible de una variable real lingüística, es decir, una restricción o propiedad difusa definida en $[0, 1]$. Como en [7], podemos considerar un conjunto de etiquetas, S, con cardinalidad impar, donde la etiqueta del centro representa una incertidumbre de "aproximadamente 0.5" y el resto de etiquetas está distribuido simétricamente a ambos lados de la

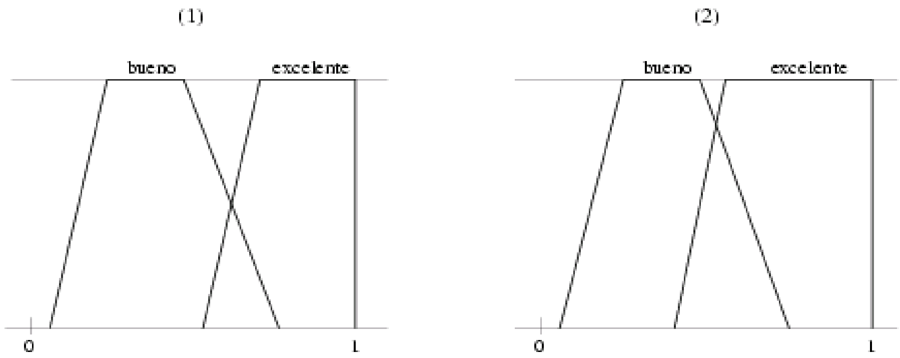

Figura 3.8: Diferentes conceptos de distribución

misma. Además, el conjunto de etiquetas satisface las siguientes propiedades:

1. *Es ordenado:* $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$.
2. *Existe un operador de negación:* $NEG(s_i) = s_j$ tal que $j = T - i$.
3. *Existe un operador de mínimo:* $MAX(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.
4. *Existe un operador de máximo:* $MIN(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

3.7.2. Relaciones de Preferencia Lingüísticas en Problemas de TDG

Asumiendo el contexto lingüístico descrito, podemos considerar que los individuos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas en vez de numéricas. Por tanto, usando un conjunto de etiquetas apropiado $S = \{s_i\},\ i \in H = \{0, \ldots, T\}$, un individuo expresa sus preferencias sobre el conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, mediante una relación de preferencia lingüística, P, tal que, $P = (p_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$. Cada $p_{ij} \in S$ indica su grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j de forma lingüística, de modo que,

$$s_0 \leq p_{ij} \leq s_T,\ (i, j = 1, \ldots, n),$$

con el siguiente significado:

1. $p_{ij} = s_T$ indica el grado mínimo de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j.

2. $s_{T/2} < p_{ij} < s_T$ indica una definitiva preferencia por la alternativa x_i.

3. $p_{ij} = s_{T/2}$ indica indiferencia entre las alternativas x_i y x_j.

Asumiendo relaciones de preferencia numéricas para expresar las preferencias de los individuos, Tanino propuso un conjunto de propiedades o restricciones que se pueden exigir a las relaciones si se quiere que ellas reflejen realmente una preferencia [57, 58]. Algunas de estas propiedades, adecuadas al contexto lingüístico, son las siguientes:

1. *Reciprocidad:*

$$p_{ij} = NEG(p_{ji}),\ y\ p_{ii} = s_0\ \forall i, j.$$

2. *MAX–MIN Transitividad:*

$$p_{ik} \geq MIN(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$

3. *MAX–MAX Transitividad:*

$$p_{ik} \geq MAX(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$

4. *MAX–MIN Transitividad Restringida:*

$$p_{ij} \geq s_{T/2},\ p_{jk} \geq s_{T/2},\ \Rightarrow p_{ik} \geq MIN(p_{ij}, p_{jk})\ \forall i, j, k.$$

5. *MAX–MAX Transitividad Restringida:*

$$p_{ij} \geq s_{T/2},\ p_{jk} \geq s_{T/2},\ \Rightarrow p_{ik} \geq MAX(p_{ij}, p_{jk})\ \forall i, j, k.$$

Siguiendo esta misma línea de razonamiento, con objeto de dar un mayor grado de libertad a los individuos en el modo de expresar sus preferencias, podemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. *Reciprocidad débil,* en el siguiente sentido [6],

   1.1. Por definición $p_{ii} = s_0 \; \forall x_i \in X$ (la mínima etiqueta de S).

   1.2. Si $p_{ij} \geq s_{T/2}$, entonces $p_{ji} \leq s_{T/2}$.

   La condición (a) es una convención, o sea, si sólo se considera una alternativa x_i, no se asigna preferencia alguna. La condición (b) parece lógica, pues cuando $p_{ij} \geq s_{T/2}$, de acuerdo con la definición de relación de preferencia lingüística, parece razonable pensar que la preferencia complementaria, p_{ji}, debería automáticamente satisfacer que $p_{ji} \leq s_{T/2}$, ya que, de otro modo, incurriríamos en una contradicción.

2. *Completitud*, en el siguiente sentido [21],

$$p_{ij} \geq NEG(p_{ji}), \; \forall (x_i, x_j).$$

   Esta propiedad se requiere, a veces, para asegurar que todos los individuos asumen como factible y comprensible el conjunto de alternativas sobre el que expresan sus opiniones.

3.7.3. Enfoque Lingüístico del Problema de TDG

Aceptando que los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido, un problema de TDG en contexto lingüístico se define como sigue: hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ $(m \geq 2)$. Cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X \times X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X \times X \rightarrow S,$$

siendo p_{ij}^k el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j, expresado lingüísticamente por el individuo e_k. Entonces el problema consiste en encontrar el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias de los individuos.

Se puede suponer la existencia de un moderador, el cual asigna los grados de importancia (μ_E) y de relevancia (μ_R) a los individuos y alternativas, respectivamente. Ahora bien, en este punto, se pueden considerar diferentes posibilidades o modelos de problemas de Toma de Decisiones en Grupo:

1. **Tipo A.** Problemas de Toma de Decisiones en Grupo homogéneos en contexto lingüístico, es decir, sin considear la asignación de grados de importancia.

2. **Tipo B.** Problemas de Toma de Decisiones en Grupo heterogéneos en contexto lingüístico, es decir, considerando asignación de grados de importancia, o sea, evaluados en el intervalo $[0, 1]$, y por tanto,

$$\mu_E : E \rightarrow [0, 1].$$

3. **Tipo C.** Problemas de Toma de Decisiones en Grupo heterogéneos en contexto lingüístico homogéneo, es decir, considerando la asignación de grados de importancia, pero asumiendo que el moderador los evalúua en el mismo dominio lingüístico usado por los individuos para expresar sus preferencias, es decir,

$$\mu_E : E \rightarrow S.$$

4. **Tipo D.** Problemas de Toma de Decisiones en Grupo heterogéneos en contexto lingüístico heterogéneo, es decir, considerando la asignación de grados de importancia, pero asumiendo que el moderador los evalúua en un dominio lingüístico, $V = \{v_i\},\ i \in H =$

$\{0, \ldots, T'\}$, diferente al usado por los individuos para expresar sus preferencias, y por tanto, $S \neq V$,

$$\mu_E : E \rightarrow V.$$

En los tipos de problemas de Toma de Decisiones en Grupo heterogéneos B y D, se pueden considerar además la asignación de grados de relevancia a las alternativas, evaluados en cada caso, en el mismo dominio en el que se expresan los grados de importancia respectivos.

Capítulo 4

Cursos de Doctorado

El período de docencia fue realizado durante el año académico 2006/2007, en el programa de doctorado Informática, siendo coordinador del mismo D. Juan Ruiz de Miras.

Pasamos a enumerar y describir brevemente los cursos realizados en dicho período:

Metodología y Documentación Científica. Este curso tuvo carácter obligatorio y fue impartido por el Dr. Francisco Feito, el Dr. Luis Martínez, el Dr. Alfonso Ureña y el Dr. Víctor Rivas. Los contenidos versaron sobre diferentes temas pero todos ellos perseguían la finalidad de inculcar una metodología de investigación, por ello se vio una visión amplia de la finalidad de un doctorado, se proporcionó información para el diseño de trabajos científicos (artículos, informes, proyectos, trabajos académicos diversos)., la herramientas Los objetivos del curso fueron entre otros, orientarnos de la finalidad de un programa de doctorado, datarnos sobre las metologías...

Avances en Sistemas de Información Espacial. Curso impartido por el Dr. Francisco Feito, la Dra. Lidia Ortega y el Dr. Juan Carlos Torres (procedente de la Universidad de Granada). Se estudió los avances sobre Información Espacial, el diseño e implementación de los sistemas de navegación en entornos virtuales y se explicaron los métodos para una Gestión Inteligente de la Información Espacial.

Búsquedas Inteligentes de Información en la Web. Impartido por Dr. L. Alfonso Ureña , la Dra. Mª Teresa Martín , el Dr. Antonio Gabriel López y por último el Dr. Manuel Palomar que provenía de la Universidad de Alicante. En este curso se estudió el estado del arte en los sistemas de búsqueda de información y además se estudiaron otras aplicaciones como son la recuperación de información multilingüe y los sistemas de búsqueda de respuesta.

Integración de Técnicas Hipermedia y de Visualización Gráfica en Sistemas Inteligentes. Impartido por la Dra. Lina Guadalupe García, Dr. Luis Martínez y el Dr. Antonio J. Rueda. Los contenidos versaron sobre los siguientes temas: Introducción a los Sistemas Inteligentes (Sistemas de Agentes, Sistemas Multi-Agente, Aplicaciones en Internet) , Tecnologías Hipermedia (Modelos de Adaptación, Modelos de Navegación, Modelos Adaptativos según la estructura del Conocimiento), Interfaces y Visualización Avanzada en Entornos Web (Interfaces de Usuario, Visualización Avanzada).

Minería de Datos Descriptiva y Web Mining. Curso impartido por la Dra. María José del Jesús, el Dr. Carlos Molina, el Dr. José María Serrano y el Dr. Victor Manuel Rivas. En este curso se estudiaron las nuevas tendencias en minería de datos descriptivas, los problemas por resolver en las técnicas existentes y las vías de solución y desarrollo.

Minería de Datos Predictiva. Impartido por la Dra. María José del Jesús, el Dr. Víctor Manuel Rivas y el Dr. Antonio Jesús Rivera. Se estudiaron los problemas de clasificación, regresión y predicción de series temporales y las técnicas existentes para solucionarlos.

Recuperación de Información Multimodal. Curso impartido por la Dra. María Teresa Martín, el Dr. José Manuel Fuertes y el Dr Antonio Gabriel López. Los contenidos versaron sobre los siguientes temas: Técnicas de recuperación de información (textual y pictórica), Herramientas y módulos disponibles para el tratamiento y recuperación de la información textual y por otra lado pictórica y un estudio y aplicación de las diferentes técnicas de fusión de documentos y combinación de resultados.

Bibliografía

[1] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: a linguistic fuzzy-set approach. *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.

[2] W. Armstrong. Uncertainity and utility function. *Economics Journal*, 58:1–10, 1948.

[3] K. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy-sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31(3):343–349, 1989.

[4] R.E. Bellman and L. Zadeh. Decision making in a fuzzy enviroment. *Management Science*, 17(4):141–164, 1970.

[5] R. Beyth-Marom. How probable is probable? A numerical taxonomy translation of verbal probability expressions. *Journal of Forecasting*, pages 257–269, 1982.

[6] J.C. Bezdek, B. Spillman, and R. Spillman. A fuzzy relation space for group decision theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:255–278, 1978.

[7] P.P. Bonissone and K.S. Decker. *Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity*, pages 217–247. Uncertainty in Artificial Intelligence. North-Holland, 1986.

[8] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: a model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.

[9] G. Bordogna and G. Pasi. *Application of the OWA operators to soften information retrieval systems*, pages 275–294. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[10] G. Bordogna and G. Pasi. An ordinal information retrieval model. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9:63–76, 2001.

[11] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, and A. Tsoukia's. *Evaluation and decision models: a critical perspective.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[12] H. Bustince, E. Barrenechea, and V. Mohedano. Intuitionistic fuzzy implication operators: an expression and main properties. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(3):387–406, 2004.

[13] H. Bustince and P. Burillo. Perturbation of intuitionistic fuzzy relations. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(1):81–103, 2001.

[14] R. Caballero and G. M. Fernández. *Toma de decisiones con criterios múltiples.* Revista de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, 2002.

[15] E. Capurso and A. Tsoukiï¿$\frac{1}{2}$. Decision aiding and psychotherapy. *Bulletin of the EURO Working Group on MCDA*, 2003.

[16] P-T Chang and E. Stanley Lee. Fuzzy decision making: a survey. *Fuzzy Science and Engineering*, pages 139–182, 1993.

[17] C-H. Cheng and Y. Lin. Evaluating the best main battle tank using fuzzy decision theory with linguistic criteria evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142:174–186, 2002.

[18] H. Chernoff. *Elementary decision theory.* Dover Publications, 1987.

[19] C. Coombs and J. Smith. On the detection of structures in attitudes and developmental processes. *Psychological Reviews*, 80(5):337–351, 1973.

[20] O. Cordón, F. Herrera, and I. Zwir. Linguistic modeling by hierarchical systems of linguistic rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(1):2–20, 2001.

[21] V. Cutello and J. Montero. A model for amalgamation in group decision making. In NASA Conference Publications 10112, editor, *In Proc. of the North American Fuzzy Information Processing Society International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications*, pages 215–223, Puerto Vallarta, 1992.

[22] G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. John Wiley and Sons Inc., 1959.

[23] R. Degani and G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2:143–162, 1988.

[24] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. Combinig numerical and linguistic information in group decision making. *Information Sciences*, 107:177–194, 1998.

[25] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A Vila. Linguistic decision making models. *International Journal of Intelligent Systems*, 7:479–492, 1992.

[26] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8:351–370, 1993.

[27] G.B. Devedzic and E. Pap. Multicriteria-multistages linguistic evaluation and ranking of machine tools. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:451–461, 1999.

[28] L. Dombi. *Fuzzy Logic and Soft Computing*, chapter A general framework for the utility-based and outranking methods, pages 202–208. World Scienti-fic, 1995.

[29] D. Dubois and H. Prade. Rough fuzzy-sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 13(2-3):191–209, 1990.

[30] R. Duncan and H. Raiffa. *Games and decision. Introduction and critical survey*. Dover Publications, 1985.

[31] P. Fortemps and R. Slowinski. A graded quadrivalent logic for ordinal preference modelling: loyola-like approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1:93–111, 2002.

[32] RA. Gheorghe, A. Bufardi, and P. Xirouchakis. Fuzzy multicriteria decision aid method for conceptual design. *Cirp Annals-Manufacturing Technology*, 54(1):151–154, 2005.

[33] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129(1):1–47, 2001.

[34] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems*, 27:646–656, 1997.

[35] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion aproach for managing multigranularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:43–58, 2000.

[36] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:175–190, 1996.

[37] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.

[38] F. Herrera and L. Martínez. The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Suppl.):33–49, 2001.

[39] F. Herrera and L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 31(2):227–234, 2001.

[40] E. Herrera-Viedma. An information retrieval model with ordinal linguistic weighted queries based on two weighting elements. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9:77–88, 2001.

[41] E. Herrera-Viedma. Modeling the retrieval process of an information retrieval system using an ordinal fuzzy linguistic approach. *Journal of the American Society for Information Science*, 52(6):460–475, 2001.

[42] E. Herrera-Viedma and E. Peis. Evaluating the informative quality of documents in SGML-format using fuzzy linguistic techniques based on computing with words. *Information Processing & Management*, 39(2):195–213, 2003.

[43] H.Nurmi. *Assumptions of individual preferences in the theory of voting procedures*, pages 142–155. In: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., Non conventional Preference Relations in Decision Making. Springer-Verlag, 1988.

[44] M. Inuiguchi. Generalizations of rough sets: from crisp to fuzzy cases. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3066:26–37, 2004.

[45] A. Jiménez, S. Ríos-Insua, and A. Mateos. A decision support system for multiattribute utility evaluation based on imprecise assignments. *Decision Support Systems*, 36(1):65–79, 2003.

[46] D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky. *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, 1981.

[47] R.D. Luce and P. Suppes. *Handbook of mathematical psychology*, chapter Preferences, Utility and Subject Probability, pages 249–410. Wiley, 1965.

[48] L. Mich, L. Gaio, and M. Fedrizzi. On fuzzy logic-based consensus in group decision. In *Fifth International Fuzzy Systems Association World*, pages 698–700, Seoul, 1993.

[49] G.A. Miller. The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity of processing information. *Psychological Review*, 63:81–97, 1956.

[50] M. Oztrk, A. Tsoukiï¿½, and Ph. Vincke. *Preference Modelling*, pages 27–72. In: State of the Art in Multiple Criteria Decsioin Analysis, M. Ehrgott, S. Greco and J. Figueira (Ed.). Wiley Series on Intelligent Systems. Springer-Verlag, 2005.

[51] P. Perny and A. Tsoukias. On the continuous extension of a four Valued logic for preference modelling. pages 302–309, Paris, 1998. IPMU.

[52] S. Rios, C. Bielza, and A. Mateos. *Fundamentos de los sistemas de ayuda a la decisión*. Ra-Ma, 2002.

[53] C. Romero. *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas, aplicaciones*. Alianza Universidad, 1993.

[54] M. Roubens and Ph. Vincke. *Preference modelling*. Springer-Verlag, 1985.

[55] F. Seo and M. Sakawa. Fuzzy multiattribute utility analysis for collective choice. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15:45–53, 1985.

[56] T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 12:117–131, 1984.

[57] T. Tanino. *Fuzzy preference relations in group decision making*, pages 54–71. in: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., Non-conventional Preference Relations in Decision Making. Springer-Verlag, 1988.

[58] T. Tanino. *On group decision making under fuzzy preferences*, pages 172–185. in: J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, Eds., Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[59] M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10:716–723, 1980.

[60] V. Torra. Negation function based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:975–988, 1996.

[61] V. Torra. Aggregation of linguistic labels when semantics is based on antonyms. *International Journal of Intelligent Systems*, 16:513–524, 2001.

[62] V. Torra and U. Cortés. Towards an automatic consensus generator tool: Egac. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 25(5):888–894, 1995.

[63] E. Triantaphyllou. *Multi-criteria decision making methods: a comparative study*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[64] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.

[65] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[66] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.

[67] L.A. Zadeh. Fuzzy sets and information granularity. *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications*, pages 3–18, 1979.

[68] L.A. Zadeh and J. Kacprzyk. *Fuzzy logic for the management of uncertainty*. John Wiley, New York, 1992.